

Zeitschrift: Geomatik Schweiz : Geoinformation und Landmanagement =
Géomatique Suisse : géoinformation et gestion du territoire =
Geomatica Svizzera : geoinformazione e gestione del territorio

Herausgeber: geosuisse : Schweizerischer Verband für Geomatik und
Landmanagement

Band: 111 (2013)

Heft: 5

Artikel: Ingenieurgeodäsie und Mathematik : eine wechselseitige Beziehung

Autor: Fischer, Beat / Sievers, Beat

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-323399>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ingenieurgeodäsie und Mathematik – eine wechselseitige Beziehung

Beat Fischer, Beat Sievers

Das Vermessungswesen und die Geometrie entstanden ursprünglich in Mesopotamien, Ägypten und Griechenland. Mathematiker, wie z.B. Hilbert, waren sich dieser Tatsache immer bewusst, Zitat aus [1], S. 58: «Unter den Erscheinungen oder Erfahrungstatsachen, die sich bei uns bei der Betrachtung der Natur bieten, gibt es ... die Gruppe derjenigen Tatsachen, welche die äussere Gestalt der Dinge bestimmen. Mit diesen Tatsachen beschäftigt sich die Geometrie. ... ist sie mit Rücksicht auf ihren Ursprung eine Naturwissenschaft, ... » Im griechischen Kulturkreis entstand mit den Elementen von Euklid [2] ein axiomatischer Aufbau der Theorie. Von den Römern ist mit [3] ein Lehrbuch der Vermessungspraxis überliefert. Im Mittelalter gehörten Arithmetik, Geometrie (euklidische Geometrie, Geografie, Agrimensur) und Astronomie zu den sieben freien Künsten und galten als Vorbereitung auf die späteren Studienfächer [4]. Am Institut für Vermessung und Geoinformation (IVGI) der FHNW ist der Dozent für Mathematik und Statistik (B. Fischer) Mitglied des Instituts, was Vermessung und Mathematik zusammenbringt und in einer fruchtbaren Zusammenarbeit mit dem Dozenten für Geodäsie (B. Sievers) resultiert. Im Folgenden stellen wir ein paar Themen aus dem Wechselfeld Ingenieurgeodäsie und Mathematik dar, welche uns in den letzten 15 Jahren begegneten. Didaktische Fragen sind für uns naturgemäss wichtig.

cher [4]. Am Institut für Vermessung und Geoinformation (IVGI) der FHNW ist der Dozent für Mathematik und Statistik (B. Fischer) Mitglied des Instituts, was Vermessung und Mathematik zusammenbringt und in einer fruchtbaren Zusammenarbeit mit dem Dozenten für Geodäsie (B. Sievers) resultiert. Im Folgenden stellen wir ein paar Themen aus dem Wechselfeld Ingenieurgeodäsie und Mathematik dar, welche uns in den letzten 15 Jahren begegneten. Didaktische Fragen sind für uns naturgemäss wichtig.

Geodätisches und mathematisches Koordinatensystem

C. F. Gauss wird von den Mathematikern als Mathematiker und von den Geodäten als Geodät wahrgenommen, so dass seine fundamentalen Beiträge zu Statistik und Ausgleichsrechnung von beiden Fachkreisen aufgenommen wurden. Unterschiedlich sind die Orientierungen der ebenen geodätischen und mathemati-

schen Koordinatensysteme. Das geodätische System entsteht durch Spiegelung an der Achse $Y=X$ aus dem mathematischen System und umgekehrt. Da eine ebene Spiegelung eine räumliche Drehung ist, liegt das jeweils andere System vor, wenn man das Blatt von hinten anschaut. Am besten kann dies mit einer Folie auf dem Hellraumprojektor demonstriert werden, vgl. Abb. 1.

Da die Gültigkeit von Formeln nicht davon abhängen kann, ob man ein Figurenblatt von vorne oder hinten betrachtet, gelten alle Formeln der ebenen Geometrie für beide Koordinatensysteme.

Helmert-Transformation der Ebene als komplexe lineare Funktion

1799, d.h. vor Gauss und unabhängig von diesem, publizierte Caspar Wessel, in Norwegen geboren und Landesvermesser in Dänemark, die erste geometrische Theorie der komplexen Zahlen. Die in Dänisch geschriebene Arbeit wurde aber nicht beachtet und erst 1895 «entdeckt» ([5]). Wessel stellte die komplexen Zahlen in der Zahlenebene dar, definierte als Erster eine Vektoraddition und stellte fest, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl eine Drehstreckung bedeutet. Die Multiplikation einer Zahl $z = x + i \cdot y$ mit der Zahl

$$d = s \cdot e^{i\varphi} = s \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (1)$$

bedeutet eine Drehstreckung von z um 0 mit Streckungsfaktor s und Drehwinkel φ , vgl. Abb. 2.

Eine lineare Funktion

$$w(z) = d \cdot z + t = s e^{i\varphi} \cdot z + t \quad (2)$$

von z setzt sich zusammen aus einer Translation t und einer Drehstreckung mit Skalierungsfaktor s und Drehwinkel φ . (2) stellt eine Helmert-Transformation der Ebene dar. Damit kann die Bestimmung der Parameter einer Helmert-Transformation durch Ausgleichung als Geradenfit mit komplexen Daten, komplexer Steigung d und komplexem Ordinatenab-

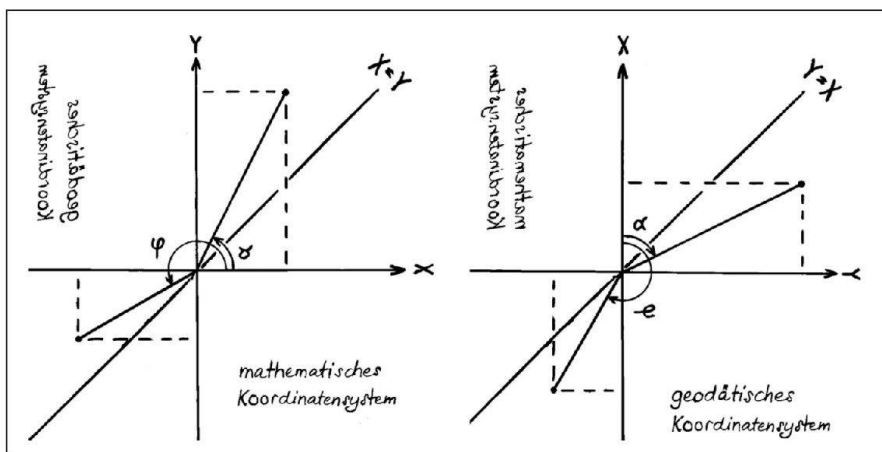


Abb. 1: Links das mathematische, rechts das geodätische Koordinatensystem der gedrehten Folie. Der Polarwinkel φ geht bei der Drehung um die Gerade $Y = X$ in das Azimut α über.

schnitt t aufgefasst werden. Mit den Passpunktkoordinaten $z_k = x_k + y_k \cdot i$ (Startsystem) bzw. $w_k = u_k + v_k \cdot i$ (Zielsystem) sowie den Verbesserungen $w_k = \xi_k + \eta_k \cdot i$ lauten die Beobachtungsgleichungen

$$w_k + \omega_k = d \cdot z_k + t, \quad k=1, \dots, n \quad (3)$$

und die Ausgleichsforderung (Minimumsfunktion) mit der konjugiert komplexen Verbesserung $\omega_k^* = \xi_k - \eta_k \cdot i$

$$\sum_{k=1}^n \omega_k \omega_k^* = \sum_{k=1}^n (\xi_k^2 + \eta_k^2) = \min. \quad (4)$$

Damit weist die Helmert-Transformation der linearen Regression entsprechende Eigenschaften auf, insbesondere resultieren bei Bestimmung der Transformationsparameter durch Ausgleichung zwei verschiedene Transformationen analog zu den zwei Regressionsgeraden (Abb. 3), je nach Festlegung der Start- und Zielkoordinatensysteme. Dabei werden die Verbesserungen immer am Zielsystem angebracht. Die «Regressionschere», d.h. die Öffnung zwischen den zwei Regressionsgeraden, ist bei grosser Beobachtungsgenauigkeit klein, was für die meisten Helmert-Transformationen in der Geodäsie zutrifft. Die Umkehrabbildungen unterscheiden sich dann nur wenig von der jeweils andern geschätzten Transformation.

Die Helmert-Transformation wird auch als «Prokrustes-Transformation» bezeichnet, vgl. [6], S. 39 ff., wo übrigens auch unsere Auffassung (3), (4) vertreten wird.

3D-Helmert-Transformation mittels Quaternionen

Die unbekannten Parameter (Translationen X_0, Y_0, Z_0 , Rotationen α, β, γ um die Achsen des Startsystems (x, y, z) , Skalierung des Startsystems um einen Massstab m) können in der üblichen vermittelnden 3D Ausgleichung (Abb. 4) aus Passpunkten nur bestimmt werden, wenn für sie Näherungswerte vorliegen. Solche liegen nicht immer vor. [7] beschreibt für diesen Fall einen möglichen Lösungsweg.

Die Drehwinkel und der Massstab können aber auch elegant und in geschlossener Form mittels Quaternionen bestimmt werden. Quaternionen sind doppelt komplexe Zahlen $a + bi + cj + dk$ mit nicht-kommutativer Multiplikation. Die nicht-kommutative Hintereinanderausführung von Drehungen im Raum kann durch Multiplikationen von Quaternionen beschrieben werden. Die Quaternionen wurden von W. R. Hamilton 1886 eingeführt und sind in der modernen Bildorientierung (Photogrammetrie, Laser Scanning, Computeranimation) beliebt, wo sich folgende Aufnahmen gegenseitig stark und unbekannt verdreht sein können. Die Quaternionen Algebra und Geometrie ist beispielsweise in [8] gut beschrieben, sie wurde in einer Master Projektarbeit am IVGI lernfreundlich aufbereitet.

Azimutberechnung

Eine Aufgabe des vermessungstechnischen Rechnens lautet: Gegeben sei ein Punkt $P(X, Y)$, berechne den Richtungswinkel oder das Azimut von $(0, 0)$ zu P . In gängigen Fachbüchern, z.B. [9] S. 184 oder [10] S. 156, wird $\arctan \frac{Y}{X}$ berechnet und dann je nach Quadrant, in dem (X, Y) liegt, das $\text{azi}(X, Y)$ ermittelt. Die folgende in Vermesserkreisen offenbar wenig bekannte Formel

$$\text{azi}(X, Y) = \begin{cases} 2 \cdot \arctan \frac{Y}{X + \sqrt{X^2 + Y^2}} & , (X \geq 0) \text{ oder } (Y \neq 0) \\ 200 \text{ gon} & , (X < 0) \text{ und } (Y = 0) \end{cases} \quad (5)$$

ermittelt $-200 \text{ gon} < \text{azi} \leq 200 \text{ gon}$ ohne eine Quadranten Unterscheidung. Die Punkte der negativen X -Achse bilden den einzigen Spezialfall. Die Herleitung geht über das halbe Azimut, vgl. [11], S. 82.

Minimumsfunktion in der Ausgleichung korrelierter Beobachtungen

Positiv definite symmetrische Streu- und Gewichtsmatrizen P sollen die Bedingung erfüllen:

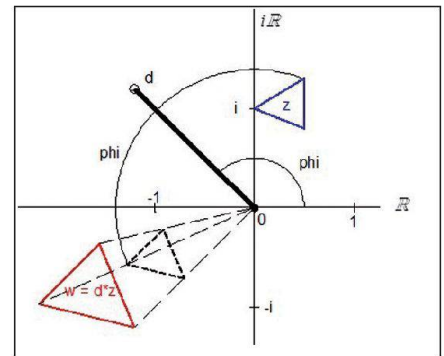


Abb. 2: Komplexe Multiplikation $w = d \cdot z$, $d = s \cdot e^{j\varphi}$ mit $s = 1.7$, $\varphi = 3\pi/4$. Die Zahlen z des blauen Dreiecks werden um φ um 0 gedreht und aus 0 heraus um den Faktor s gestreckt. Es resultieren die Zahlen w des roten Dreiecks.

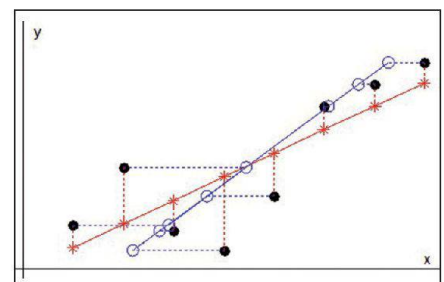


Abb. 3: Lineare Regression: • Datenpunkte, Rot: 1. Regressionsgerade, Ausgleichung nach y , * verbesserte Werte. Blau: 2. Regressionsgerade, Ausgleichung nach x , o verbesserte Werte.

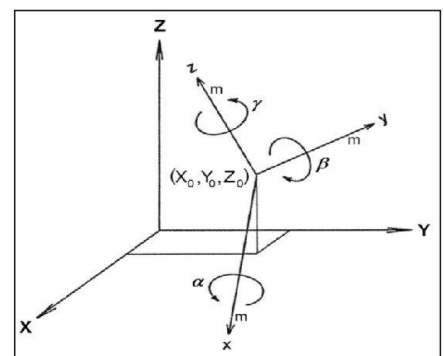


Abb. 4: Räumliche Helmerttransformation.

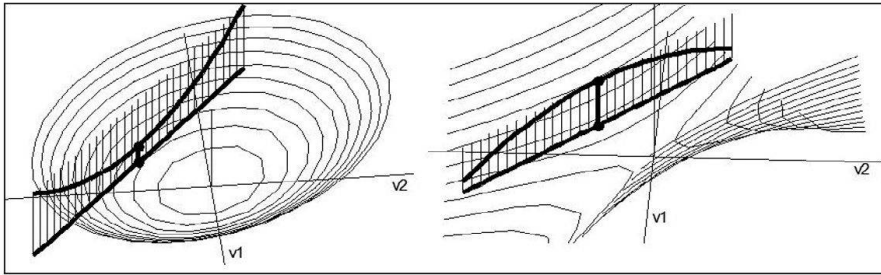


Abb. 5: Flächen der Funktion $v^T P v$, senkrechte Ebene über der Geraden $v = Ax - l$ und Schnittkurve von Fläche und Ebene.

Links P positiv definit, die Lösung von (7) ist durch den tiefsten Punkt der Schnittkurve gegeben.

Rechts: P indefinit, d.h. $v^T P v$ kann beide Vorzeichen annehmen und stellt eine Sattelfläche dar. Dann hat (7) keine Lösung, da das Minimum $-\infty$ ist.

$$v^T P v > 0 \quad \text{für } v \neq 0. \quad (6) \quad \begin{matrix} a_1 \cdot x = \ell_1 + v_1 \\ a_2 \cdot x = \ell_2 + v_2 \end{matrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}; \quad p_{11}v_1^2 + 2p_{12}v_1v_2 + p_{22}v_2^2 = \min \quad (7)$$

Die Matrizen P sind immer positiv definit, ebenso die Matrizen der Normalgleichungen der Ausgleichung. Bei nicht-diagonalen vollbesetzten Gewichtsmatrizen stellt sich das Problem der Überprüfung von (6). Probleme ergeben sich, wenn die Schätzung einer Streumatrix nicht positiv definit ausfällt. Gleichungssysteme mit symmetrisch positiv definiten Matrizen werden mit Vorteil mit dem numerisch stabilen Cholesky-Verfahren gelöst ([12] S. 89). Auch in sehr guten Lehrbüchern wird der Begriff «positiv definit» häufig nur gestreift, vgl. [13] S. 225. Die Eigenschaft positiv definit sorgt dafür, dass der Graph der Funktion $v^T P v$ nach oben geöffnet ist und die Ausgleichungsaufgabe überhaupt eine Lösung hat. Dies ist in Abb. 5 anhand einer kleinsten Ausgleichungsaufgabe (7) illustriert.

Bezugsrahmenwechsel und Entzerrung

Seit der Einführung von GNSS-Systemen stellt sich das Problem, wie die alten, herkömmlich bestimmten Punktkoordinaten weiter verwendet werden können. Zur Umrechnung hat sich ein dreistufiges Vorgehen etabliert: Bezugsrahmenwechsel LV03 \rightarrow LV95 mit den finiten Affintransformationen in der Dreiecksvermaschung CHENyx06 (im swisstopo Programm GeoSuite/REFRAME realisiert), dann sind die mit REFRAME gerechneten LV95-Koordinaten in die neu gemessenen GNSS-Koordinaten zu transformieren und abschliessend die Restklaffungen zu interpolieren. Am IVGI bildeten und bilden die Methoden zur Ermittlung einer Dreiecksvermaschung und Interpolation wichtige

Themen in Projekt- und Diplomarbeiten. Die Bestimmung einer Dreiecksvermaschung wie CHENyx2006 setzt die Kenntnis der lokalen Verzerrungen der LV03-Koordinaten voraus, welche durch die Geschichte der lokalen Vermessung bedingt sind. Solche systematischen Verzerrungen können nicht durch einen bestimmten Funktionstyp beschrieben werden. In den neueren Methoden der Kollokation und Filterung bzw. der nichtparametrischen Regression stehen leistungsfähige statistische Methoden zur Verfügung, vgl. [14], [15]. Im eindimensionalen Kurvenfit-Beispiel von Abb. 6 ist das Problem solcher Schätzungen erläutert. Aus den Daten ist

die schwarze Kurve mit Ecken zu schätzen, ihr Funktionstyp ist unbekannt. Es handelt sich um ein schlecht gestelltes Problem, welches durch Regularisierung zu lösen ist. D.h. es ist eine geeignete Balance (Mitte) zwischen Fit (links) und Glättung (rechts) zu finden, was in [16] S. 249 erläutert wird. Mit Regularisierung durch verallgemeinerte Kreuzvalidierung (Generalized Cross Validation GCV, [14] S. 30, [15] S. 45, 117) erhielten wir bei unseren Auswertungen die besten Ergebnisse. Details der Rechnungen finden sich in [17], zur effizienten Berechnung siehe [18]. Abb. 7 zeigt die Änderungen der mit nichtparametrischer Regression mit Kreuzvalidierung geschätzten systematischen Verzerrungen der Transformation LV03 \rightarrow LV95 für den Kanton Baselland. Die markantesten Teilflächen («Schollen») gleicher systematischer Verzerrungen las-

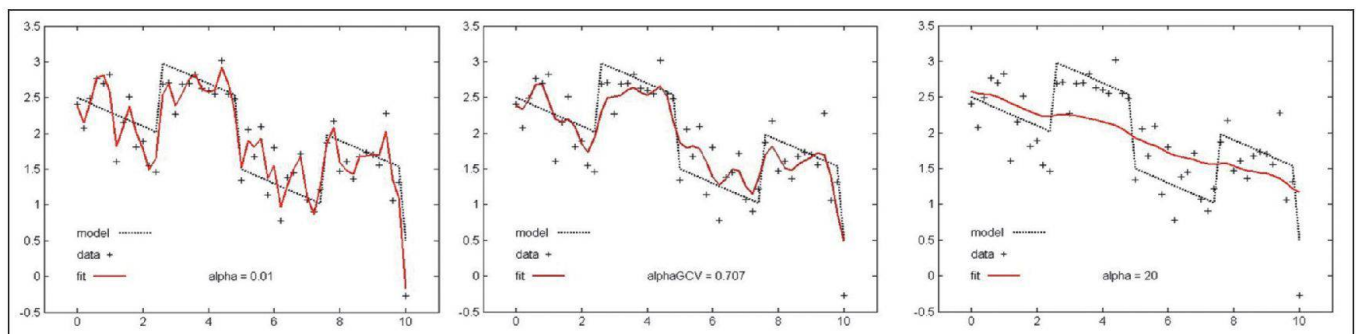


Abb. 6: Die simulierten Daten streuen um die stückweise geradlinige Funktion. «alpha» ist ein Parameter, welcher die Balance zwischen Fit und Glättung steuert. In der Mitte die mit Kreuzvalidierung bestimmte Lösung.

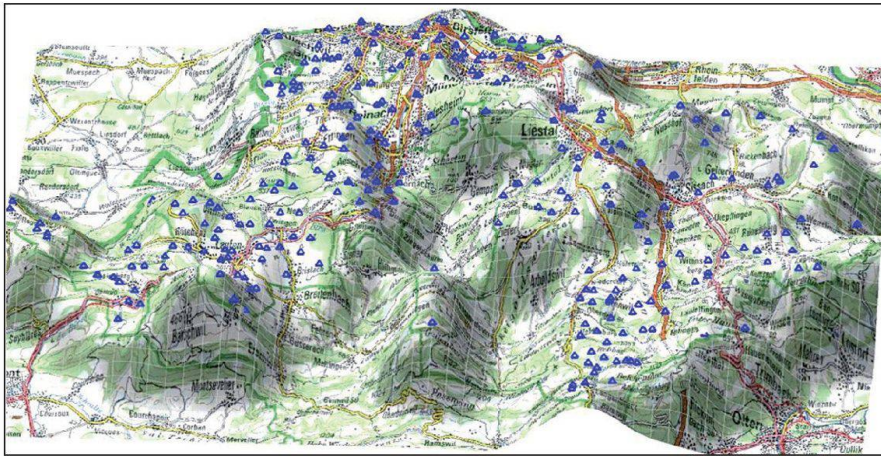


Abb. 7: Kanton Baselland, «Höhe» = Änderungen der systematischen Verzerrungen der Transformation LV03 → LV95.

sen sich häufig von Auge erkennen. Mit einer am Institut entwickelten Software «Schollendetektierung» ergibt sich ein objektives Bild, und es können auch differenziertere Feinheiten detektiert und schwierige Zonen analysiert werden [19].

Interpolation der Restklaffungen

In den letzten Jahren wurden am IVGI verschiedene neuere Interpolationsverfahren implementiert und auf reale Datensätze angewandt [20]: Inverse Distance Weighting (TRANSINT, CDL usw.), Natural Neighbour sowie Multiquadratische Interpolation. Letztere ist eine radiale Basisfunktions-Methode [21]. Diese empfehlen Spezialisten der numerischen Mathematik nach neusten Erkenntnissen, um die Restklaffungskomponenten (in E und N Richtung) zu interpolieren [22]. Die Interpolation riesiger Datensätze (tausende von Stützpunkten, zehntausende von zu interpolierenden Punkten) erfordert leistungsfähige numerische Algorithmen und Rechenprozesse, eine neue Herausforderung, die «Ingenieurgeodäsie und Mathematik» meistern wollen.

Zeitreihenanalyse

Eine weitere fruchtbare Wechselbeziehung zwischen den beiden Disziplinen ergibt sich bei der Analyse lückenloser und langzeitlicher geodätischer Überwa-

chungsmessungen von Veränderungsprozessen. Erste operationelle Erkenntnisse haben die beiden Dozenturen aus Anwendungen und Bachelor Theses geschöpft [23].

Literatur:

- [1] Toepell, M.-M. (1986): Über die Entstehung von David Hilberts «Grundlagen der Geometrie». Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- [2] Euklid (1980): Die Elemente. übersetzt von Thae, C. Darmstadt: wiss. Buchgesellschaft.
- [3] Corpus Agrimensorum Romanorum (1979): Codex Arcerianus der Herzog August Bibl. zu Wolfenbüttel. Leiden: Faksimile Ausgabe.
- [4] http://de.wikipedia.org/wiki/Sieben_Freie_Künste [zugegriffen 27.2.2013]
- [5] www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904612.html [zugegriffen 27.2.2013]
- [6] Dryden, I. L. and Mardia, K. V. (1998): Statistical Shape Analysis. New York: Wiley.
- [7] Schmid, H.H. und Heggli S. (1978): Räumliche Koordinatentransformation. Zürich: ETH IGP-Mitteilung Nr. 23.
- [8] Kuipers, J. B. (1999): Quaternions and Rotation Sequences. Princeton and Oxford: Princeton Univ. Press.
- [9] Witte, B. und Spalla, P. (2011): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, 7. Aufl. Berlin: Wichmann.
- [10] Asbeck et al. (2012): Vermessung und Geoinformation. 12. Aufl. Düsseldorf:

Fachbuch für Vermessungstechniker und Geomatiker.

- [11] Blatter, C. (1974): Analysis II, 1. Aufl. Berlin: Springer.
- [12] Golub, G. H. and van Loan, C. F. (1985): Matrix Computations. Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press.
- [13] Niemeier, W. (2008): Ausgleichungsrechnung. 2. Aufl. Berlin: de Gruyter.
- [14] Green, P. and Silverman, B. (1994): Non-parametric Regression and Generalized Linear Models. London: Chapman and Hall.
- [15] Ruppert, D., Wand, M. and Carroll, R. (2003): Semiparametric Regression, Cambridge: Cambridge University Press.
- [16] Moritz, H. (1989): Advanced Physical Geodesy. 2nd ed. Karlsruhe: Wichmann.
- [17] Fischer, B. and Hegland, M. (1999): Collocation, Filtering and Nonparametric Regression. In: ZfV 124(1), S. 17–24, 124(2), S. 46–52.
- [18] Fischer, B. (2009): Modellierung von Rutschhängen mit numerisch optimierter Kollokation und Filterung. In: AVN 116(8–9), S. 315–319.
- [19] Nicht publizierte Diplomarbeiten am IVGI FHNW: Schwaninger, M. (2002), Brühlmann, P. (2004), Fischer, H. J. und Grütter, C. (2005), Meier, R. (2007).
- [20] Nicht publizierte Bachelor Theses am IVGI FHNW: Bruderer, C. und Müller, M. (2008), Rüdiger, L. (2010), Schilling, P. (2009), Arnosti, A. (2011).
- [21] Buhmann, M. D. (2003): Radial Basis Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [22] Trefethen, N. (Oktober 2012): Mündliche Mitteilung.
- [23] Nicht publizierte Master Thesis Walch, M. (2012) und Bachelor Theses am IVGI FHNW: Stäheli, P. und Oggier, A. (2010), Pinto, C. (2011), Schenk, N. (2012).

Prof. Dr. Beat Fischer
Prof. Beat Sievers
Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Architektur,
Bau und Geomatik
Institut Vermessung und Geoinformation
Gründenstrasse 40
CH-4132 Muttenz
beat.fischer@fhnw.ch
beat.sievers@fhnw.ch