

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 1 (1928)
Heft: I

Artikel: Anomale Dispersion im Röntgengebiet
Autor: Forster, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-109160>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Anomale Dispersion im Röntgengebiet

von R. Forster.

Nach der Methode der Bestimmung des Grenzwinkels der Totalreflexion wurden mit einer Apparatur, die gestattete, mit monochromatischem Röntgenlicht im Bereich von $0,5-2,3 \text{ \AA}$ zu messen, eingehende Bestimmungen des Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen gemacht.

Es zeigte sich, dass für jedes Material die Abweichung des Brechungsexponenten von 1 ganz entsprechend der klassischen Dispersionsformel mit dem Quadrat der Wellenlänge zunimmt. Liegt eine Absorptionskante im untersuchten Gebiet, dann gilt die oben erwähnte Abhängigkeit zu beiden Seiten der Kante bis in ihre unmittelbarste Nähe. Doch ist der Wert des Brechungsindex auf der kurzwelligen Seite der Kante etwas grösser als auf der langwelligen Seite. Von einem anomalen Verhalten des Brechungsexponenten ist, soweit die Messungen an die Kante heran reichen, nichts angedeutet.

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit wurde zu dem Zweck vorgenommen, um die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge im Gebiet der Röntgenstrahlen im allgemeinen, und im Gebiet einer Absorptionskante im speziellen zu untersuchen.

Schon RÖNTGEN hat in seinen ersten Mitteilungen über die neuentdeckte Strahlung¹⁾ über Versuche berichtet, die er zu dem Zweck unternommen hatte, eine eventuelle Dispersion dieser Strahlung nachzuweisen. Die Versuche an Prismen von Wasser, Schwefelkohlenstoff, Glimmer, Hartgummi, Aluminium mit einem brechenden Winkel von ca. 30° lieferten allerdings kein eindeutiges Ergebnis und RÖNTGEN selbst schreibt, dass wenn eine Brechung vorhanden wäre, der Brechungsexponent nach den vorhandenen Aufnahmen höchstens 1,05 sein könnte. Spätere Versuche, die von CHAPMAN²⁾, BARKLA³⁾, WEBSTER u. CLARK⁴⁾, zum Teil mit einem, zum Teil mit zwei hintereinander geschalteten Prismen, mit verschiedenen Materialien unternommen wurden, ergaben kein eindeutiges Resultat, obwohl die verwendeten Apparate

¹⁾ W. C. RÖNTGEN, Sitzungsber. der Würzburger phys. Ges. 1895.

²⁾ J. C. CHAPMAN, Cambr. Proc. **16**, 574—579, 1912.

³⁾ BARKLA, Phil. Mag. **31**, 257—260, 1916.

⁴⁾ D. L. WEBSTER u. H. CLARK, Phys. Rev. **8**, 528—533, 1916.

einen Brechungsexponenten von 1,0002 noch zu messen gestattet hätten. Aus dieser obern Grenze für den Brechungsexponenten wurden nun allerdings schon Rückschlüsse auf die Wellenlänge der Röntgenstrahlen gemacht.¹⁾ Unter der Annahme nämlich, dass die Röntgenstrahlen elektromagnetische Wellen sind, und für sie auch die LORENTZ'sche Dispersionsformel gilt, folgt aus dem sehr kleinen Brechungsexponenten eine äusserst kleine Wellenlänge.

Obwohl 1912 VON LAUE die Wellennatur der Röntgenstrahlen nachgewiesen, und deren Wellenlänge zu 10^{-8} cm gefunden wurde, gelangte man auf dem Gebiet der Dispersionsmessungen doch nicht vorwärts. Noch im Jahre 1918 hatte man gar keine Anhaltspunkte darüber, ob der Brechungsexponent der Röntgenstrahlen kleiner oder grösser als 1 sei. EINSTEIN²⁾ bemerkte zu einer von KÖHLER³⁾ entdeckten Erscheinung, dass diese erklärt werden könnte, wenn man für Röntgenstrahlen einen Brechungsexponenten kleiner als 1 voraussetzen würde, da in diesem Fall totalreflektierte Strahlen auftreten könnten.

Die von STENSTRÖM⁴⁾ gefundene Tatsache, dass sich die Wellenlänge derselben Strahlung aus verschiedenen Interferenzordnungen verschieden bestimmt, erklärt er als dadurch zustande gekommen, dass durch die Brechung der Röntgenstrahlen an der Kristalloberfläche eine Veränderung der Glanzwinkel eintrete, ohne aber daraus auf die Grösse des Brechungsexponenten zu schliessen. KNIPPING⁵⁾ weist allerdings darauf hin, dass diese Wellenlängenveränderung durch die von MADELUNG erwartete Auflockerung des Kristallgefüges in der Nähe der Oberfläche erklärt werden könne.

Im Jahre 1922 führte COMPTON⁶⁾ die Extrapolation der im sichtbaren Gebiete allgemein gültigen Dispersionsformel von LORENTZ für so kurze Wellen aus und kam zum Ergebnis, dass, wenn eine Strahlung ein Medium durchsetzt, bei dem die Eigenfrequenz eines seiner konstituierenden Elektronen kleiner ist als die der Strahlung, der Brechungsexponent kleiner als 1 ist. Das ist für Röntgenstrahlung, deren Frequenz von der Grössenordnung 10^{18} ist, der Fall. Dann muss es also möglich sein, mit an Spiegeln totalreflektierten Röntgenstrahlen deren Brechungsexponenten zu

1) R. POHL, Physik der Röntgenstrahlen, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1912.

2) A. EINSTEIN, Verh. d. deutschen phys. Ges. **20**, 1918.

3) KÖHLER, Fortschr. auf d. Gebiet d. Röntgenstr. **24**, 236, 1916.

4) STENSTRÖM, Diss. Lund, 1919.

5) P. KNIPPING, Z. S. f. Ph. **1**, 40, 1920.

6) A. P. COMPTON, Phys. Rev. **20**, 84, 1922.

bestimmen. (Die entsprechenden Zusammenhänge werden weiter unten eingehend besprochen werden.) Auf diese Weise gelang es COMPTON, die Abweichung des Brechungsexponenten von 1 an Glas zu $5,0 \cdot 10^{-6}$, und an Silber zu $20,9 \cdot 10^{-6}$ zu bestimmen, für eine verwendete Wellenlänge von $1,279 \text{ \AA}$.

Es zeigte sich also durch diese Versuche von COMPTON, dass die Extrapolation der Formel von LORENTZ gestattet und der Brechungsexponent für Röntgenstrahlen wirklich kleiner als 1 ist. Die Grundlage für weitere Versuche war nun geschaffen; denn man wusste jetzt, in welcher Richtung und in welcher Grössenordnung man diese Brechungsexponenten zu suchen hatte. In der Folge wurden viele solcher Untersuchungen an verschiedenen Substanzen und mit einigen Wellenlängen gemacht¹⁾; aber es fehlten bis heute systematische Untersuchungen darüber, wie sich der Brechungsexponent als Funktion der Wellenlänge verhält. Einige Forscher haben allerdings eine andere Methode als die der Totalreflexion eingeschlagen (Prismen mit grossem brechenden Winkel²⁾, Kristallreflexion unter sehr kleinen Winkeln³⁾, Verbreiterung der Spektrallinien⁴⁾) und sind zu ähnlichen Ergebnissen gekommen.

HJALMAR⁵⁾ hat an Gips für einige Wellenlängen Bestimmungen des Brechungsexponenten auf Grund der Abweichungen vom BRAGG'schen Reflexionsgesetz gemacht und gefunden, dass in der Nähe der Absorptionskanten sowohl von Ca als auch von S Abweichungen vom normalen Verlauf des Brechungsexponenten auftreten.

2. Die Methode der Totalreflexion zur Bestimmung des Brechungsexponenten für Röntgenstrahlen.

Die Formel von LORENTZ für die Dispersion elektromagnetischer Wellen im Falle freier Elektronen kann man in die folgende Form bringen:

$$\delta = 1 - n = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2/m N \cdot Z}{\nu^2}$$

wobei N die Zahl der Atome in der Volumeneinheit, Z die Zahl

-
- ¹⁾ NELLO CARRARA, Cim. (N. S.) **1**, 107, 1924. — R. L. DOAN, Phil. Mag. **20**, 100, 1927. — H. W. EDWARDS, Phys. Rev. **30**, 91, 1927.
W. LINNIK u. W. LASCHKAREW, Z. S. f. Phys. **38**, 659, 1926.
²⁾ M. SIEGBAHN, Journ. de Phys. et le Radium **6**, 228, 1925.
B. DAVIS u. C. M. SLACK, Phys. Rev. **27**, 18, 1926.
³⁾ B. DAVIS u. R. NARDROFF, Acad. Amer. **10**, 60 u. 384, 1924.
⁴⁾ W. EHRENBURG u. H. MARK, Z. S. f. Phys. **38**, 129, 1926.
⁵⁾ E. HJALMAR, Ann. d. Ph. **79**, 550, 1926.

der Dispersionselektronen eines Atoms, ν die Frequenz der einfallenden Strahlung bedeuten. Diese Formel ist richtig unter der Voraussetzung, dass die Frequenz der einfallenden Strahlung sehr viel grösser ist als die Eigenfrequenzen der das Atom aufbauenden Elektronen. Dass diese Formel auch im Gebiet der Röntgenstrahlung ihre Berechtigung hat, das haben die Versuche von COMPTON und anderen gezeigt, wobei es für das Folgende im wesentlichen nur darauf ankommt, dass $n < 1$ ist.

Betrachtet man den Fall der gewöhnlichen Brechung, so gilt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

und da in unserm Fall $n < 1$ ist, so kann also der Fall eintreten, dass einem Winkel α_0 ein Winkel $\beta = 90^\circ$ entspricht, d. h. der gebrochene Strahl geht nicht mehr ins Medium hinein, sondern verlässt dasselbe streifend. α_0 ist natürlich fast gleich 90° und man führt deshalb den Winkel $\Theta_0 = 90 - \alpha_0$ ein. Es bedeutet also Θ_0 den Grenzganzwinkel für Brechung, und weil für kleinere Winkel Totalreflexion auftritt, auch für Reflexion. Es ist also

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \sin (90 - \Theta_0) = \cos \Theta_0 = n = 1 - \delta \\ \sin \Theta_0 &= \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_0} = \sqrt{1 - (1 - \delta)^2} = \sqrt{2\delta} \end{aligned} \quad (1)$$

Die Vernachlässigung von δ^2 gegenüber δ ist deshalb gestattet, weil δ von der Grössenordnung 10^{-6} ist. Aus (1) folgt

$$\delta = \frac{\sin^2 \Theta_0}{2} \quad (2)$$

(Um Verwechslungen vorzubeugen, sei hier bemerkt, dass im folgenden unter Brechungsexponent immer seine Abweichung von 1 verstanden ist.)

Aus der Formel für $\sin \Theta_0$ ersieht man sofort den grossen Vorteil der Methode der Totalreflexion; denn da δ von der Grössenordnung 10^{-6} ist, so ist die Wurzel aus δ nur noch von der Grössenordnung 10^{-3} , und einem $\sin \Theta_0 = 10^{-3}$ entspricht ein Winkel von ca. 1,5 Minuten. Man braucht also zur Bestimmung dieses Grenzwinkels nicht bis an die äusserst erreichbare Grenze der möglichen Messgenauigkeit zu gehen, wie es bei der direkten Bestimmung des Brechungsexponenten mit Prismen notwendig ist.

Um diesen Grenzwinkel zu bestimmen, geht man einfach so vor: Man lässt ein schmales Bündel monochromatisches Röntgenlicht auf einen Spiegel fallen und dreht diesen Spiegel um die Achse, die durch die Schnittlinie von Röntgenbüschel und Spiegelfläche gegeben ist. Links und rechts vom primären Röntgen-

bündel entstehen nun in einem Winkelbereich von $2 \Theta_0$ total-reflektierte Röntgenstrahlen. Hat man senkrecht zur Primärstrahlrichtung, im Abstand R von der Spiegeldrehachse, eine photographische Platte aufgestellt, so entsteht auf dieser ein geschwärzter Streifen von der Breite $2R \operatorname{tg} (2 \Theta_0)$.

3. Einfluss der Absorption auf die Schärfe der Reflexionsgrenze und die dadurch bedingte Veränderung der Schwärzungsbreite auf der Platte.

Die zur Reflexion gebrauchten Metalle können für die verwendete Strahlung nicht als vollkommen durchsichtig betrachtet werden. Die einfallende elektromagnetische Welle erleidet infolge der Absorption eine Schwächung der Amplitude, die besonders im Gebiete erhöhter Absorption auf der kurzwelligen Seite einer Absorptionskante beträchtliche Werte annehmen kann. Die Absorption kann bei der rechnerischen Behandlung der Brechung dadurch berücksichtigt werden, dass man einen komplexen Brechungsexponenten einführt, wobei der reelle Teil den gewöhnlichen Brechungsexponenten, und der imaginäre Teil den Absorptionskoeffizienten bedeutet.

$$s = n - i\kappa = (1 - \delta) - i\kappa. \quad (3)$$

Führt man diesen Brechungsexponenten in der Gleichung der elektromagnetischen Welle von der Frequenz ω , die sich im Medium, das gegen Vakuum den Brechungsexponenten s besitzt, mit der Geschwindigkeit c/s fortpflanzt, ein, so erhält man

$$E = e^{i\omega \left(t - \frac{s}{c} x\right)} = e^{i\omega \left(t - \frac{(n-i\kappa)}{c} x\right)} = e^{-\frac{\omega}{c} \kappa x} \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{n}{c} x\right)}$$

Man sieht, dass der imaginäre Teil des Brechungsexponenten zur Folge hat, dass die Amplitude der Welle mit zunehmender durchlaufener Schichtdicke x abnimmt. Bezeichnet man wie gewöhnlich mit μ den Absorptionskoeffizienten nach der Beziehung $J = J_0 \cdot e^{-\mu x}$, so sieht man sofort die Bedeutung von κ , wenn man sich erinnert, dass $\omega = 2\pi\nu$, und $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ist, nämlich

$$\kappa = \frac{\mu}{2\pi} \lambda, \quad (4)$$

woraus auch ersichtlich ist, dass κ von der Grössenordnung 10^{-6} ist.

Um die Intensität der reflektierten Strahlung im Gebiete des Grenzwinkels Θ_0 , gemessen an der auffallenden Intensität, zu bestimmen, benützen wir die Gleichungen von FRESNEL, wobei es genügt, nur die Komponente der Strahlung zu betrachten,

die parallel ist zur Ebene, die durch den einfallenden und den reflektierten Strahl bestimmt ist. Für diese Komponente lautet die Gleichung von FRESNEL

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{n^2 \cos \varphi - \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{n^2 \cos \varphi + \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \quad (5)$$

wobei φ den Einfallswinkel (gegen das Lot), und n den Brechungs-exponenten bedeuten. Im Falle von Totalreflexion werden diese Wurzeln imaginär und sind mit dem umgekehrten Vorzeichen zu nehmen. Für n setzen wir nun den komplexen Ausdruck $s = n - i\kappa = (1 - \delta) - i\kappa$ ein. Bedeutet Θ wiederum den Glanzwinkel, so ist $\varphi = 90 - \Theta$, und die Gleichung von FRESNEL hat nun die Form

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{[(1 - \delta) - i\kappa]^2 \sin \Theta + \sqrt{[(1 - \delta) - i\kappa]^2 - \cos^2 \Theta}}{[(1 - \delta) - i\kappa]^2 \sin \Theta - \sqrt{[(1 - \delta) - i\kappa]^2 - \cos^2 \Theta}} \quad (6)$$

Erinnert man sich jetzt, dass δ und κ von der Grössenordnung 10^{-6} sind, so sieht man, dass es für eine erste Näherung gestattet ist, die höheren Potenzen von δ und κ gegenüber δ und κ selbst zu vernachlässigen. Da Θ bei der Reflexion von Röntgenstrahlen immer ein kleiner Winkel ist, so kann man setzen $\sin \Theta = \Theta$, $\cos \Theta = 1$. Ebenso kann man im Produkt mit $\sin \Theta$, δ und κ gegenüber 1 vernachlässigen. Führt man diese Vereinfachungen ein, so erhält man folgenden Ausdruck

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 2\delta - 2i\kappa}}{\Theta - \sqrt{\Theta^2 - 2\delta - 2i\kappa}} \quad (7)$$

Benutzt man nun noch die Tatsache, dass für den Grenzganzwinkel Θ_0 die Beziehung besteht $\Theta_0 = 2\delta$, und stellt man den Winkel Θ dar als $\Theta_0 + p \cdot \Theta_0$, so vereinfacht sich der Ausdruck (7) zu

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{\Theta_0 (1 + p) + \sqrt{2p \Theta_0^2 - 2i\kappa}}{\Theta_0 (1 + p) - \sqrt{2p \Theta_0^2 - 2i\kappa}} \quad (8)$$

Führt man nun an Stelle von κ eine Grösse k so ein, dass

$$k = \frac{\kappa}{\Theta_0^2} = \frac{\kappa}{2\delta}$$

so lautet die Formel für das Verhältnis der Amplituden

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{(1 + p) + \sqrt{2(p - ik)}}{(1 + p) - \sqrt{2(p - ik)}} \quad (9)$$

Zerlegt man im Ausdruck (9) Zähler und Nenner in Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{\left[(1+p) + \sqrt{2 \sqrt{p^2 + k^2} \cos \frac{\varrho}{2}} \right] + i \sin \frac{\varrho}{2}}{\left[(1+p) - \sqrt{2 \sqrt{p^2 + k^2} \cos \frac{\varrho}{2}} \right] + i \sin \frac{\varrho}{2}} \quad (10)$$

wobei der Winkel ϱ gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} \varrho = - \frac{k}{p} \quad (11)$$

Bestimmt man nun den absoluten Wert des ganzen Ausdruckes, so erhält man durch Multiplikation von (10) mit dem zu ihm konjugiert komplexen Ausdruck

$$\frac{J_r}{J_e} = \frac{\left[(1+p) + \sqrt{2 \sqrt{p^2 + k^2} \cos \frac{\varrho}{2}} \right]^2 + \sin^2 \frac{\varrho}{2}}{\left[(1+p) - \sqrt{2 \sqrt{p^2 + k^2} \cos \frac{\varrho}{2}} \right]^2 + \sin^2 \frac{\varrho}{2}} \quad (12)$$

wobei die Bedeutung der verschiedenen Grössen die folgende ist:

p = Abweichung des Glanzwinkels Θ vom Grenzganzwinkel Θ_0 , gemessen an Θ_0 .

$$k = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\lambda}{\Theta_0^2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\lambda}{2\delta} ; \operatorname{tg} \varrho = - \frac{k}{p} .$$

Natürlich ist der Ausdruck (12) wegen den vielen notwendigen Näherungen nur für ganz kleine Werte von p gültig.

Der Ausdruck (12) ist in der Tat immer kleiner als 1. Denn aus (9) sieht man, dass $i \cdot k$ immer mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen ist, d. h. der Winkel ϱ liegt immer zwischen π und 2π , also $\frac{\varrho}{2}$ immer zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π . Da der \cos von $\frac{\varrho}{2}$ immer negativ, und der \sin immer positiv ist, wird der Zähler immer kleiner als der Nenner.

Wenn keine Absorption da ist, also $k = 0$, ergibt sich wirklich eine ganz scharfe Reflexionsgrenze für $p = 0$. Für $p \leq 0$ ist der Ausdruck konstant gleich 1, fällt bei $p = +0$ plötzlich sehr stark ab und erreicht für sehr grosse Werte von p den Wert Null. Der Intensitätsverlauf für verschiedene Werte von k ist in der Figur 1 aufgetragen. Wie man sieht, geht der plötzliche Intensitätsabfall, wie er für $k = 0$ existiert, schon für sehr kleine Werte von k in einen merkbar flacheren über. Man ersieht ferner,

dass der Hauptabfall nach negativen Werten von p verschoben wird. Man wird also aus den Aufnahmen immer einen zu kleinen Wert von Θ_0 erhalten.

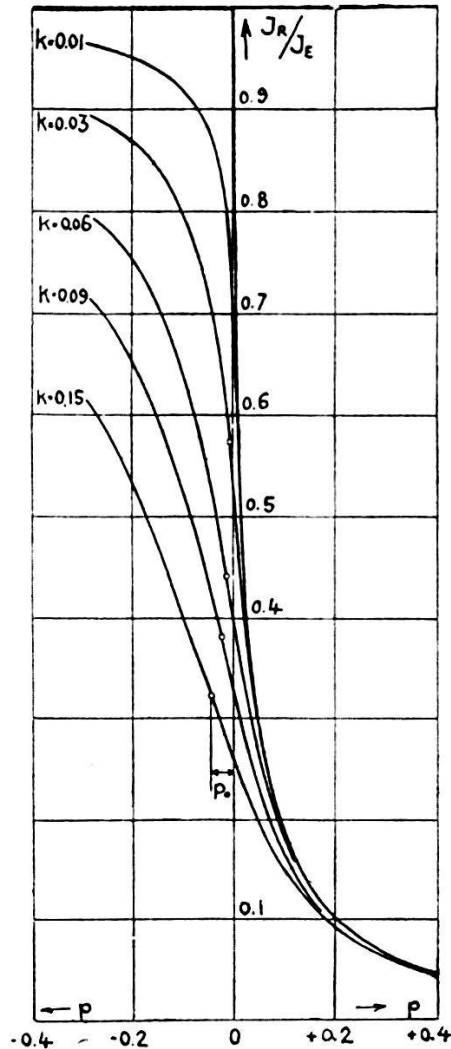


Fig. 1.

Intensität der reflektierten Strahlung für verschiedene Werte von $k \sim \lambda \frac{\mu}{\delta}$, als Funktion der Abweichung des Glanzwinkels vom Grenzganzwinkel Θ_0 .

Hat man Aufnahmen, die nur so stark belichtet sind, dass man die Schwärzung proportional der aufgefallenen Intensität setzen kann, so kann man aus den photometrierten Schwärzungskurven im Vergleich mit den in Figur 1 enthaltenen Kurven direkt die Stelle von Θ_0 ($p = 0$) angeben, nachdem man durch eine erste Annäherung das Θ_0 provisorisch bestimmt hat, um den zugehörigen Wert von k zu berechnen.

Hat man keine solchen Kurven zur Verfügung, so kann man die Korrektur für das sehr angenähert bestimmte Θ_0 wie folgt

anbringen. Misst man die Platte direkt aus, so stellt das Auge als Ende der Schwärzung von selbst den Punkt des steilsten Abfalles fest, d. h. also den Ort der Wendetangente in der Schwärzungskurve. Dieser Wendepunkt fällt nun aber nicht mit $p = 0$ zusammen, sondern liegt mit wachsendem k bei immer kleineren Werten. In der Figur 1 ist für jede Kurve $k = \text{konst.}$ der Wendepunkt eingezeichnet und man braucht also für ein bestimmtes k nur in der Fig. 1 die Verschiebung des Wendepunktes gegenüber $p = 0$ zu bestimmen, um daraus die prozentuale Änderung des erst genähert bestimmten Θ_0 zu berechnen. Um das Verfahren

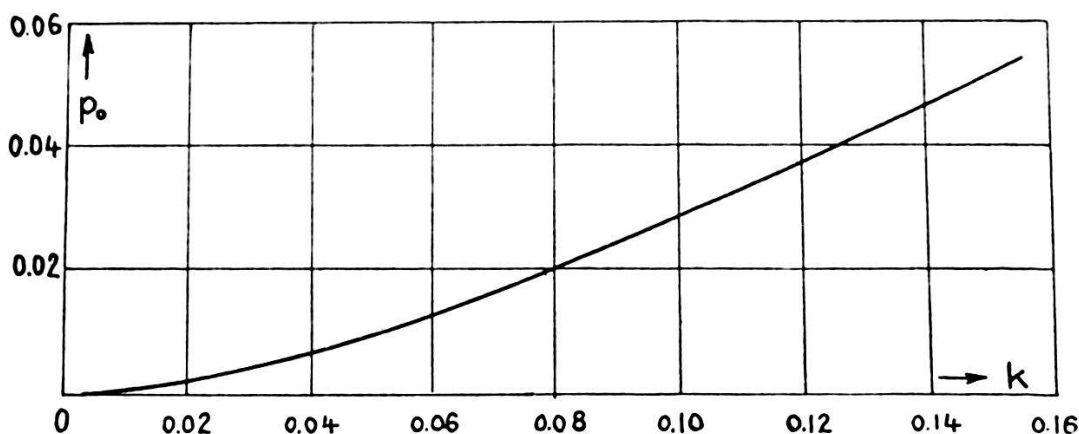


Fig. 2

Verschiebung der Schwärzungsgrenze als Funktion von $k \sim \lambda \frac{\mu}{\delta}$

etwas zu vereinfachen, sind in Figur 2 diese Verschiebungen p_0 als Funktion von k aufgetragen.

Alle Werte von Θ_0 , die bei den nachfolgenden Untersuchungen angegeben sind, wurden in bezug auf diese Absorptionsverschiebung korrigiert. Es zeigt sich, dass durch diese Korrektur der Charakter des Verlaufes von $1 - n$ nicht verändert wird.

4. Die Apparatur zur Bestimmung des Grenzwinkels der Totalreflexion.

Der Apparat ist nach dem Prinzip gebaut, dass an jedem Material, aus dem man überhaupt einen Spiegel herstellen kann, mit jeder Wellenlänge gemessen werden kann. (Ausgenommen so lange Wellen, für welche die ganze Anordnung im Vakuum sein müsste.) Fig. 3 und 4. Das weisse Röntgenlicht der Antikathode passiert zwei schmale Spalte S und wird an einem Kristall zur Reflexion gebracht. Das monochromatische Röntgenlicht geht nun durch die Drehachse eines Spiegels, der dasselbe unter einer Winkelablenkung von 2Θ gegenüber der einfallenden Rich-

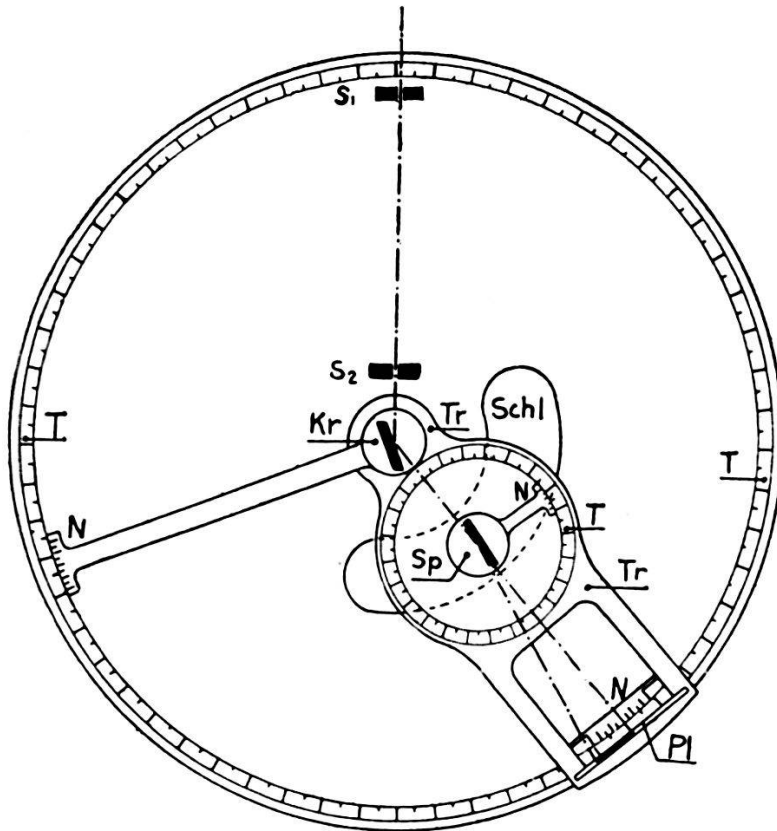


Fig. 3.

S_1, S_2 = Bleispalte, Kr = Kristallträger mit Kristall, Tr = Trägerarm
 Sp = Spiegelträger mit Spiegel, $Schl$ = Schlitz in der Grundplatte für die,
 Bewegung von Sp , Pl = Phot. Platte, T = Kreisteilungen, N = Ablesenonien.

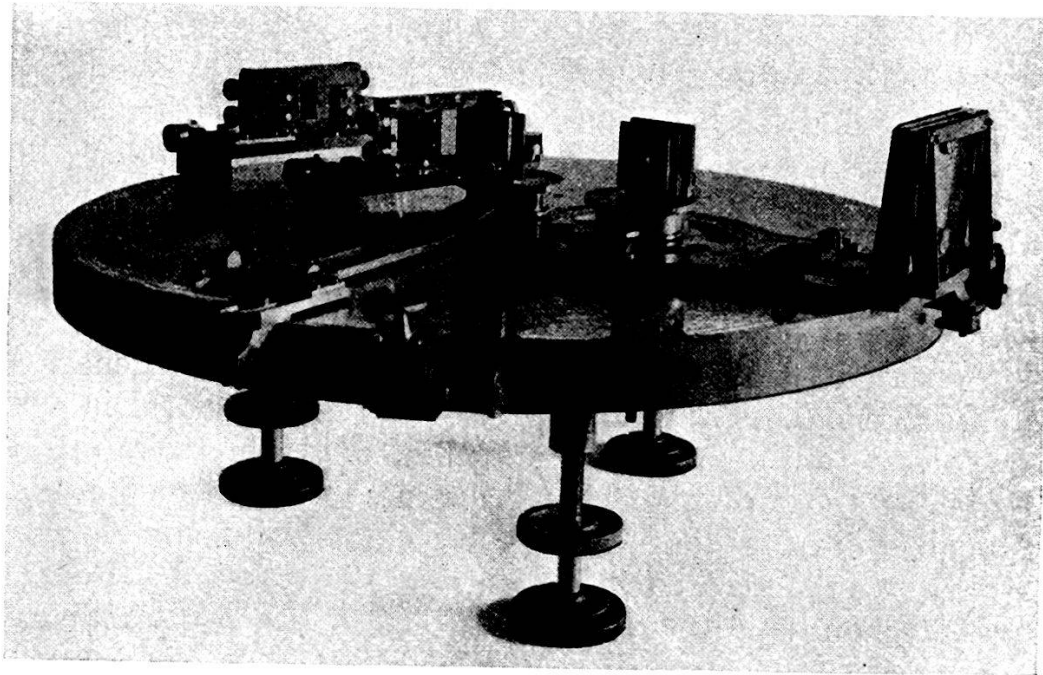


Fig. 4.

Ansicht des ganzen Apparates.

tung auf die photographische Platte wirft. Die ganze Anordnung befindet sich auf einer kreisrunden Platte von 40 cm Durchmesser, in deren Zentrum sich die Drehachsen für den Kristallträger wie auch für den sog. Trägerarm, der seinerseits Spiegelträger und Platte trägt, befinden. Als Material für diese Platte wurde aus verschiedenen Gründen (Gewicht, Bearbeitung, Unveränderlichkeit der bearbeiteten, blanken Oberfläche) Magnalium gewählt. Damit während dem Betrieb keine Verbiegungen auftreten und die Dicke der Platte doch nicht zu gross genommen werden musste, ist auf der Unterseite ein System von Versteifungsrippen vorhanden. Für das Achslager wurde eine Büchse aus Bronze eingesetzt. An der Peripherie befindet sich eine Präzisionsteilung *T* in Silber, auf der mittelst Nonien die Stellung von Kristall und Trägerarm abgelesen, bzw. eingestellt werden können. Der Trägerarm trägt im Abstand von 7 cm vom Hauptdrehzentrum ein Achslager, in welchem der Spiegelträger gelagert ist. Die Stellung des Spiegelträgers kann an einer auf dem Trägerarm angebrachten Kreisteilung ebenfalls abgelesen, bzw. eingestellt werden. Kristall und Spiegel sitzen auf genau gleich gebauten Drehachsen, die oben kegelförmig und im untern Teil zylindrisch sind, um eine äusserst genaue Führung, auch nach langem Gebrauch, zu gewährleisten. Diese Drehachsen tragen oben eine an drei Schrauben verstellbare Platte, auf welchen Kristall und Spiegel aufgekittet werden. Am äussern Ende trägt der Trägerarm den Halter für die Kassette, in welcher Platten vom Format $4,5 \times 6$ cm verwendet werden. Alle Einstellschrauben haben Gegendruckfedern und tragen auf dem Kopf eine Teilung, die einer Bewegung der Schraube von $\frac{1}{100}$ mm entspricht.

Die beiden Spalte sind so gebaut, dass der zweiteilige Bleispalt, von dem jeder Teil durch zwei Schrauben eingestellt werden kann, vom eigentlichen Träger leicht weggenommen werden können, ohne dass an einem der beiden Teile etwas verändert wird. So kann unter dem Mikroskop mit dem Mikrometer jeder Spalt genau parallel und auf eine bestimmte Breite genau eingestellt und nachher auf dem Träger befestigt werden. Die Spaltträger selbst sind als Schlitten ausgebildet, die ihrerseits um eine horizontale Achse drehbar sind. Auf diese Weise ist es möglich, die Spalte, die für die Versuche auf eine Breite von 0,05 mm eingestellt wurden, so zu justieren, dass die Achse des Röntgenbündels genau durch die Hauptdrehachse des Apparates geht. Diese wurde mit einer speziell konstruierten Vorrichtung, die an Stelle des Kristalls auf der Drehachse befestigt war, kontrolliert. Dann wurde der Trägerarm mitsamt dem Spiegel in

die direkte Primärstrahlrichtung eingestellt, und wenn das erreicht war, so konnte der Spiegel in seiner Lage noch so korrigiert werden, dass er mit seiner Fläche genau in der Drehachse lag. Erst jetzt wurde der Kristall eingesetzt und ebenso wie der Spiegel mit seiner Oberfläche genau in die Drehachse eingestellt.

Nach der Bestimmung der Nullagen von Kristall und Trägerarm konnte für jede gewünschte Wellenlänge die Einstellung der beiden mit Hilfe der Präzisionsteilung ohne Zeitaufwand gemacht werden. Trotzdem wurde selbstverständlich jedesmal eine Kontrollaufnahme gemacht. Als Röntgenröhre wurde eine Haddingröhre verwendet, die besonders wegen der leichten Auswechselbarkeit der mit einem Schliff eingesetzten Antikathode und auch wegen der leicht zu erreichenden Konstanz der Betriebsspannung am geeignetsten war. Die ganze Apparatur, mit Ausnahme der 40 cm Präzisions-Kreisteilung¹⁾, sowie die Röhre mit den verschiedenen Antikathoden wurden in der mechanischen Werkstätte des Instituts hergestellt.

Da der Spiegel während der Aufnahme ständig in Bewegung ist, muss natürlich der Kristall ruhend sein; denn sonst hätte man nur in denjenigen Momenten, wo beide Systeme gleichzeitig in richtiger Stellung sind, monochromatisches und gespiegeltes Röntgenlicht. Dies erfordert einen äusserst gut gebauten Kristall, der bei ruhender Stellung ganz scharfe Spektrallinien gibt. Ein solches Stück wurde in einem Kalkspatkristall gefunden, dessen Gitterkonstante von $3,02904 \text{ \AA}$ auch für das gesamte Wellenlängengebiet von $0,5\text{--}2,3 \text{ \AA}$ günstig ist.

Um einwandfreie Resultate zu bekommen, müssen die verwendeten Spiegel eine absolut reine Oberfläche besitzen, die nicht durch das Vorhandensein irgendwelcher Reste von Poliermitteln verunreinigt sein darf. Diese Verunreinigungen, die durch keine Reinigungsprozesse weggebracht werden können, haben nämlich zur Folge, dass die Schärfe der Reflexionsgrenze ganz erheblich vermindert wird und der Schwärzungsabfall ziemlich kontinuierlich verläuft. Solche ganz reine Metallspiegel wurden durch Kathodenzerstäubung des betreffenden Materials in beliebiger Schichtdicke erhalten.

Die Grenzstellungen des Spiegels für die Totalreflexion wurden durch Aufnahmen mit stillstehendem Spiegel in Winkelabständen von 5 zu 5 Minuten angenähert bestimmt. Während der ganzen Dauer der Aufnahme wurde der Spiegel mit gleichmässiger Winkelgeschwindigkeit um diese Grenzlage hin und her

¹⁾ Diese wurden mit höchster Genauigkeit von der Firma Kern & Co. in Aarau hergestellt.

bewegt. Diese gleichmässige Winkelgeschwindigkeit, ausgenommen natürlich an den Umkehrpunkten, wurde durch Verwendung je einer halben Umdrehung einer Links- und einer Rechtsspirale von gleicher Ganghöhe erzielt.

5. Fehler der Apparatur und der Justierung.

Wie die jeweiligen Kontrollaufnahmen gezeigt haben, war die Justierung der beiden Spalte und des Kristalls so genau, dass ein Fehler nicht nachgewiesen werden konnte. Wenn hier trotzdem ein kleiner Fehler vorhanden wäre, so würde sich dieser gar nicht auswirken, da nur die Stellung des Trägerarms jeweils so geändert werden müsste, dass das monochromatische Licht durch die Drehachse des Spiegels geht. Die natürliche Krümmung der Spektrallinie, hervorgerufen durch punktförmigen Brennfleck und ebenen Kristall, hat eine Krümmung des ganzen Schwärzungstreifens auf der Platte zur Folge. Die Abweichungen von einer Geraden sind aber für die herrschenden Verhältnisse, wie Berechnungen gezeigt haben, so gering, dass sie bei der Ausmessung der Platten ohne weiteres vernachlässigt werden können.

Die einzige Fehlerquelle, die in Betracht gezogen werden muss, ist die, dass die Oberfläche des Spiegels nicht ganz genau mit der Drehachse des Spiegelträgers zusammenfällt. Dieser Fehler hat eine Veränderung des wirksamen Abstandes von Spiegel bis Platte zur Folge; der Abstand wird eine Funktion des Grenzwinkels Θ_0 . Dieses Zurückstehen (oder Vorstehen) des Spiegels hinter der Drehachse kann aber, wie gezeigt werden soll, leicht bestimmt und aus den Messungen eliminiert werden. Ein weiterer Fehler, der den wirksamen Abstand zwischen Spiegel und Platte verändern kann, ist eine allfällige Exzentrizität des monochromatischen Röntgenbündels gegenüber der Spiegeldrehachse. Dieser Fehler könnte zugleich mit dem erstgenannten bestimmt werden, eliminiert sich aber aus den Aufnahmen automatisch, weil diese in zwei zur Primärstrahlrichtung symmetrischen Stellungen des Spiegels gemacht werden.

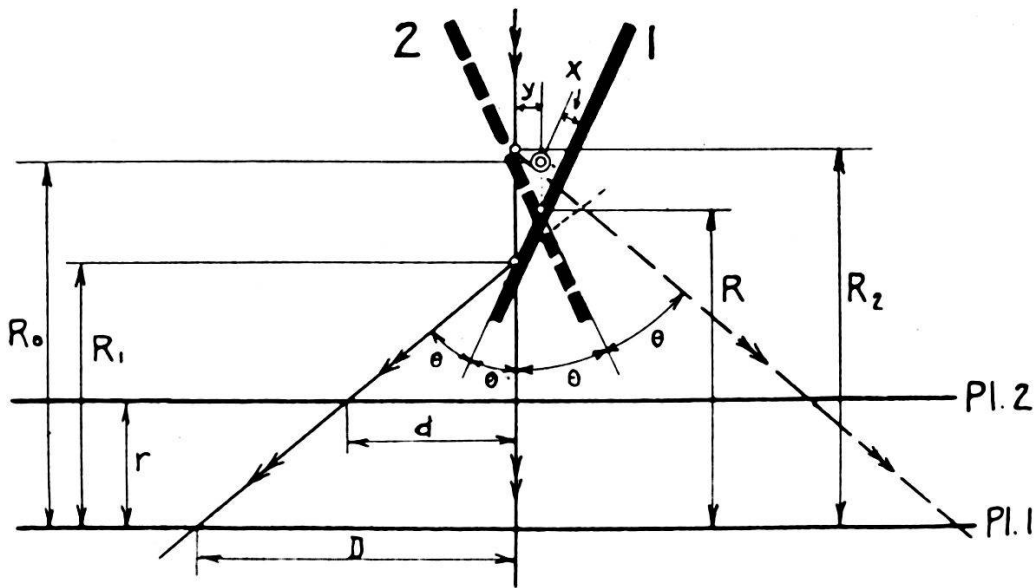
Setzt man, was wegen der Kleinheit der Winkel Θ ohne weiteres gestattet ist,

$$\sin \Theta = \tan \Theta = \frac{1}{2} \tan (2 \Theta) ,$$

so gelten nach Fig. 5 folgende Beziehungen:

$$\text{für die Spiegelstellung 1, } R_0 = \frac{r}{D-d} [D + 2(x + y)] , \quad (13)$$

$$\text{für die Spiegelstellung 2, } R_0 = \frac{r}{D-d} [D + 2(x - y)] . \quad (14)$$



Figur 5.

- x = Zurückstellung der Spiegeloberfläche gegenüber der Spiegeldrehachse.
 y = Exzentrizität des monochromatischen Röntgenbündels gegenüber der Spiegeldrehachse.
 R_0 = Abstand der Spiegeldrehachse von der Platte 1.
 R_1 = wirksamer Abstand in der Spiegelstellung 1.
 R_2 = wirksamer Abstand in der zu 1 symmetrischen Spiegelstellung 2.
 $R = \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$.
 r = Abstand der Hilfsplatte 2 von der Platte 1.
 D = Abstand der gespiegelten Linie von der primären auf der Platte 1.
 d = do. do. auf der Hilfsplatte 2.

Macht man Aufnahmen bei stillstehendem Spiegel auf zwei Platten, die hintereinander stehen, so erhält man auf den beiden Platten scharfe Linien in den beiden zusammengehörigen Abständen D bzw. d von der Linie, die durch das direkte Strahlenbündel hervorgerufen wird. Macht man auf dieselben Platten Aufnahmen bei verschiedenen Spiegelstellungen sowohl in Lage 1 und 2, so erhält man ein System von zusammengehörigen Werten D und d .

Aus den Gleichungen (13) und (14) ist zu ersehen, dass man x und y gleichzeitig eliminieren kann durch Kombination von zwei Messungen in der Spiegellage 1 oder 2, und man erhält

$$R_0 = \frac{r (D_i - D_k)}{(D_i - D_k) - (d_i - d_k)} \quad (15)$$

wobei die Indizes i und k so zu verstehen sind, dass zwei Linien von zwei Spiegelstellungen der gleichen Seite zu nehmen sind. R_0 kann man zwar ebensogut auf direktem Wege bestimmen; es dient diese Berechnung nur zur Kontrolle dafür, dass die Platten

richtig ausgemessen und das daraus bestimmte x richtig ist. Für x folgt aus (13) und (14)

$$4x = \frac{R_0}{r} \left[(D_i + D_k) - (d_i + d_k) \right] - (D_i + D_k) \quad (16)$$

wobei nun die i und k so zu wählen sind, dass sie zwei Linien von entgegengesetzten Spiegelstellungen entsprechen.

Solche Kontrollaufnahmen mit einer Zwischenplatte, deren Abstand von der Hauptplatte direkt gut bestimmt werden kann, werden zweckmässig nach der Justierung des Spiegels als auch nach Beendigung der Messungen mit dem betreffenden Spiegel vorgenommen, um eine eventuelle Verschiebung infolge sich ausgleichender Spannungen in der Zwischenzeit festzustellen. Es ergab sich bei allen gemessenen Spiegeln, dass x von der Grössenordnung $\pm 1 - 2 \cdot 10^{-3}$ cm betrug, sich aber während der ganzen Dauer der Messung nicht veränderte. Da die Linienabstände auf den Platten nicht genauer als auf 10^{-3} cm bestimmt werden können, müssen natürlich eine Anzahl solcher Linienaufnahmen mit zwei Platten hergestellt werden, aus denen dann das x durch Mittelbildung bestimmt wird. Dieses Vor- oder Zurückstehen des Spiegels hat eine Veränderung des wirksamen Abstandes zur Folge, der nun eine Funktion dieser Verschiebung x und des Grenzwinkels Θ_0 wird. Geht man wieder von der Vereinfachung $\sin \Theta = \operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} (2 \Theta)$ aus, so erhält man für ΔR , wenn man setzt $R = R_0 - \Delta R$, den Ausdruck

$$\Delta R = \frac{2x R_0}{z + 2x} \quad (17)$$

wobei ein positives x eine Verkürzung von R_0 zur Folge hat, und $z = R \cdot \operatorname{tg} (2 \Theta_0)$ die halbe Schwärzungsbreite auf der Platte, korrigiert um die halbe Breite des primären Röntgenbündels bedeutet. Aus der halben Schwärzungsbreite z berechnet sich

$$\operatorname{tg} (2 \Theta_0) = \frac{z}{R}$$

und da

$$\delta = \frac{\sin^2 \Theta_0}{2}$$

ergibt sich

$$\delta = \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{R} \right]}{2} \quad (18)$$

Setzt man auch hier wiederum $\sin \Theta = \operatorname{tg} \Theta = \Theta$, so erhält man die einfache Formel

$$\delta = \frac{z^2}{8 R^2} \quad (19)$$

Diese Vereinfachung macht bei einem z von 2 mm einen Fehler für δ von $1 \cdot 10^{-7}$ aus.

Da z auf 10^{-3} cm gemessen werden kann und R von der Größenordnung 10 ist ($R_0 = 13,251$ cm), so sieht man, dass die Genauigkeit von δ leicht auf 10^{-7} zu erreichen ist nach dieser Methode.

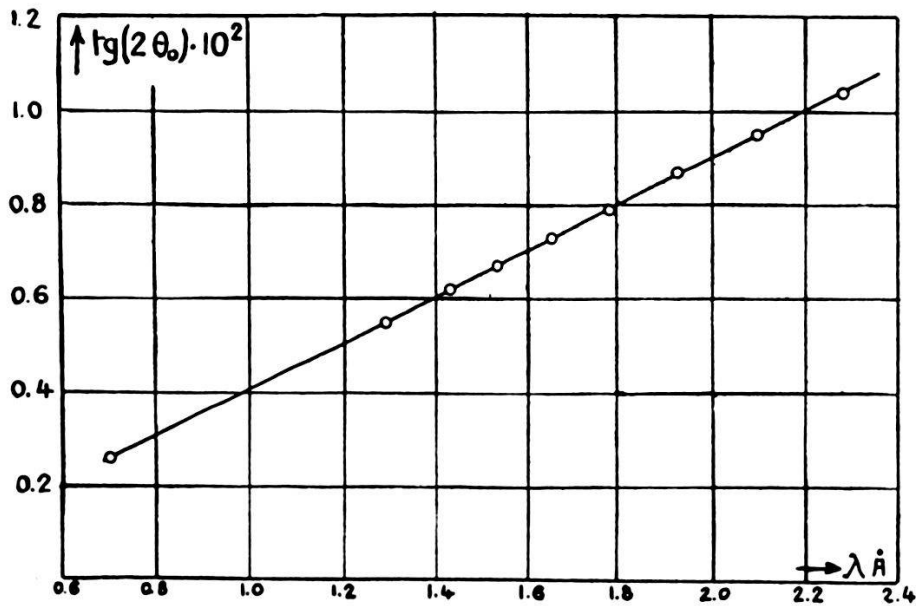
6. Messungen an Glas.

Um sicher zu sein, dass bei den Versuchen mit Metallspiegeln, die auf Glas durch Kathodenzerstäubung erhalten wurden, der Effekt wirklich vom Metallbelag und nicht vom Glasträger herührt, wurde erst die Dispersionskurve an dem zur Verwendung kommenden Glas (sog. Spiegelglas) genau gemessen. Zwischen 0,7 und 2,3 Å wurde für 9 Wellenlängen der Grenzwinkel der Totalreflexion bestimmt und es ergaben sich dafür die Werte der Tabelle 1.

Tabelle 1.

	λ Å	$10^2 \operatorname{tg} (2 \Theta_0)$		Θ_0	$\delta \cdot 10^6$
		gemessen	berechnet a. d. Gleichg. d. Gerad.		
Mo Ka	0,70783	0,26	0,25	4' 18"	0,85
Zn K β	1,29250	0,55	0,55	9' 27"	4,06
Zn Ka	1,43205	0,62	0,62	10' 39"	4,81
CuKa	1,53736	0,67	0,67	11' 31"	5,61
Ni Ka	1,65467	0,73	0,73	12' 31"	6,66
Co Ka	1,78578	0,79	0,79	13' 40"	7,80
Fe Ka	1,93239	0,87	0,87	14' 57"	9,46
Mn Ka	2,09777	0,95	0,95	16' 20"	11,30
Cr Ka	2,28517	1,04	1,04	17' 53"	13,53

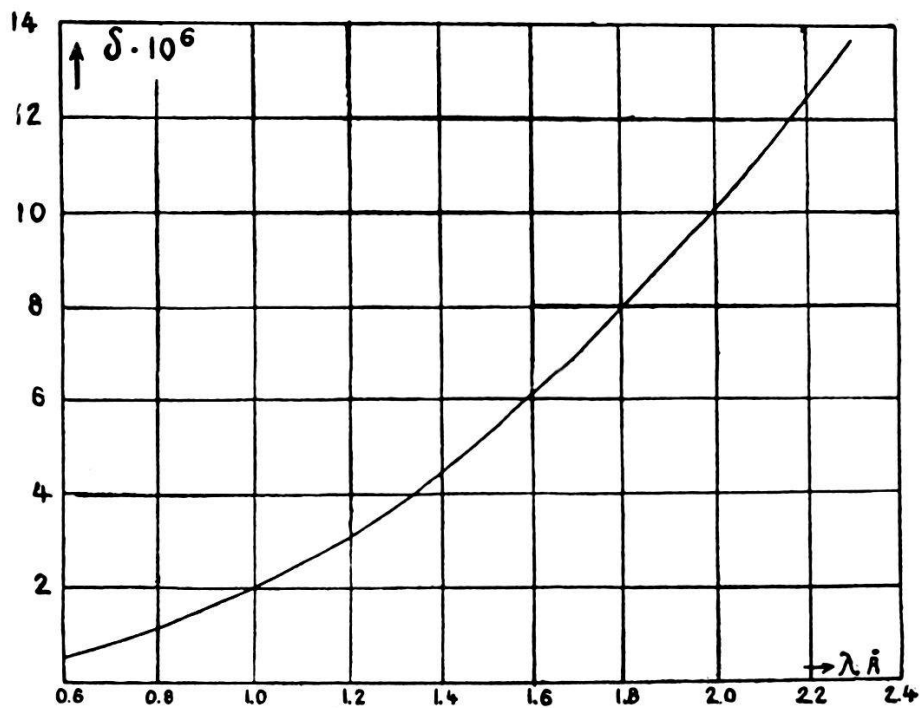
Man sieht, dass der Brechungsexponent sehr stark von der Wellenlänge abhängt; er verändert sich innerhalb des erreichbaren Wellengebietes um das 20-fache. Auf der kurzwelligen Seite ist die Grenze mit ca. 0,5 Å dadurch gegeben, dass, um die charakteristische Strahlung zu erhalten, die angelegte Röhrenspannung zu hoch wäre. Nach der langwelligen Seite hin ist durch die starke Absorption in der Luft bei 2,3 Å die natürliche Grenze gegeben.



Figur 6.

Verlauf von tg des Grenzganzwinkels für Totalreflexion an Glas.

Trägt man $\text{tg } 2\theta_0$ als Funktion der Wellenlänge auf, so sieht man, dass die Punkte fast ganz genau auf einer Geraden liegen. (Figur 6.) Das stimmt überein mit der Formel von LORENTZ, die ja verlangt, dass $\delta = 1 - n$ proportional ist zu $1/\nu^2$, oder proportional zu λ^2 . Also ist auch $\sin \theta_0 = \sqrt{2\delta}$ proportional zu λ ,



Figur 7.

Dispersionskurve von Glas.

und wegen der Kleinheit der Winkel Θ_0 auch $\text{tg}(2\Theta_0)$ proportional zu λ .

Legt man durch diese Punkte eine Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man die Gleichung:

$$10^2 \cdot \text{tg}(2\Theta_0) = 0,500 \lambda - 0,096 \pm 0,004.$$

Da die quantitative Zusammensetzung der Glassorte nicht bekannt ist, kann eine quantitative Prüfung mit der LORENTZ'schen Formel nicht stattfinden. Man sieht aber aus dem mittleren wahrscheinlichen Fehler, dass sich mit dieser Methode der Brechungsexponent als Funktion der Wellenlänge äusserst genau bestimmen lässt.

Der Vollständigkeit halber ist neben der graphischen Darstellung des Verlaufes von $\text{tg}(2\Theta_0)$ auch noch der Verlauf von δ graphisch dargestellt. (Figur 7.)

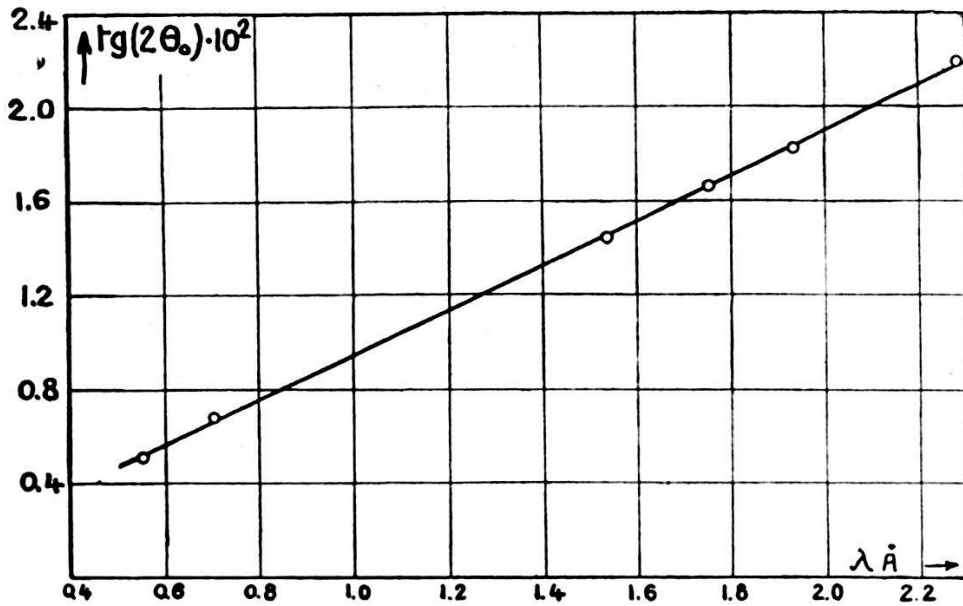
7. Messungen an Silber.

Als zweites Material für die Messungen wurde deshalb Silber gewählt, weil man einen Silberspiegel sehr gut durch Kathodenzerstäubung erhalten kann und weil die K-Absorptionsgrenze für Silber an der untern Grenze der erreichbaren Wellenlängen liegt. Man kann also an diesem Material den Verlauf der normalen Dispersion bestimmen und sehen, wie diese Werte mit den von der LORENTZ'schen Theorie gelieferten übereinstimmen. Die Messungen wurden mit fünf verschiedenen Wellenlängen im Gebiet von 0,5—2,3 Å ausgeführt und ergaben die in der Tabelle 2 enthaltenen Resultate.

Tabelle 2.

	λ Å	$10^2 \cdot \text{tg}(2\Theta_0)$		Θ_0
		gemessen	aus der Glchg. der Geraden	
Ag Ka	0,55823	0,52	0,52	8' 56''
Mo Ka	0,70783	0,69 ¹⁾	0,67	11' 31''
Cu Ka	1,53736	1,46	1,46	25' 6''
Fe K β	1,75272	1,67	1,67	28' 42''
Fe Ka	1,93239	1,82	1,83	31' 27''
Cr Ka	2,28517	2,19	2,18	37' 28''

¹⁾ Der Wert für Mo Ka wurde von BERGEN DAVIS und C. M. SLACK, Phys. Rev. **27**, 796, 1926, mit Prisma bestimmt. Wie man sieht, reht sich dieser Wert den hier gemessenen sehr gut ein.



Figur 8.

Verlauf von tg des Grenzganzwinkels für Totalreflexion an *Silber*.

Trägt man $\text{tg } 2\theta_0$ als Funktion der Wellenlänge auf (Figur 8), so sieht man, dass die Punkte auch hier wiederum ziemlich genau auf einer Geraden liegen, deren Gleichung lautet:

$$10^2 \cdot \text{tg } 2\theta_0 = 0,957\lambda - 0,012 \pm 0,014.$$

In der Tabelle 2 ist neben den beobachteten Werten von $\text{tg } 2\theta_0$ auch noch der Wert angegeben, der aus der Gleichung der Geraden folgt, für diesen Wert ist auch der Winkel θ_0 angegeben.

Tabelle 3.

$\lambda \text{ \AA}$	$\delta_{\text{gem}} \cdot 10^6$	$\delta_{47} \cdot 10^6$	$\delta_{45} \cdot 10^6$	Anom.-Beitr. zu $\delta_{45} \cdot 10^6$	$\delta_{\text{anom}} \cdot 10^6$
0,55823	3,38	3,81	3,71	—0,50	3,21
0,70783	5,61	6,20	5,93	—0,46	5,47
1,53736	26,64	29,4	28,1	—0,1	28,0
1,75272	34,86	38,1	36,5	—0,1	36,4
1,93239	41,86	46,3	44,4	—0,1	44,3
2,28517	59,40	64,7	61,9	—0,1	61,8

In der Tabelle 3 sind die gemessenen und die nach der Formel von LORENTZ berechneten Werte von δ angegeben, und zwar bedeutet δ_{47} und δ_{45} , dass in der Formel

$$\delta = 1 - n = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2/m NZ}{\nu^2} \quad (20)$$

Z entweder gleich der Gesamtzahl der Elektronen des Atoms, gleich 47, oder der um die 2 K-Elektronen verminderten Elektronenzahl, gleich 45, bedeutet. Denn der ganze Messbereich befindet sich auf der langwelligen Seite der K-Absorptionskante, wo also diese beiden Elektronen noch nicht zu Eigenschwingungen angeregt werden können. In der zweitletzten Kolonne ist ausserdem die anomale Korrektur für die Mitwirkung der beiden K-Elektronen nach der Formel

$$\delta = 1 - n = \frac{1}{2\pi} e^2/m N \left[\frac{Z - K}{\nu^2} + \frac{K}{\nu^2 - \nu_k^2} \right] \quad (21)$$

angegeben, wobei das erste Glied das δ_{45} und das zweite Glied die anomale Korrektur bedeutet. Aus den beiden folgt das in

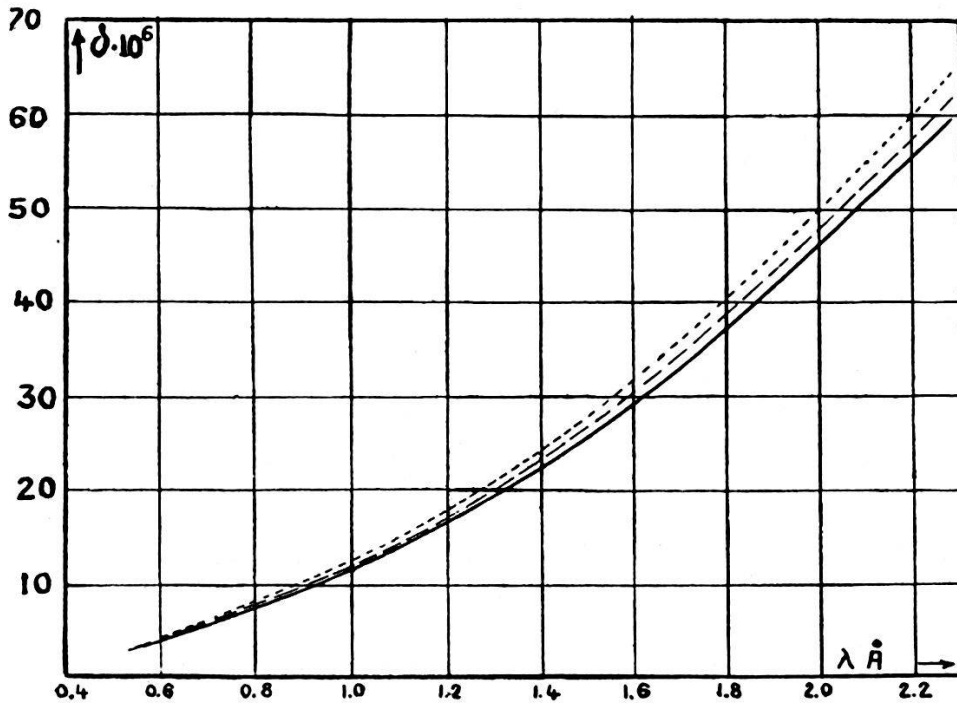


Fig. 9.

Dispersionskurven von Silber.

Berechnet nach der Formel von Lorentz mit $\begin{cases} 45 \text{ Elektronen} & \text{---} \\ 47 \text{ Elektronen} & \text{.....} \end{cases}$
 Gemessen —

der letzten Spalte angegebene δ_{anom} . δ_{gem} , δ_{47} und δ_{45} sind zur bessern Übersicht und Vergleichung graphisch aufgetragen. (Fig. 9.) Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass der anomale Beitrag die Werte von δ_{45} so wenig ändert, dass er in der graphischen Darstellung gar nicht zur Auswirkung kommt. Man kann also sagen, dass der ganze gemessene Bereich in das Gebiet der normalen Dispersion des Silbers fällt; denn die K-Linie von Silber ist von der

K-Kante noch so weit entfernt, dass die Differenz der Frequenzquadrate bereits einen so grossen Wert annimmt, dass das reziproke davon einen sehr kleinen Beitrag zur normalen Dispersion liefert. Ich will deshalb hier die neuere Theorie für die anomale Dispersion, wie sie von KALLMANN u. MARK¹⁾ gerechnet wurde, gar nicht heranziehen, sondern erst beim nächsten Material, dem Kupfer, wo die Absorptionskante mitten im gemessenen Bereich liegt.

Wie man aus der Figur 9 sieht, ist die Abweichung der gemessenen Kurve von der Kurve δ_{45} sehr klein. Man kann sich aber doch fragen, ob nicht in den Messungen noch ein Fehler vorliegen könnte, der bei seiner Berücksichtigung bewirken würde, dass die gemessene Kurve mit der theoretischen zusammenfällt. Da die Differenzen mit der Wellenlänge zunehmen, so kann nur ein Fehler in Frage kommen, der ebenfalls mit zunehmender Wellenlänge wächst. Es kann sich also hier nicht darum handeln, dass die Spiegelstellung gegenüber der Spiegeldrehachse nicht genau bestimmt wäre, denn ein solcher Fehler hat ja den umgekehrten Gang wie die hier auftretenden Differenzen. Dieses Vor- oder Zurückstehen des Spiegels macht sich hauptsächlich bei kleinen Winkeln θ_0 , also bei kurzen Wellen bemerkbar. Ein Fehler, der mit zunehmender Wellenlänge grösser wird, ist die in Abschnitt 3 besprochene Absorptionskorrektur. Da der Absorptionskoeffizient mit der dritten Potenz der Wellenlänge, δ aber nur mit dem Quadrat der Wellenlänge zunimmt, so folgt, dass k proportional mit der Wellenlänge wächst. Das würde also in unserem Falle heissen, dass die in Abschnitt 3 berechnete und in den Figuren 1 und 2 dargestellte Korrektur ein wenig zu klein ist. Das könnte daher kommen, weil für die Ableitung der Formel, um die Sache zum Schluss überhaupt noch auswertbar zu machen, so viele Annäherungen gemacht werden mussten.

Aus dem Vergleich der gemessenen und berechneten Kurve scheint es wohl berechtigt zu sein, zu sagen, dass die Formel von LORENTZ auch für Röntgenstrahlen den Verlauf des Brechungsexponenten richtig wiedergibt, mit der vorläufigen Beschränkung, dass man sich nicht im Gebiet einer Absorptionskante befindet.

8. Messungen an Kupfer.

Um den Verlauf des Brechungsexponenten im Gebiete einer Absorptionskante zu verfolgen, was im sichtbaren Gebiet ungefähr der Umgebung einer Absorptionslinie entspricht, wurde

¹⁾ KALLMANN u. MARK, Ann. d. Ph. **82**, 585, 1927.

Kupfer gewählt. Die K-Kante von Kupfer liegt bei einer Wellenlänge von $1,3785 \text{ \AA}$, also mitten in dem für die Messungen zugänglichen Wellenlängenbereich. Man kann deshalb hier den Verlauf auf der kurzwelligen wie auf der langwelligen Seite der Kante auf ein ziemlich grosses Gebiet verfolgen mit Hilfe von vielen, verhältnismässig eng beieinander liegenden Messpunkten. Man ist dadurch vor einer zu weit gehenden Extrapolation der Messergebnisse geschützt und wird nicht versucht sein, durch drei Punkte, die mehr oder weniger zufällig und mehr oder weniger genau auf der theoretisch berechneten Kurve liegen, die theoretisch gegebene Kurve als richtig anzusehen, wie es Doan in einer kürzlich erschienenen Arbeit getan hat.¹⁾

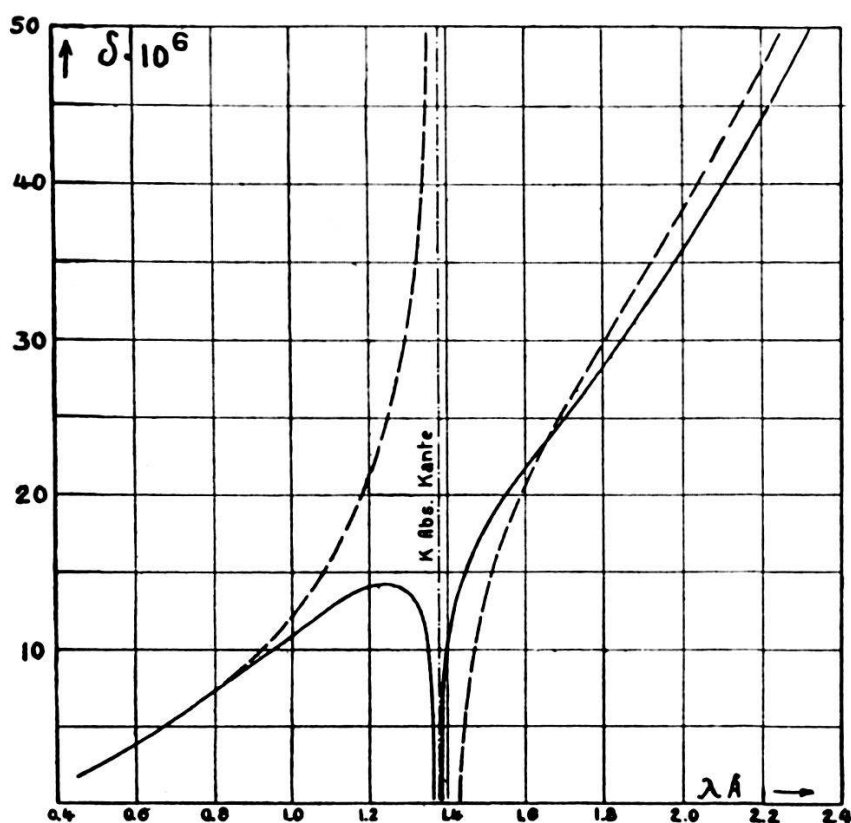
Der Kupferspiegel wurde auf einer sehr sorgfältig gereinigten Glasplatte durch Kathodenzerstäubung hergestellt. Man erhält bei einer angelegten Spannung von ca. 10000 Volt und einer Stromstärke von 5 mAmp. in kurzer Zeit einen vollkommen fehlerfreien, undurchsichtigen, hochglänzenden Kupferbelag, der sein Aussehen auch nach mehreren Wochen gar nicht veränderte.

Auf der kurzwelligen Seite der Kante wurden fünf Messungen ausgeführt von $0,5583 \text{ \AA}$ (AgK α) bis zu $1,3483 \text{ \AA}$ (JrLa $_1$), auf der langwelligen Seite sieben Messungen von $1,3888 \text{ \AA}$ (CuK β) bis zu $2,2852 \text{ \AA}$ (CrK α). Die Wellenlängendifferenz zwischen der Kante und der am nächsten auf der kurzwelligen Seite gelegenen Messung beträgt also 30 X-Einheiten, auf der langwelligen Seite 10 X-Einheiten.

Da die Formel von LORENTZ im Gebiete normaler Dispersion den Verlauf des Brechungsexponenten, wie die Messungen an Silber zeigen, richtig ergibt, so könnte man denken, dass diese Formel auch für den Verlauf im Gebiete einer Absorptionskante ein richtiges Bild ergibt. Eine Absorptionskante im Röntgengebiet lässt sich nun allerdings nicht direkt mit einer Absorptionslinie im sichtbaren Gebiet vergleichen; denn während im letzteren Fall die Lage der Absorptionslinie zusammenfällt mit der Lage der Emissionslinie desselben Materials, und nach beiden Seiten scharf begrenzt ist, fällt die Absorptionskante nicht mit einer Emissionslinie zusammen, sondern liegt etwas nach kürzeren Wellen verschoben gegenüber der kurzwelligsten Linie der betreffenden Serie. Überdies ist die Absorption nicht nur für diese Stelle grösser als auf der langwelligen Seite, sondern diese erhöhte Absorption nimmt erst allmählich in ganz normalem Verlauf wieder ab. Nimmt man aber trotzdem an, dass man die Frequenz

¹⁾ R. L. DOAN, Phil. Mag. **20**, 100, 1927.

der Absorptionslinie im Röntgengebiet ersetzen kann durch die Frequenz der Absorptionskante, so ist man sich dessen bewusst, etwas getan zu haben, was sicher nicht dem wirklichen Vorgang entspricht. Man wird deshalb nicht so sehr enttäuscht sein, wenn das Resultat dieser Extrapolation nicht genau übereinstimmt mit dem, was in Wirklichkeit vorhanden ist. Berechnet man nach dieser Annahme, indem man zugleich die Zahl dieser Absorptionselektronen gleich der Zahl der in dieser Schale vorhandenen Elektronen setzt, im Falle der K-Schale also zwei, so erhält man nach



Figur 10.

Dispersionskurven von *Kupfer*. --- nach der Formel von Lorentz. — nach der Formel von Kallmann und Mark.

der Formel (21) einen Verlauf, wie er in Figur 10 dargestellt ist für den Fall von Kupfer. Der Verlauf von δ ist so: In grosser Entfernung von der langwelligen Seite der Kante verläuft der Brechungsexponent proportional zu λ^2 , um dann, bei einem Frequenzverhältnis ν/ν_k von ca. 0,8 anfangend, stark zu sinken und in der Kante selbst $-\infty$ wird. In der Kante wechselt er das Vorzeichen und beginnt nun auf der kurzwelligen Seite der Kante ziemlich rasch von $+\infty$ abzufallen, um dann von einem Frequenzverhältnis ν/ν_k von ca. 1,7 an wieder normal zu verlaufen. Dieser

Teil des normalen Verlaufs auf der kurzwelligen Seite der Kante ist nun aber nicht die direkte Verlängerung des normalen Verlaufs auf der langwelligen Seite, sondern gegenüber diesem etwas erhöht. Nach dem Verlauf der Kurve zu schliessen, sollte man schon in ziemlicher Entfernung von der Kante beidseitig eine starke Veränderung des normalen Verlaufes feststellen können.

HJALMAR¹⁾ glaubt auf Grund der mit verschiedenen Wellenlängen gemessenen Abweichungen von der BRAGG'schen Beziehung für höhere Reflexionsordnungen an Gips eine Andeutung dieses anomalen Verlaufes des Brechungsexponenten in der Nähe einer Absorptionskante gefunden zu haben.

W. EHRENBERG u. H. MARK haben in der schon zitierten Arbeit¹⁾ nach der Methode der Spektrallinienverbreiterung diesen anomalen Effekt nachzuweisen versucht und haben gefunden, dass in einem Abstand von nur 0,8 X-Einheiten auf der kurzwelligen Seite von der Kante keine Spur von dem nach der Theorie verlangten enorm grossen δ gefunden. Dies hätte auch sichtbar sein müssen, wenn man nicht daran festhält, die ursprünglichen Frequenzbreiten aller Linien der W L-Serie als gleich anzunehmen. Dass dies mit der LORENTZ'schen Theorie in so starkem Widerspruch stand, konnte nur so erklärt werden, dass es vollkommen unzulässig ist, die Absorptionskante als Analogon zu einer Absorptionslinie zu betrachten.

Ausgehend von Vergleichen über die Absorptionsverhältnisse im sichtbaren und im Röntgengebiet haben KALLMANN u. MARK¹⁾ eine Theorie der anomalen Dispersion ausgearbeitet, bei der sie von der Voraussetzung ausgegangen sind, dass an Stelle eines oder mehreren in Resonanzschwingung versetzten Elektronen eine grosse Zahl kontinuierlich verteilter Ersatzoszillatoren vorhanden sei. Die stetige Verteilung dieser Oszillatoren beginnt an der K-Kante und ist so berechnet, dass der Verlauf des Absorptionskoeffizienten richtig wiedergegeben wird. Unter dieser Annahme kommen die Autoren zu einer Formel, die lautet

$$\delta = 1 - n = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{m} N \sum Z_k \left[\frac{1}{\nu^2} + \frac{\nu_k^2}{\nu^2} \ln \left(\frac{\nu_k^2 - \nu^2}{\nu_k^2} \right)^2 \right] \quad (22)$$

Für den Fall, dass man nur die Elektronen der K-Schale berücksichtigt (dies kann man in Anbetracht dessen, dass die Frequenzen der L-Absorptionskanten sehr verschieden sind von den verwendeten Frequenzen, tun), reduziert sich diese Summe auf die zwei Glieder

¹⁾ E. HJALMAR, Ann. d. Phys. **79**, 550, 1926.

$$\delta = 1 - n = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2/m N \cdot Z}{\nu^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2/m N K}{f^2} \ln (1 - f^2)^2 \quad (23)$$

wobei bedeuten: N Zahl der Atome pro cm^3 , Z Gesamtzahl der Elektronen pro Atom, K Zahl der K-Elektronen, ν_k Frequenz der K-Kante, ν Frequenz der verwendeten Strahlung, $f = \nu/\nu_k$. Für grosse und kleine Werte von f verschwindet das Korrekturglied und es geht diese Formel über in die Formel für normale Dispersion nach LORENTZ. Wie man aus der graphischen Darstellung (Figur 10) des Verlaufes des Brechungsexponenten sieht, ist durch diese kontinuierlich verteilten Oszillatoren das Gebiet der anomalen Dispersion etwas verschmälert worden, zugleich mit dem Unterschied, dass auf der kurzwelligen Seite der Kante δ nicht von $+$, sondern von $-\infty$ wieder zum normalen Verlauf zurückkehrt, auch hier gegenüber dem normalen Verlauf auf der langwelligen Seite etwas höher bleibend. Man sollte also auch nach dieser Formel das anomale Verhalten schon nachweisen können in verhältnismässig grossen Abständen zu beiden Seiten der Kante.

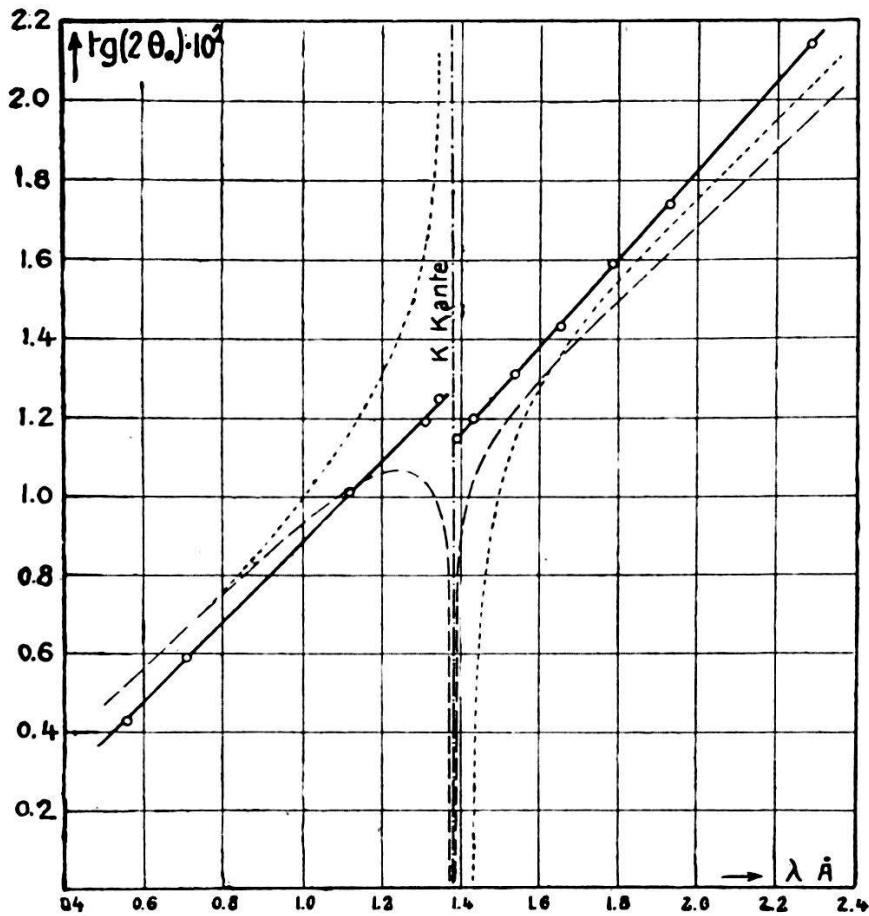
Die Messungen, ausgeführt am Kupferspiegel, ergaben die in Tabelle 4 enthaltenen Resultate.

Tabelle 4.

	$\lambda \text{ \AA}$	$10^2 \cdot \text{tg}(2 \Theta_0)$
$\lambda < \lambda_k$		
Ag $K\alpha$	0,55827	0,43
Mo $K\alpha$	0,70783	0,59
Pt $L\beta_1$	1,11722	1,01
Pt $L\alpha_1$	1,31008	1,19
Jr $L\alpha_1$	1,34834	1,25
$\lambda > \lambda_k$		
Cu $K\beta$	1,38887	1,15
Zn $K\alpha$	1,43205	1,20
Cu $K\alpha$	1,53736	1,31
Ni $K\alpha$	1,65467	1,43
Co $K\alpha$	1,78578	1,59
Fe $K\alpha$	1,93239	1,74
Cr $K\alpha$	2,28517	2,14

¹⁾ W. EHRENBERG u. H. MARK, Z. f. Ph. **38**, 129, 1926.

Trägt man diese Werte für $\operatorname{tg}(2\Theta_0)$ als Funktion der Wellenlänge auf (Figur 11), so sieht man, dass die Punkte zu beiden Seiten der Kante je ziemlich genau auf einer Geraden liegen. Berechnet



Figur 11.

Verlauf von tg des Grenzganzwinkels für Totalreflexion an *Kupfer*. nach der Formel von Lorentz. --- nach der Formel von Kallmann und Mark. — gemessen.

man die Gleichungen der Geraden, so erhält man für die kurzwellige Seite

$$10^2 \cdot \operatorname{tg}(2\Theta_0) = 1,004 \lambda - 0,118 \pm 0,007$$

für die langwellige Seite

$$10^2 \cdot \operatorname{tg}(2\Theta_0) = 1,102 \lambda - 0,383 \pm 0,008 .$$

Die Abweichungen der einzelnen Punkte von den Geraden (vergl. die Tabellen 4 u. 5 und Figur 11) sind so minim, dass man wirklich nicht im Zweifel sein kann darüber, dass diese Gleichungen Gültigkeit haben bis zu den am nächsten der Kante gemessenen Punkte. Wie man sieht, liegt die Gerade auf der kurzwelligen Seite gegenüber derjenigen auf der langwelligen Seite etwas höher,

aber von einem anomalen Verhalten, das der einen oder andern Theorie entsprechen würde, ist nichts zu sehen.

Tabelle 5.

	$\lambda \text{ \AA}$	$10^2 \text{ tg } (2 \Theta_0)$ ber. aus d. Gleichg. d. Ger.	Θ_0	$\delta_{\text{gem}} \cdot 10^6$	$\delta_{\text{Lor}} \cdot 10^6$	$\delta_{\text{K. u. M.}} \cdot 10^6$
Ag K	0,55827	0,43	7' 23''	2,42	3,42	3,56
Mo K	0,70783	0,59	10' 8''	4,35	5,70	5,74
Pt L	1,11722	1,00	17' 21''	12,50	16,59	12,96
Pt L	1,31008	1,19	20' 27''	17,70	31,23	13,60
Jr L	1,34834	1,24	21' 19''	19,23	50,45	10,87
Cu K	1,3785	1,26	21' 39''	19,84	$+\infty$	$-\infty$
Kante		1,14	19' 36''	16,24	$-\infty$	$-\infty$
Cu K	1,38887	1,15	19' 46''	16,53	-78,91	7,59
Zn K	1,43205	1,19	20' 27''	17,70	1,52	13,97
Cu K	1,53736	1,31	22' 31''	21,45	16,95	18,58
Ni K	1,65467	1,44	24' 45''	25,92	23,38	23,11
Co K	1,78578	1,58	27' 9''	31,20	29,26	27,91
Fe K	1,93239	1,75	30' 4''	38,38	35,44	33,27
Cr K	2,28517	2,14	36' 47''	57,24	51,46	47,88

In der Tabelle 5 sind die nach den Gleichungen berechneten Werte von $\text{tg } (2 \Theta_0)$ angegeben. Für diese Werte sind auch Θ_0 und δ berechnet. Zum Vergleich sind diesen Werten die nach der Formel von LORENTZ und die nach der Formel von KALLMANN u. MARK berechneten gegenübergestellt. In der Figur 11 sind ausser den gemessenen Werten von $\text{tg } (2 \Theta_0)$ und die durch diese gelegten Geraden auch noch die Kurven, berechnet nach den beiden Theorien, aufgetragen.

Aus den Tabellen wie aus den Kurven ersieht man, dass $\text{tg } (2 \Theta_0)$, also auch der Brechungsexponent, auf der kurzwelligen Seite kleiner ist als dem normalen theoretischen Verlauf entsprechen würde; auf der langwelligen Seite ist das Verhältnis umgekehrt. Was die Fehler anbetrifft, die den Geraden anhaften könnten, so ist über dieselben das gleiche zu sagen wie beim Silber-
spiegel; doch darf hier gesagt werden, dass alles versucht wurde, um die Resultate einwandfrei zu bekommen. Die Platten wurden auf verschiedene Weise ausgemessen (direkt mit dem Mikroskop, das auf einer Teilmaschine befestigt ist, mehrere Male mit Ein- und Zweifadeneinstellung. Zudem wurden die Platten noch mit einem Mikrophotometer von KIPP u. ZONEN, dessen Benützung mir

durch den Vorsteher des Physikalischen Institutes der Universität Basel, Herrn Prof. Hagenbach, bereitwilligst gestattet wurde, ausgemessen) und aus all den verschiedenen Bestimmungen, die nur einige Hundertstel mm auseinanderliegen, wurde das Mittel genommen. Wenn also trotzdem noch irgend ein Fehler vorhanden wäre, so wäre die Korrektur jedenfalls sehr gering, und zwar so, dass beide Geraden gleichzeitig nach derselben Seite verschoben würden. Wäre auch hier die Absorptionskorrektur etwas zu klein, so würden die beiden Geraden nach den langen Wellen hin um einen geringen Betrag nach oben gedreht. Es würde also dadurch an der Tatsache nichts geändert, dass die theoretischen Werte auf der einen Seite zu gross und auf der andern Seite zu klein sind gegenüber den gemessenen.

Nach dem vorhandenen Material zu urteilen, wären für den Verlauf des Brechungsexponenten in der allernächsten Umgebung zu beiden Seiten der Kanten folgende drei Fälle möglich:

1. Der Brechungsexponent fällt auf der langwelligen Seite der Kante nach $-\infty$ ab in einem Gebiete, das schmaler ist als 10 X-Einheiten, und fällt auf der kurzwelligen Seite ebenso steil von $+\infty$ wieder zu normalen Werten ab.
2. Der Verlauf geht nach dem Schema von KALLMANN u. MARK, jedoch findet auch hier der beidseitige Abfall nach $-\infty$ in einem sehr schmalen Gebiete statt.
3. Der normale Verlauf, der beidseitig der Kante bis in deren Nähe auftritt, geht beidseitig bis zur Kante weiter und in der Kante selbst tritt ein Sprung des Brechungsexponenten ein.

Von diesen drei möglichen Erklärungen scheint mir die dritte die wahrscheinlichste zu sein. Es würde dies dem Verlauf des Absorptionskoeffizienten im Gebiet einer Kante nicht ganz entsprechen und wäre so zu erklären, dass im langwelligen Gebiet die beiden K-Elektronen sich gar nicht an der Dispersion beteiligen und in der Kante selbst, da wo das $h \cdot \nu$ der einfallenden Strahlung gross genug ist, um die beiden Elektronen aus dem stabilen System hinauszuerwerfen, plötzlich mitwirken. Extrapoliert man die beiden Geraden bis zur Kante, und berechnet daraus die entsprechenden δ (in der Tabelle 5 angegeben), so würde dem ein Sprung von δ um $3,60 \cdot 10^{-6}$ entsprechen. Berechnet man den Sprung in der K-Kante nach der Formel von LORENTZ unter der Annahme, dass auf der langwelligen Seite der Kante 27, und auf der kurzwelligen Seite 29 Elektronen an der Dispersion mitwirken, so beträgt die Differenz der beiden Werte in der Kante allerdings nur $1,46 \cdot 10^{-6}$, d. h. also nur $\frac{2}{5}$ des experimentell gefundenen Betrages. Aus den gezogenen Ver-

gleichen lässt sich ersehen, dass die Dispersion für Röntgenstrahlen im Gebiete einer Absorptionskante weder durch die Formel von LORENTZ, mit oder ohne Berücksichtigung der Anomalität, noch durch die neuere Formel von KALLMANN u. MARK auch nur einigermaßen genau wiedergegeben wird.

Um in diese Frage noch etwas mehr Klarheit zu bringen, wären nun als erstes die Dispersionsverhältnisse im Gebiet der L-Absorptionskanten eines schweren Elementes zu untersuchen; denn da hier nicht nur zwei, sondern acht Elektronen mehr sind als auf der langwelligen Seite, die sich zwar auf drei getrennte, allerdings sehr nahe beieinander liegende Kanten verteilen, so könnte man sicher mehr über die plötzliche Mitwirkung dieser Elektronen in Erfahrung bringen.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. Dr. P. Scherrer, auf dessen Anregung die vorliegende Arbeit ausgeführt wurde, für sein stetes Interesse, das er den Untersuchungen entgegengebracht hat, sowie für die vielen wertvollen Ratschläge, die er mir zuteil werden liess, meinen besten Dank auszusprechen.

Zürich, Physik. Institut der Eidg. Techn. Hochschule.

Eingegangen am 1. November 1927.
