Zeitschrift: Geomatik Schweiz : Geoinformation und Landmanagement = Géomatique Suisse : géoinformation et gestion du territoire = Geomatica Svizzera : geoinformazione e gestione del territorio

Herausgeber: geosuisse : Schweizerischer Verband für Geomatik und Landmanagement

Band: 103 (2005)

Heft: 12

Artikel: Zur Messunsicherheit im Vermessungswesen (II)

Autor: Heister, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-236276

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Messunsicherheit im Vermessungswesen (II)

Im vorangegangenen ersten Teil (Geomatik Schweiz 11/2005) wurde der Begriff der Messunsicherheit eingeführt, so wie er international in der ISO definiert wurde (GUM). In diesem zweiten Teil werden typische Beispiele aus der Vermessungspraxis behandelt, die zum einen das Schema zur numerischen Bestimmung darlegen, zum anderen aber auch die Vorteile gegenüber dem bisherigen Vorgehen zur Angabe der Genauigkeit von Messergebnissen herausstellen sollen. Hierbei wird besonders die standardisierte Behandlung von zufälligen und systematischen Einflussgrössen auf die quantitative Ermittlung der Messunsicherheit deutlich.

Dans la première partie (Géomatique Suisse 11/2005), la notion de l'insécurité du mesurage a été décrite telle qu'elle a été définie dans l'ISO sur le plan international (GUM). Dans cette deuxième partie on traitera d'exemples typiques issus de la pratique de la mensuration, décrivant d'une part le schéma de la détermination numérique et mettant d'autre part en évidence les avantages par rapport au procédé traditionnel de l'indication de la précision de résultats de mesurages. Dans ce contexte apparaîtra notamment le traitement standardisé de facteurs aléatoires et systématiques qui influeront sur la détermination de l'insécurité du mesurage.

Nella parte introduttiva (Geomatica Svizzera 11/2005) si è illustrato il concetto di «insicurezza di misurazione», come definito internazionalmente dall'ISO (GUM). In questa seconda parte si presentano degli esempi tipici, presi dalla pratica, che, da una parte, servono a rappresentare lo schema delle determinazione numerica e dall'altra evidenziano i vantaggi rispetto al procedimento tradizionale per indicare la precisione dei risultati di misurazione. Al riguardo, appare chiaramente il trattamento standardizzato dei parametri sistematici di influenza sulla comunicazione quantitativa della sicurezza di misurazione.

H. Heister

Wie wird die Messunsicherheit in der messtechnischen Praxis berechnet?

Im Folgenden werden nun an verschiedenen kleineren aber auch komplexeren Beispielen analog zu den dargelegten Formeln im ersten Teil typische geodätische Messvorgänge behandelt, um für charakteristische Messgrössen die Messunsicherheit zu berechnen.

1. Beispiel: Azimutbestimmung mit nordsuchendem Kreiseltheodolit

Zur Azimutübertragung auf eine Tunnel-Polygonseite wurde zunächst auf einer Referenzlinie im Portalnetz der lokale Kalibrierwert

$$E = t - (W_{Ref} + v_{TR}) \qquad (15)$$

bestimmt. Hierin bedeutet

- t der aus Koordinaten bestimmte Richtungswinkel,
- W_{Ref} das Mittel der auf der Referenzlinie durchgeführten Kreiselmessungen (Weisung),
- v_{TR} Temperaturverbesserung auf die Referenztemperatur 20 °C.

Danach konnten die Kreiselmessungen im Tunnel auf der Polygonseite von ca. 260 m Länge auch jeweils im Hin- und Rückgang durchgeführt werden. Mit analogen Bezeichnungen wie oben lässt sich dann das Azimut nach folgendem funktionalen Modell berechnen:

$$A = W_{Poly} + v_{TP} + E = W_{Poly} + v_{TP} + t - (W_{Ref} + v_{TR}) \,. \qquad (16)$$

Die Auswertung der Messprotokolle ergab für die Weisung W_{Ref} eine empirische Standardabweichung von

$$s_w = 0{,}4 \text{ mgon} \,.$$

Die Beobachtungsverhältnisse im Tunnel wurden so beschrieben, dass mit Horizontalrefraktion zu rechnen war, die sich vorrangig einseitig auf die Kreiselmessungen ausgewirkt hat. Eine Abschätzung über den horizontalen Temperaturgradienten führte für W_{Poly} zu folgenden asymmetrischen Grenzen:

$$b_- = -2{,}0 \text{ mgon} \,, \quad b_+ = +0{,}5 \text{ mgon} \,.$$

Unter Berücksichtigung einer Zentriergenauigkeit von e = ± 1 mm für Stand- und Zielpunkt im Tunnel leitet sich bei der angegebenen Zielentfernung eine untere und obere Grenz ab:

$$a_+ = W_{Poly} + 0{,}5 \text{ mgon} \quad a_- = W_{Poly} - 0{,}5 \text{ mgon}$$

bzw. wird nach Formel (5)

$$a = 0{,}5 \text{ mgon} \,.$$

Geht man weiter davon aus, dass die Temperaturkalibrierung mit einer Standardabweichung für v_T von

$$s(v_T) = 0{,}2 \text{ mgon}$$

durchgeführt wurde und dass in der Ausgleichung des Tunnelpolygons die Standardabweichung für den Richtungswinkel t mit

$$s(t) = 0{,}3 \text{ mgon}$$

geschätzt wurde, dann lässt sich die kombinierte Messunsicherheit für das Azimut angeben mit

$$u_c(A) = \sqrt{u(w_{Ref})^2 + u(w_{Poly})^2 + 2 \cdot u(v_T)^2 + u(t)^2 + u(e)^2} \,. \qquad (17)$$

Hierin bedeuten

$u(w_{Ref}) = s_w$

die Standardunsicherheit der Kreiselmessung auf der Referenzlinien (Kategorie A) ,

$$u(w_{Poly}) = \sqrt{\frac{1}{3}\ a^2 + \triangle^2}$$

die Messunsicherheit (Kategorie B) bei asymmetrischen Grenzen, berechnet gemäss Formel (11) bis (14) mit a = 1,25 mgon und $\triangle = -1{,}25$ mgon,

$u(v_T) = s(v_T)$

die Standardunsicherheit (Kategorie A) der Temperaturverbesserungen v_{TR} und v_{TP},

$u(t) = s(t)$

die Standardunsicherheit (Kategorie A) des ausgeglichenen Richtungswinkels t und

$u(e) = a$

die Messunsicherheit (Kategorie B) gemäss Formel (8) für die Stand- und Zielpunktexzentrizitäten e (Zentriergenauigkeiten).

Mit den oben angegebenen numerischen Werten lässt sich dann der Ausdruck (17) umschreiben in:

$$u_c(A) = \sqrt{0{,}4^2 + 1{,}4^2 + 2 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}5^2}\,.$$

Somit kann schliesslich die kombinierte Messunsicherheit des Azimutes der Tunnel-Polygonseite mit

$u_c(A) = 1{,}6$ mgon

angegeben werden. Erwartungsgemäss liefert die systematische Einflussgrösse Horizontalrefraktion hierzu den grössten Beitrag. Hätten keine Refraktionsbedingungen vorgelegen, dann verringert sich die Messunsicherheit auf

$u_c(\widetilde{A}) = 0{,}8$ mgon .

2. Beispiel: Elektrooptische Distanzmessung

Für ein Distanzmessgerät wurde auf einer EDM-Prüfstrecke, deren Aufteilung Streckenmessungen unter gleicher Phasenlage vorsieht, nach ISO 17123 – Part 4 die Standardabweichung aus der Ausgleichung mit

$s(s_o) = 3{,}8$ mm für $s_o = 500$ m

und die Additionskonstante

c = 5,4 mm mit s(c) = 0,8 mm

geschätzt.

Aus der Fachliteratur ist bekannt, dass die Amplitude des periodischen Restfehlers dieses Gerätetyps mit

A = 2 mm

angesetzt werden kann. Weiterhin ergab die Frequenzüberprüfung eine Massstabsabweichung von

$m_1 = +8$ ppm ,

woraus sich für die unkorrigierte Rohstrecke eine Massstabskorrektur von

$$\delta m_1 = \widetilde{s}' \cdot m_1 \qquad (18)$$

ableitet. Der Prüfingenieur wies für die Massstabsbestimmung aus Erfahrung eine Messunsicherheit von

$u(m_1) = 2{,}0$ ppm

aus.

Mit der gleichen Messausrüstung wurde nun bei einer polaren Punktbestimmung eine Strecke zu

s' = 726,138 m

gemessen. Hierin ist

$$s' = \widetilde{s}' + c + \delta m_2\,, \qquad (19)$$

Dabei wurde die Additionskonstante c und der eingestellte ppm-Wert

$m_2 = 6$ ppm

für die meteorologische Korrektur

$$\delta m_2 = \widetilde{s}' \cdot m_2 \qquad (20)$$

bereits geräteintern berücksichtigt. Der verantwortliche Vermessungsingenieur beurteilte jedoch die Schwankungsbreite für die Temperaturmessungen mit ± 2 °C. Für die Korrektur der Streckenmessung bedeutet dies eine Breite von

$dm_2 = \pm 2$ ppm.

Gesucht ist nun das vollständige Messergebnis!

Gemäss Formel (3) kann das funktionale Modell der Eingangsgrössen wie nachfolgend formuliert werden:

$$s = f(\widetilde{s}', c, A, \delta m_1, \delta m_2) = \widetilde{s}' + c + \widetilde{A} + \delta m_1 + \delta m_2\,. \qquad (21)$$

Auf die Berechnung eines Korrekturwertes $\widetilde{A}$ für die Amplitude des periodischen Fehlers wurde verzichtet.

Das in Tabelle 2 zusammengefasste Rechenschema sieht vor, dass zunächst in den ersten beiden Spalten die in Formel (21) dargestellten Eingangsgrössen und ihre Schätzwerte eingetragen werden. Danach können für die verschiedenen Eingangsgrössen die Messunsicherheiten übernommen werden:

1. Für die Messunsicherheit der Streckenmessung gilt

$u(\widetilde{s}') = c_1 \cdot u(s_0)$ mit $u(s_0) = s(s_0)$ und $c_1 = \frac{s}{s_0}$.

D.h. die aus der Ausgleichung (s.o.) geschätzte Standardabweichung wird in die Standardunsicherheit der Eingangsgrösse «Rohstrecke» mit dem Sensitivitätskoeffizienten c_1 überführt und ist somit eine Komponente der Kategorie A.

2. Für die Messunsicherheit der Additionskonstanten wird genauso die statistisch geschätzte Standardabweichung (s.o.) übernommen

u(c) = s(c) ,

die ebenfalls eine Komponente vom Typ A ist.

Einflussgrösse X_i	Schätzwert x_i [m]	Messunsicherheit $u(x_i)$ [mm]	Verteilung	Sensitivitäts-Koeffizient $c_i = \partial f / \partial x_i$	$u(\widetilde{x}_i) = c_i \cdot u(x_i)$ [mm]	Kategorie, Unsicherheitsquelle
$\widetilde{s}'$	726,128$_2$	3,8	Normal	1,45	5,5	A, zufällige Einflüsse
c	0,005$_4$	0,8	Normal	1	0,8	A, zufällige Einflüsse
$\widetilde{A}$	0	1,2	Rechteck	1	1,2	B, period. Fehler
δm_1	0,005$_8$	2,0	Normal	0,726	1,4	B, zufällige Einflüsse, geschätzt
$\delta m2$	0,004$_4$	3,0	Normal	0,726	2,2	B, Temperaturschwankungen
Messergebnis	726,144				6,3	

Tab. 2: Berechnung des vollständigen Messergebnisses.

3. Da der periodische Fehler nur durch Informationen aus Fachbeiträgen für diesen Gerätetyp abgeschätzt wurde, musste auf eine Korrektur unter Einbeziehung der richtigen Phasenlage verzichtet werden. Somit kann die Amplitude A nur zur Festlegung einer oberen Grenze a_+ bzw. unteren Grenze a_- herangezogen werden (s. Formel [4]). Unter Annahme einer Rechteckverteilung und Wahrscheinlichkeit von *p = 100%,* dass diese Grenzen nicht überschritten werden, lässt sich mit (5) und unter Berücksichtigung von (6) die Messunsicherheit nach (10) bestimmen:
$u(\widetilde{A}) = 0{,}58 \times 2 = 1{,}2$ mm.

4. Die Korrektur des Massstabes wird durch die Eingangsgrösse δm_1 (s. Formel [18]) beschrieben. Ihre Standardunsicherheit vom Typ B konnte über Erfahrungswerte des Prüfingenieurs festgelegt werden. Mit dem Sensitivitätskoeffizienten $c_4 = \widetilde{s}'$ wurde schliesslich der Beitrag zum Messunsicherheitenbudget bestimmt.

5. Die letzte Eingangsgrösse δm_2 (s. Formel [20]) ist die meteorologische Korrektur. Ihre Unsicherheit wird durch die abgeschätzte Bandbreite in der Temperaturerfassung beschrieben. Unter der Annahme, dass die Abschätzung dieser Bandbreite nur mit einer Wahrscheinlichkeit von *p = 50%* vorgenommen werden konnte, wird die Messunsicherheit (vom Typ B) nach Formel (5) und (7) abgeschätzt. Mit

$$a = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2 \quad \text{wird} \quad u(m_2) = 1{,}48\ a = 3 \text{ mm.}$$

Über den Sensitivitätskoeffizienten $c_5 = \widetilde{s}'$ kann dann wieder der Unsicherheitenbeitrag für die gemessene Distanz abgeleitet werden.
Die einzelnen Messunsicherheiten werden abschliessend nach Formel (1) zur kombinierten Messunsicherheit
$u(s)_c = 6{,}3$ mm
zusammengefasst. Wenn auch hierbei die Unsicherheiten der Eingangsgrössen Additionskonstante, periodischer Fehler und Massstab keinen erheblichen Anteil zur kombinierten Unsicherheit beitragen, so ist doch der numerische Nachweis zum gesamten Unsicherheitenbudget vollzogen worden. Soll die erweiterte Messunsicherheit angegeben werden, dann wird mit k=2 (Grad des Vertrauens von ~95%)
$U(s) = \pm 2\, u_c$,
so dass unter Anbringung aller Korrekturen das vollständige Messergebnis für die Streckenmessung mit
s = 726,144 m ± 12,6 mm
anzugeben ist.

3. Beispiel: Polares Anhängen

Die Messmethode des polaren Anhängens stellt heute eines der wichtigsten Verfahren der terrestrischen Punktbestimmung dar. In den meisten Fällen werden dabei die Beobachtungen nur noch in einer Lage durchgeführt, wobei jedoch die im Tachymeter abgespeicherten Korrekturwerte für die Achsfehler direkt berücksichtigt werden. In Weiterführung des 2. Beispiels können folgende Messungen und Ausgangswerte angegeben werden:

- Koordinaten des Standpunktes P_0
  $x_0 = 12345{,}658$ m $y_0 = 87654{,}321$ m
  mit $s_x = 1{,}8$ cm $s_y = 1{,}6$ cm
- Anschlussrichtungswinkel
  $t_A = 343{,}4343$ gon $s(t_A) = 0{,}4$ mgon

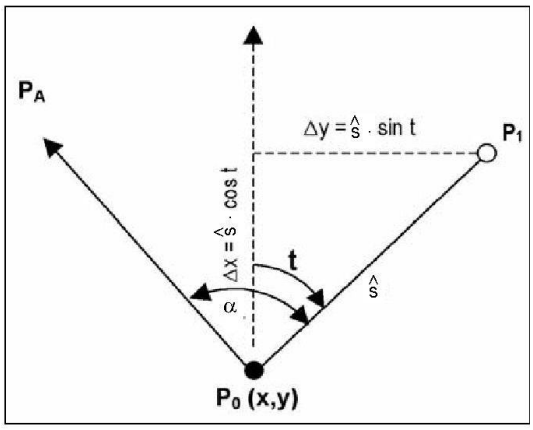

Abb. 3: Polares Anhängen.

- Gemessene Anschlussrichtung
  $\alpha = 99{,}9999$ gon $s(\alpha) = 0{,}5$ mgon
- Gemessene Distanz
  s = 726,144 m $u(s)_c = 0{,}63$ cm
- Gemessene Zenitdistanz
  z = 97,5310 gon s(z) = 0,8 mgon

Zur Bestimmung der Messunsicherheit der Koordinaten von P1 wurde folgendes funktionales Modell aufgestellt (hier wird exemplarisch nur die x-Komponente behandelt):

$$x_1 = x_0 + \hat{s} \cdot \cos t = x_0 + \hat{s} \cdot \cos(\alpha - t_A) \quad (22)$$

Einflussgrösse X_i	Schätzwert x_i [m]	Messunsicherheit $u(x_i)$ [mm]	Verteilung	Sensitivitäts-Koeffizient $c_i = \partial f / \partial x_i$	$u(\widetilde{x}_i) = c_i \cdot u(x_i)$ [mm]	Kategorie, Unsicherheitsquelle
x_0	12345,678 m	18 mm	Normal	1	18	A, Schätzung aus Ausgleichung
s	732,144 m	6,3 mm	Normal	0,78	4,9	B, kombinierte Messunsicherheit
z	97,5310 gon	0,8 mgon	Normal	0,35	0,3	B, system. und zufällige Einflüsse
α	99,9999 gon	0,5 mgon	Normal	7,19	3,6	B, zufällige Einflüsse, Erfahrung
k_z	0,0024 gon	0,3 mgon	Rechteck	7,20	2,2	B, Firmenangabe
k_i	0,0003 gon	0,3 mgon	Rechteck	0,28	0,1	B, Firmenangabe
k_y	0,0008 gon	0,3 mgon	Rechteck	0,28	0,1	B, Firmenangabe
t_A	343,4343 gon	0,4 mgon	Normal	7,19	2,9	A, Schätzung aus Ausgleichung
Messergebnis	12913,477 m				19,4 mm	

Tab. 3: Berechnung der kombinierten Messunsicherheit beim polaren Anhängen.

Und unter Berücksichtigung der Achsfehlerkorrekturen (k_z für den Zielachsfehler, k_i für den Kippachsfehler und k_v für den Stehachsfehler) wird (22) zu

$$x_1 = x_0 + s \cdot \sin z \cdot \cos(\alpha + k_z + k_i + k_v + t_A) \quad (23)$$

Es lässt sich somit wieder das folgende tabellarische Berechnungsschema anschreiben (siehe Tab. 3).
Auch dieses Beispiel macht deutlich, wie einerseits verschiedene Informationsquellen über die Messunsicherheit der Eingangsgrössen verwertet werden können, andererseits aber auch klar dargelegt wird, welchen Unsicherheitenbeiträgen besondere Bedeutung zukommt.

Welche Auswirkungen und Vorteile hat die Messunsicherheit für die Geodäsie?

Die Fortentwicklung der Messsysteme und die weitgehende Automatisierung nahezu aller Messprozesse in der Geodäsie hat einerseits die Genauigkeit erheblich verbessert, andererseits aber auch den Anteil nicht modellierbarer oder auch unbekannter Einflüsse deutlich erhöht. Hinzu kommt, dass mehr und mehr diese Messprozesse durch eine geringe Stichprobe gekennzeichnet sind. Dies alles hat dazu geführt, dass mit den Mitteln der klassischen Statistik die Genauigkeitsmasse wie Standardabweichung nur unzureichend bestimmt werden können. Repräsentative quantitative Genauigkeitsangaben und eine wohlbegründete Genauigkeitsanalyse sind aber unverzichtbare Kennzeichen jeder messenden Fachdisziplin; hierzu gehört auch die Geodäsie, die gerade auf diesem Gebiet mit ihren statistischen Auswerteverfahren und der Methode der kleinsten Quadrate auf eine lange Tradition zurückblicken kann.
Mit dem GUM wird nun erstmals die Möglichkeit eröffnet, nach einer objektivierten Methode, zufällige und systematische Einflussgrössen in *einem* Genauigkeitsmass – der *Messunsicherheit* – zu berücksichtigen. Das weitgehend auf statistischen Theorien beruhende Verfahren wurde dort so aufgearbeitet, dass es auch für die Praxis zugänglich geworden ist. Da der GUM nur eine allgemeine Anweisung darstellt, sind jetzt die einzelnen Fachgebiete gefordert, diese für ihre typischen Anwendungen durch spezifische Anleitungen oder Normen umzusetzen. Dies ist bisher in der Geodäsie und im Vermessungswesen nur zögerlich zu erkennen (DIN 18710). Dass jedoch die Notwendigkeit hierfür gegeben ist, steht ausser Zweifel, insbesondere auch dadurch, dass ein Grossteil unserer Messtätigkeiten interdisziplinär stattfindet und somit eine einheitliche «Sprache» unabdingbar ist. Sicherlich wird es in unserem Fachgebiet noch weitere kontroverse Diskussionen (Schmidt, 2003, Kutterer und Schön, 2004) geben, ob die Voraussetzungen, die dem theoretischen Hintergrund – der Bayes-Statistik – genügen sollten, erfüllt sind. Ob hierbei die kritisierten Vernachlässigungen numerische Auswirkungen haben können, sei dahingestellt.
Der besondere Vorteil des im GUM dargestellten Berechnungsverfahrens zur Messunsicherheit ist darin zu sehen, dass es sich mit internationalen Empfehlungen identifiziert und subjektiven Vorgehensweisen – mögen sie auch im Einzelfall theoretisch exakter sein – keinen Spielraum lässt. Die Genauigkeitsangabe ist somit für *jeden* Nutzer eindeutig interpretierbar. Bezog sich der Geodät bisher bei seinen Genauigkeitsberechnungen vorrangig weitgehend nur auf Genauigkeitsmasse, die durch zufällige Einflussgrössen bestimmt wurden, so sollte er zukünftig auch den zweiten Schritt vollziehen, nämlich die Berücksichtigung der Unsicherheiten von systematischen Einflussgrössen. Die quantitative Grösse ist durch die *Messunsicherheit* definiert, das Handwerkszeug zu ihrer Berechnung wird durch den GUM bereitgestellt.
Werden die Messungen selbst heute mehr und mehr durch weniger qualifiziertes Personal durchgeführt, so wird es unumgänglich sein, dass die Genauigkeitsanalyse von qualifizierten Messingenieuren vorzunehmen ist, die über eingehende Kenntnisse der Messprozesse verfügen. Die einzelnen Schritte der Unsicherheitenanalyse – so wie sie in diesem Beitrag an typischen Fällen exemplarisch aufgezeigt wurde – sind nicht nur zur korrekten Quantifizierung des Genauigkeitsmasses geboten, sie liefern darüber hinaus weitere Teilaspekte, die auch im Rahmen eines Qualitätsmanagementsystems gefordert werden: So wird aufgedeckt, wo die grössten Unsicherheitenbeiträge entstehen und wo Verbesserungen im Messprozess mit dem Ziel einer Genauigkeitssteigerung besonders sinnvoll sind; andererseits wird auch erkennbar, wo eine grössere Unsicherheit ohne weiteres akzeptiert werden kann, ohne dass die dem Messergebnis beizuordnende Messunsicherheit wesentlich verändert wird. Dadurch kann im Einzelfall ein günstigeres Messinstrument oder gar eine wirtschaftlichere Messmethode eingesetzt werden.
Der Weg zur Bestimmung der Messunsicherheit ist vorgezeichnet, ob wir ihn schneller oder langsamer durchlaufen liegt an uns, auf jeden Fall wird es in einigen Jahren üblich sein, sowohl die Qualität eines Messwertes als auch eines Messinstrumentes durch seine beizuordnende *Messunsicherheit* quantitativ zu beschreiben.

Literatur:

Siehe Teil I in Geomatik Schweiz 11/2005.

Prof. H. Heister
Institut für Geodäsie der UniBwM
DE-85577 Neubiberg
h.heister@unibw.de