

<b>Zeitschrift:</b>	Geographica Helvetica : schweizerische Zeitschrift für Geographie = Swiss journal of geography = revue suisse de géographie = rivista svizzera di geografia
<b>Herausgeber:</b>	Verband Geographie Schweiz ; Geographisch-Ethnographische Gesellschaft Zürich
<b>Band:</b>	24 (1969)
<b>Heft:</b>	3
<b>Artikel:</b>	Numerische Methoden der Relieferfassung
<b>Autor:</b>	Meier, Peter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-49398">https://doi.org/10.5169/seals-49398</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Numerische Methoden der Relieferfassung

Peter Meier

## Einleitung

Die Entwicklung der Reliefparameter Kotenstreuung und Relieffaktor war nicht nur für die Morphometrie von bahnbrechender Bedeutung<sup>1</sup>, sondern muß auch als einer der ersten Beiträge zur modernen, mathematisch orientierten regionalen Geographie angesehen werden. Hier wurde nun das Landschaftselement Relief eindeutig quantitativ erfaßt. In den letzten Jahren stehen nun auch die elektronischen Rechenanlagen dem Geographen als Hilfsmittel zu Verfügung<sup>2</sup>, und das Ziel dieses Beitrages ist die Transformation der in *Gassmann und Gutersohn* (1947) eingeführten Reliefintegrale in numerische Annäherungen, die sich zur Computerbearbeitung eignen.

### 1. Das hypsometrische Polynom

Die Geländeoberfläche eines Reliefabschnittes der Grundfläche  $F_o$  sei zunächst als Funktion  $Z(x, y)$  dargestellt; d. h. für jedes Koordinatenpaar  $(x_i, y_i)$  ist die entsprechende Kote gleich  $Z(x_i, y_i)$ . Das Volumen des Geländeabschnittes ist damit<sup>3</sup>

$$V = \iint_{F_o} Z(x, y) dx dy \quad (1.1)$$

und die mittlere Kote  $z_m$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = \int_{-\infty}^0 f(u) du + \int_0^1 f(u) du + \int_1^{\infty} f(u) du = \int_0^1 f(u) du = 1 \quad (1.6)$$

Der Vorteil dieser Interpretation liegt darin, daß die mittlere Kote  $z_m$  direkt aus dem ersten Moment, die Kotenstreuung  $\sigma$  aus dem zweiten Moment der

$$z_m = \frac{1}{F_o} \iint_{F_o} Z(x, y) dx dy \quad (1.2)$$

Nun ist aber die Funktion  $Z(x, y)$  kaum explizit darstellbar; praktisch ist man zur Benützung der hypsometrischen Funktion  $F(z)$  gezwungen, die durch Ausplanimetrieren der Höhenschichten bestimmt wird.

Somit ist auch

$$V = \int^{z'} F(z) dz \quad (1.3)$$

und

$$z_m = \frac{V}{F_o} = \int^{z'} \frac{F(z) dz}{F_o} \quad (1.4)$$

wo  $z'$  = maximale Niveaudifferenz. Nun kann die hypsometrische Funktion  $F(z)$  als Summenhäufigkeitsverteilung sämtlicher Kotenwerte aufgefaßt werden; die entsprechende Kotenhäufigkeitsverteilung ist gleich  $f(z) = dF(z)/dz$ . Wird nun die hypsometrische Funktion auf die Grundfläche eins reduziert, und die maximale Niveaudifferenz  $z'$  gleich eins gesetzt, d. h.  $u = z/z'$  und  $F(u) = F(z)/F_o$ , so erfüllt  $f(u) = dF(u)/du$  die Bedingung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dazu muß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1 \text{ sein.}$$

$f(u)$  ist aber nur im Einheitsintervall definiert; d. h.

Funktion  $f(u)$  bestimmbar ist; das  $p$  — te Moment  $m_p$  ist durch

$$m_p = \int_0^1 u^p f(u) du \quad (1.7)$$

gegeben. Die einfachste funktionale Darstellung der hypsometrischen Kurve ist als Polynom

$$F(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_k u^k + \dots + a_n u^n = \sum_{k=0}^n a_k u^k. \quad (1.8)$$

Daraus folgt auch  $f(u) = a_1 + \sum_{k=2}^n k a_k u^{k-1}$  (1.9)

Aus (1.6) und (1.9) folgt somit

$$0 \int^1 (a_1 + \sum_{k=2}^n k a_k u^{k-1}) du = 1 \quad (1.10)$$

d. h.  $\sum a_k u^k \Big|_0^1 = 1$

und somit haben die Polynomkonstanten die Bedingung

$$\sum_{k=0}^n a_k = 1 \quad (1.11)$$

zu erfüllen. Die mittlere Kote  $z_m$  ist somit durch das erste Moment  $m_1$ , die Kotenstreuung  $\sigma$  durch das zweite zentrale Moment  $\mu_2$  und die Schiefe<sup>4</sup> S durch das dritte absolute Moment  $a_3$  gegeben. Die Herleitung der Formeln (1.12—1.16) ist in Anhang A ausführlich dargestellt.

$$z_m = z_0 + z m_1 \quad (1.12)$$

$$= z_0 + z' \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} a_k \right) \quad (1.13)$$

$$\sigma = z' \sqrt{(m_2 - m_1^2)} \quad (1.14)$$

$$= z' \sqrt{\left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+2} a_k - m_1^2 \right)} \quad (1.15)$$

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+3} \frac{a_k - 3m_1 m_2 + 2m_1^3}{\sigma^3} \quad (1.16)$$

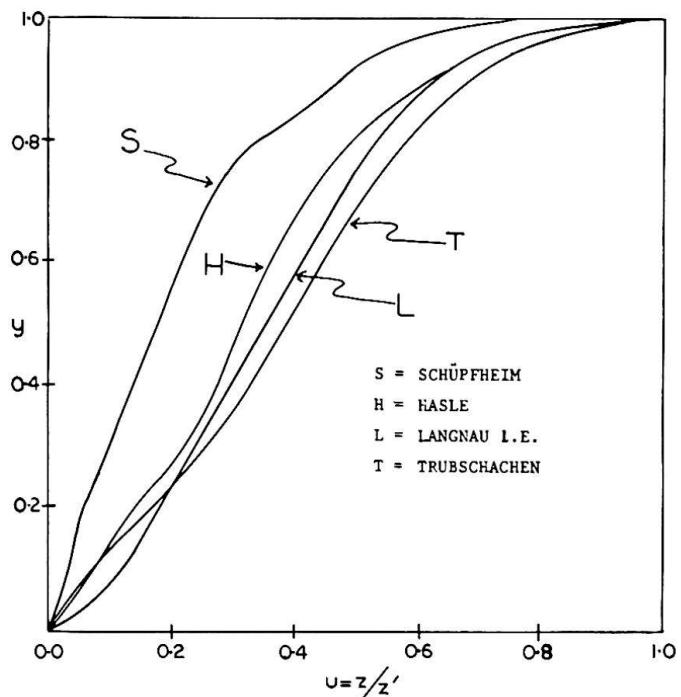
## 2. Die Bestimmung des hypsometrischen Polynoms

Die Bestimmung der Polynomkoeffizienten  $a_k$  erfolgt nach dem Kleinst-Quadrat-Prinzip. Gesucht ist also ein Polynom  $y_n(u)$ , dessen Verlauf im Einheitsintervall die hypsometrische Kurve möglichst genau wiedergibt. Ist diese Kurve durch  $m$  Planimettermessungen  $(u_i, y_i)$  bestimmt, so ist «möglichst genau» durch folgende Bedingung erfüllt

$$S + \sum_{i=1}^m (y_n(u_i) - y_i)^2 = \text{Minimum} \quad (2.1)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=0}^n a_k u_i^k - y_i \right)^2 = \text{Minimum} \quad (2.2)$$

Die Bestimmung der  $a_k$  aus (2.2) erfolgt auf übliche Weise. Die Partialableitungen  $\delta S / \delta a_k$  werden



Figur 1. Reduziert hypsometrische Kurven

gleich Null gesetzt und das resultierende System von  $(n+1)$  Gleichungen in  $(n+1)$  Unbekannten ( $a_0, a_1, \dots, a_n$ ) durch Gauss'sche Elimination gelöst<sup>5</sup>. Da jedoch aus (1.11)

$$\sum_{k=0}^r a_k = 1$$

und  $y_n(0) = 0$  folgt, reduziert sich das Lösungssystem eines Polynoms  $n$ -ten Grades auf  $(n-1)$  Unbekannten. Die Lösung dieser Gleichungen wird in Anhang B näher diskutiert.

## 3. Anwendung

Die reduziert hypsometrischen Kurven für die Gemeinden Schüpfheim, Hasle, Trubschachen und Langnau i. E. sind in Figur 1 aufgezeichnet. Ein Vorteil dieser Darstellungsart ist die Möglichkeit direkter Vergleiche der allgemeinen morphologischen Entwicklung. Somit folgt z. B. aus Figur 1, wie auch durch Kenntnis der entsprechenden Landschaften bestätigt ist, daß Langnau und Trubschachen morphologisch ein relativ «reifes» Stadium darstellen<sup>6</sup>, während Schüpfheim sich eher dem «Monadnock»-Stadium nähert.

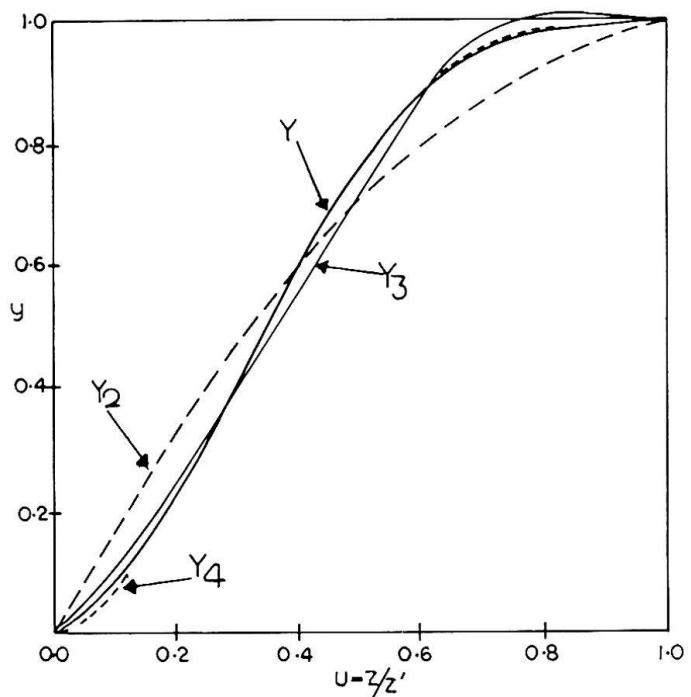
Die Polynomkonstanten und Reliefparameter sind auf Tabelle 1 gegeben<sup>7</sup>. Sind die Höhenschichten einmal ausplanimetriert<sup>8</sup>, so sind auch die Relief-

parameter innerhalb weniger Sekunden auf dem Computer erhältlich<sup>9</sup>.

Es ist zu beachten, daß die Kleinst-Quadrat-Annäherung nur dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, wenn  $\delta y / \delta x \geq 0$  und  $y \leq 1$  für alle  $0 \leq y \leq 1$ . Polynome, die den Wert eins innerhalb des Einheitsintervalls überschreiten, sind auf Tabelle 1 mit \* bezeichnet. In solchen Fällen haben die höheren Momente oft sinnlose Werte (Momente sind auch nur für echte Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert!), und man ist zur Berechnung des nächst höheren Polynoms gezwungen.

Aus Figur 2 ist ersichtlich, daß die  $y_4$ -Polynome die hypsometrischen Kurven sehr gut approximieren; Benutzung eines  $y_5$ -Polynoms ist wohl kaum sinnvoll. Wo eine elektronische Rechenlage nicht vorhanden ist, reicht  $y_2$  oder  $y_3$  für eine Schätzung der mittleren Höhe, für eine Schätzung der Kotenstreuung jedoch nicht.

Es ist leicht zu zeigen, daß das dritte absolute Moment oder auch ein anderes Maß der Schiefe der Kotenhäufigkeitsverteilung die vorhin erwähnte unterschiedliche morphologische Entwicklung zum Ausdruck bringt<sup>10</sup>. Aus Figur 1 sollte damit die Größenordnung dieses Schiefemaßes in der Reihenfolge Schüpfheim > Hasle > Langnau > Trubschachen verlaufen; dies ist in der Tat auch durch



Figur 2. Die beobachtete hypsometrische Kurve  $Y$  der Gemeinde Langnau i. E. sowie die berechneten Polynome  $y_2, y_3, y_4$

die S-Werte der  $y_4$ -Polynome auf Tabelle 1 bestätigt<sup>11</sup>.

Tabelle 1. Polynomkonstanten und Reliefparameter

#### Langnau i. E.

$$y_2 = 1,848x - 0,848x^2$$

$$y_3 = 0,914x + 2,086x^2 - 2,000x^3$$

$$y_4 = 0,220x + 6,432x^2 - 9,574x^3 + 3,922x^4$$

	$z_m$	$\sigma$	S
$y_2$	890	174	0,532
$y_3(*)$	883	113	-1,613
$y_4$	890	126	0,237
(**)	890	134	

#### Schüpfheim

$$y_2 = 2,779x - 1,779x^2$$

$$y_3 = 3,553x - 4,244x^2 + 1,690x^3$$

$$y_4 = 3,471x - 3,718x^2 + 0,731x^3 + 0,514x^4$$

	$z_m$	$\sigma$	S
$y_2(*)$	959	im	im
$y_3(*)$	950	224	1,200
$y_4$	951	230	1,471

(\*) Siehe Text. Im Moment imaginär (Polynom keine echte Wahrscheinlichkeitsverteilung).

#### Hasle

$$y_2 = 2,041x - 1,041x^2$$

$$y_3 = 1,480x + 0,661x^2 - 1,141x^3$$

$$y_4 = 0,625x + 5,631x^2 - 9,510x^3 + 4,254x^4$$

	$z_m$	$\sigma$	S
$y_2$	1113	316	0,562
$y_3(*)$	1110	251	im
$y_4$	1127	275	0,692

#### Trubschachen

$$y_2 = 1,667x - 0,667x^2$$

$$y_3 = 0,970x + 1,422x^2 - 1,393x^3$$

$$y_4 = 0,731x + 2,787x^2 - 3,648x^3 + 1,129x^4$$

	$z_m$	$\sigma$	S
$y_2$	922	118	0,443
$y_3$	922	142	0,059
$y_4$	920	118	0,156

(\*\*) Präzisionsplanimeterbestimmung nach Meier (1966).

## Schlußwort

In der klassischen Arbeit «Kotenstreuung und Relieffaktor» hat Prof. Gutersohn schon vor 20 Jahren die Neuorientierung der Geographie in Richtung vermehrter Benützung mathematischer Methoden vorausgesehen. Daß diese Reliefparameter in der geographischen Charakterisierung der Landschaft einen nützlichen Beitrag leisten, ist auch in seinen späteren Werken klar bewiesen<sup>12</sup>. Die Leistungsfähigkeit der modernen Computer ermöglicht rasche und zuverlässige Berechnung, und diese

quantitativen Reliefparameter sollten nun vermehrt Anwendung finden.

Der Schreibende ist vor allem Prof. Gutersohn selbst zu aufrichtigem Dank verpflichtet, nicht nur als ehemaligen Diplomand, sondern auch für das stete Interesse für die persönlichen und beruflichen Anliegen eines jungen Geographen. Gedankt sei auch Herrn Prof. J. Nebiker, Dozent an der University of Massachusetts, für die kritische Durchschau des Manuskriptes und dem Research Computer Center für die Genehmigung zur Benützung der Rechenanlage.

## Anhang A. Berechnung der Momente

Das p-te Moment  $m_p$  einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(u)$  ist gleich

$$\begin{aligned} m_p &= \int_{-\infty}^{\infty} u^p f(u) du \\ &= \int_{-\infty}^0 u^p f(u) du + \int_0^1 u^p f(u) du + \int_1^{\infty} u^p f(u) du \\ &= \int_0^1 u^p f(u) du \quad \text{da } f(u) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 < u < \infty \\ -\infty < u < 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

somit das erste Moment  $m_1$

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^1 u(a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2 + \dots + k a_k u^{k-1} + \dots + n a_n u^{n-1}) du \\ &= \left[ \frac{1}{2} a_1 u^2 + \frac{2}{3} a_2 u^3 + \dots + \frac{k}{k+1} a_k u^{k+1} + \dots + \frac{n}{n+1} a_n u^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} a_k \end{aligned}$$

auf analoge Weise erhält man für  $m_2$

$$m_2 = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+2} a_k$$

und für das p-te Moment  $m_p$

$$m_p = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+p} a_k$$

Das dritte Moment eines  $y_4$ -Polynomes ist z. B. gleich

$$m_3 = \frac{a_1}{4} - \frac{2a_2}{5} + \frac{3a_3}{6} + \frac{4a_4}{7}$$

## Anhang B. Bestimmung der Polynome

Das Polynom 2-ten Grades  $y_2(u)$  ist  $y_2(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2$ .

Da  $y_2(0) = 0$  muß  $a_0 = 0$  sein. Aus (1.11) folgt weiter  $a_1 = 1 - a_2$ .

Damit wird die Kleinst-Quadrat-Bedingung (2.2) gleich

$$S = \sum_{i=1}^m \{ (1 - a_2)u_i + a_2u_i^2 - y_i \}^2 = \text{minimum}$$

nach etwelcher Umformung erhält man

$$\frac{\delta S}{\delta a_2} = \sum_{i=1}^m \{ a_2(x^2_i - 2x^3_i + x^4_i) + x^3_i - x^2_i - x_i y_i - x^2_i y_i \}$$

$$\text{und } a_2 = \frac{\sum x^2_i y_i - \sum x_i y_i + \sum x^2_i - \sum x^3_i}{(\sum x^2_i - \sum 2x^3_i + \sum x^4_i)}$$

Für ein Polynom n-ten Grades ist das Gleichungssystem gleich

$$Xa = P$$

mit dem Lösungsvektor

$$a = X^{-1}P$$

$$\text{wo } a_i = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \Sigma x^2 - \Sigma x^3 + \Sigma x^2 y - \Sigma x y \\ \Sigma x^2 - \Sigma x^4 + \Sigma x^3 y - \Sigma x y \\ \Sigma x^2 - \Sigma x^5 + \Sigma x^4 y - \Sigma x y \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Sigma x^2 - \Sigma x^{n+1} + \Sigma x^n y - \Sigma x y \end{bmatrix}$$

$$\text{und } X = \begin{bmatrix} (2, -3^1, 4) & (2, -3, -4, 5) & (2, -3, -5, 6) & \dots & (2, -3, -(n+1), n+2) \\ (2, -4^1, 6) & (2, -4, -5, 7) & \dots & (2, -4, -(n+1), n+3) \\ (2, -5^1, 8) & (2, -5, -(n+1), n+4) \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & (2, -n^1, 2n) & (2, -n, -(n+1), 2n) \\ & & & (2, -(n+1)^1, 2n) & \end{bmatrix}$$

$$\text{wo z. B. } (2, -3, -5, 6) \equiv \sum_{i=1}^n x^2 - \sum_{i=1}^n x^3 - \sum_{i=1}^n x^5 + \sum_{i=1}^n x^6$$

$$\text{und } (2, -4^1, 6) \equiv \sum_{i=1}^n x^2 - 2 \sum_{i=1}^n x^4 + \sum_{i=1}^n x^6$$

### Literatur

Gassmann, F. und Guttersohn, H. (1947). Kotonstreitung und Relieffaktor. Geogr. Helv. 2, 122—139.

Haggett, P. (1966). Locational Analysis in Human Geography. Arnold, London.

McCracken, D. und Dorn, W. S. (1964). Numerical Methods and Fortran Programming. John Wiley, New York.

- Strahler, A. (1954). Statistical Analysis in Geomorphic Research J. Geol. 62, 1—125.
- Meier, P. (1966). Applications of Mathematics to Regional Planning and Geography. Diplomarbeit, Manuscript am Geogr. Inst. ETH, Zürich.
- Steiner, D. (1965). Die Faktorenanalyse — ein modernes statistisches Hilfsmittel des Geographen für die objektive Raumgliederung und Typenbildung. Geogr. Helv. 20, 20—34.

### Bemerkungen

- <sup>1</sup> Gassmann und Gutersohn (1947). Kotonstreung und Relieffaktor. Geogr. Helv., 2, 122—139.
- <sup>2</sup> Siehe dazu Steiner (1966).
- <sup>3</sup> Gleichungen (1.1) — (1.4) sind in Gassmann und Gutersohn (1947) näher begründet.
- <sup>4</sup> Siehe Abschnitt 3.
- <sup>5</sup> Siehe dazu etwa McCracken und Dorn (1964), Kapitel 8.
- <sup>6</sup> Strahler (1954) unterscheidet zwischen «jung», «reif» und «Monadnock», je nach Geometrie der reduziert hypsometrischen Kurve.
- <sup>7</sup> Sämtliche Berechnungen wurden auf der digitalen Rechenanlage der University of Massachusetts

durchgeführt (Control Data Corporation 3600) mit Zugang mittels Fernschreiber (sogenanntes remote access timesharing system).

<sup>8</sup> Zu Erleichterung der Arbeit wurden die Höhenkurven auf Transparentpapier aufgezeichnet, die Höhenschichten ausgeschnitten, auf einer Mettlerwaage gewogen und die Bestimmungspunkte der reduziert hypsometrischen Kurve durch entsprechende Division berechnet.

<sup>9</sup> Die durchschnittliche Berechnungszeit für das  $y_2$ -Polynom betrug 0,5 sec, für das  $y_3$ -Polynom 0,6 sec und für  $y_4$  0,7 sec (einschließlich Berechnung der Reliefparameter). Zwischen Anfang der Dateneingabe auf dem Fernschreiber und Ende des Resultatausschreibens (Polynomkonstanten, Reliefparameter und Verlauf des Polynoms im Einheitsintervall) verlaufen etwa 20—40 Sekunden!

<sup>10</sup> Die Strahlersche Stufe «jung» entspricht einer rechtsschiefen, «reif» einer symmetrischen und «Monadnock» einer linksschiefen Kotonhäufigkeitsverteilung. Siehe dazu auch Meier (1966).

<sup>11</sup> Kopien des Fortran-Programmes für die Berechnung sind von Peter Meier, Departement of Civil Engineering, University of Massachusetts, Amherst, Mass. 01002, USA, erhältlich.

<sup>12</sup> Besonders in dem mehrbändigen Werk «Geographie der Schweiz».