Grundlagen, Gebrauchsformeln und Anwendungsbeispiele der Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten

Autor(en): **Welsch, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **82 (1984)**

Heft 9

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-232117

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

7. Ergänzende Bemerkungen

Aus der obenstehenden Beschreibung könnte der Eindruck entstehen, dass das angewandte Verfahren kompliziert sei. Das ist jedoch nicht der Fall. Erstens rechtfertigen die beseitigten und für den Betrachter in ihrer Grössenordnung ansonsten als unverträglich erschienenen Verzerrungen einen solchen Prozess. Zum anderen ist die Problemlösung für jeden Photogrammeter einfach durchschaubar und dank verbreitet vorhandener Rechenprogramme leicht und rasch realisierbar. Das Bild auf der Umschlagseite eines Firmenprospektes wird als gelungener Versuch gewertet.

Für die Reproduktion in dieser Zeitschrift musste wegen der Kopfleiste allerdings ein Beschnitt in Kauf genommen werden.

Für das Verfahren sind auch verschiedene terrestrische Anwendungen denkbar. Zum Beispiel die photographische ‹Transplantation› eines regionaltypischen Schweizer Hauses *vor* seinem Abbruch am gegenwärtigen Standort an den im Freilichtmuseum Ballenberg/BE vorgesehenen Ort. Die Lösung ist in diesem Fall etwas aufwendiger, denn der neue Standort ist dann vorgegeben. Dies bedingt, dass sowohl am alten Ort wie im Freilichtmuseum der relative Aufnahmestandort zum Gebäude eingehalten werden muss. Die Aufnahmerichtung und die Kammerkonstante können jedoch (in Grenzen) nach wie vor verschieden sein.

Ein solches Projekt war zur Verfahrensillustration vorgesehen, konnte aber noch nicht ausgeführt werden.

Literatur:

[1] G.E. Bormann und E. Vozikis: ‹Photographische Kartenumbildungen mit dem Wild Avioplan OR1›, Kartographische Nachrichten Heft 6, Dez. 1982

Adresse des Verfassers:
G.E. Bormann
Wild Heerbrugg AG, CH-9435 Heerbrugg

Grundlagen, Gebrauchsformeln und Anwendungsbeispiele der Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten*

W. Welsch

Die Theorie der Varianz-Kovarianz-Komponenten(VKK)-Schätzung dient der besseren Ausschöpfung des Informationsgehalts geodätischer Messungen. Sie mag auf den ersten Blick kompliziert und praxisfremd erscheinen, erweist sich aber gerade bei alltäglichen Problemen der geodätischen Praxis als hilfreich und genauigkeitssteigernd.

Die Arbeit gibt einen gerafften Überblick über Theorie und Anwendungen der VKK-Schätzung. In einem ersten Abschnitt werden die grundsätzlichen Modellvorstellungen dargelegt. Schwerpunkt ist die Analyse der linearen Dispersionsstruktur der Beobachtungen und das darauf aufbauende VKK-Modell. Der zweite Abschnitt ist der Ableitung des Schätzers gewidmet, der – um wirksam zu sein – bestimmte optimale Eigenschaften besitzen soll. Als optimal wird ein invarianter, erwartungstreuer Schätzer minimaler Varianz angesehen. Es wird gezeigt, welche Voraussetzungen für die Konstruktion eines solchen Schätzers erfüllt sein müssen. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit Formeln für die praktische Durchführung der VKK-Schätzung. Nach Ableitung des gewöhnlichen Schätzers für die Einheitsvarianz werden die Schätzer für Varianz- sowie für Kovarianzkomponenten entwickelt. Der letzte Abschnitt schliesslich analysiert einige Anwendungen aus der Vermessungspraxis.

La théorie de l'estimation des composantes de la matrice des variances-covariances (CMVC) sert à mieux exploiter le contenu en informations des observations géodésiques. Initialement ce concept peut apparaître compliqué et inapplicable, mais une approche plus détaillée montre qu'il offre une précision supérieure lors des problèmes géodésiques journaliers de la pratique.

Cet exposé présente un aperçu de la théorie de l'estimation des CMVC et de son application. Le premier paragraphe décrit les modèles fondamentaux, le centre de gravité en étant l'analyse de la structure linéaire de dispersion des observations, ainsi que le modèle CMVC qui en découle. Le second paragraphe est consacré à la dérivation des estimateurs, qui, pour être efficaces, doivent posséder certaines propriétés optimales. Est considéré comme optimal un estimateur invariant, sans biais et possédant une variance minimale. Les conditions requises pour la réalisation de l'estimateur sont également formulées. Le troisième paragraphe traite des formules pour l'emploi des CMVC. Après la dérivation de l'estimateur pour la variance unitaire, on y développe les estimateurs des composantes de la matrice des variances et variances-covariances. Enfin le dernier paragraphe analyse quelques utilisations pour la pratique.

Der Informationsgehalt geodätischer Beobachtungen wird – insbesondere bei heterogenem Material – häufig durch ‹gewöhnliche› Ausgleichungsansätze nicht ausgeschöpft, da im allgemeinen neben den unbekannten Parametern des funktionalen Modells mit der Varianz der Gewichtseinheit nur eine einzige globale Grösse des stochastischen Modells geschätzt wird. Liegen jedoch a priori Kenntnisse der stochastischen Struktur der Beobachtungen vor, so wird die Schätzung von Varianz- und Kovarianz*komponenten* (VKK) möglich, die häufig zu einer Verbesserung der Ausgleichungsergebnisse führt.

Einige Beispiele sollen diese Aussage und Anwendungsmöglichkeiten erhellen:

Bisweilen bereitet es Schwierigkeiten, in einem kombinierten Richtungs- und Streckennetz die Gewichtsverhältnisse der heterogenen Beobachtungen aufeinander abzustimmen. Erfahrungswerte helfen, versagen meist aber schon dann, wenn bei einem räumlichen Netz die Genauigkeit der Zenitdistanzen angegeben werden soll, da gerade sie von zahlreichen, nicht quantifizierbaren Faktoren beeinflusst wird. Die Ermittlung der Beobachtungsgenauigkeiten durch Methoden der VKK-Schätzung führt hier zu stichhaltigen Ergebnissen.

Die Untersuchung der Fehlerkomponenten eines EDM-Geräts, die teils konstant, teils streckenabhängig sind, ist für die Beurteilung der Leistungsfähigkeit und Einsatzmöglichkeit des Geräts oder Gerätetyps von grosser

*Nach einem Vortrag am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich im Rahmen des Geodätischen Kolloquiums am 17. Juni 1983.

Bedeutung. Aus den Beobachtungen, die mit dem betreffenden Instrument auf Teststrecken oder in Trilaterationsnetzen gewonnen wurden, können durch VKK-Schätzungen ohne weiteres die gesuchten Komponenten berechnet werden.
Die Zuverlässigkeitstheorie und die daraus resultierenden Verfahren der Grobfehlersuche lassen sich auf die Theorie der VKK-Schätzung zurückführen.
Diese und andere Beispiele werden im letzten Abschnitt der Arbeit näher analysiert. Die folgenden Ausführungen geben in geraffter Form einen Überblick über die Theorie der VKK-Schätzung.

1. Modellvorstellungen

1.1 Allgemeines Modell

Parameterschätzungen werden im allgemeinen im linearen Modell (Gauss-Markoff-Modell)

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1-1}$$

mit den Verteilungsaussagen

$$E\{\mathbf{l}\} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1-2}$$

und

$$D\{\mathbf{l}\} = \sigma^2\mathbf{Q} := \mathbf{C} \tag{1-3}$$

durchgeführt. Hierin ist $\mathbf{l}$ der $n \times 1$ Zufallsvektor der linearen oder linearisierten Beobachtungen, $\mathbf{x}$ der $m \times 1$ Vektor der unbekannten festen Parameter, die durch die $n \times m$ Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Rang $R\{\mathbf{A}\} = q \leq m < n$ mit den Beobachtungen verknüpft sind; $\mathbf{C}$ ist die positiv definite $n \times n$ Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen, die sich aus der vorgegebenen Kofaktormatrix $\mathbf{Q}$ und dem unbekannten Varianzfaktor σ^2 zusammensetzt. Der Erwartungswert $E\{\cdot\}$ und die Dispersion $D\{\cdot\}$ beschreiben in diesem Modell das statistische Verhalten der Beobachtungen vollständig.

1.2 Dispersionsstruktur

Angelpunkt der gesamten Betrachtungen zur Schätzung von VKK ist eine lineare symmetrische Dispersionsstruktur der Beobachtungen (Schaffrin, 1983)

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{c}\sigma_{ij}\mathbf{Q}_{ij}$$
$$= \sigma_{11}\mathbf{Q}_{11} + \sigma_{12}\mathbf{Q}_{12} + \ldots + \sigma_{cc}\mathbf{Q}_{cc}. \tag{1-4}$$

Mit $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ stellen die VKK den unbekannten Parametervektor $\sigma^T = |\sigma_1^2, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_c^2|$ dar und $\mathbf{Q}_{ij}$ die entsprechend vorgegebenen $n \times n$ Kofaktormatrizen. Es können angesichts der Freiheitsgrade des Gesamtsystems $c \leq n - q$ Komponenten geschätzt werden. Grundsätzlich müssen die Unbekannten $\mathbf{x}$ und σ gemeinsam geschätzt werden, da Optimalitätseigenschaften der Schätzung von beiden Unbekanntengruppen abhängen. Durch den Nachweis der Translationsinvarianz der Dispersion der Beobachtungen $D\{\mathbf{l}\} = D\{\mathbf{l} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\}$ für $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^m$ lässt sich das Problem jedoch in eine sukzessive Berechnung auflösen.
Im folgenden sollen nur noch die Unbekannten σ betrachtet werden.

1.3 Varianz-Kovarianzkomponenten-Modell

Die lineare Dispersionsstruktur lässt sich in Betrachtungen zum gemischten Modell (Koch, 1980, S.194ff., 205ff.) einbetten. Das Modell laute

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \tag{1-5}$$

worin $\mathbf{e}$ als $n \times 1$ Vektor von stochastischen Fehlerparametern angesehen werden kann, der aus der Linearkombination von $p \times 1$ Elementarfehlervektoren ϵ_i entstanden sei:

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{c}\mathbf{B}_i\epsilon_i. \tag{1-6}$$

Damit lautet Modell (1-5)

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\epsilon_1 + \mathbf{B}_2\epsilon_2 + \ldots + \mathbf{B}_c\epsilon_c. \tag{1-7}$$

Dies bedeutet mit den Verteilungsaussagen

$$E\{\epsilon_i\} = \mathbf{0} \text{ und } E\{\epsilon_i\epsilon_j^T\} = \sigma_{ij}\mathbf{E} \tag{1-8}$$

($\mathbf{E}$ Einheitsmatrix)

eine Erweiterung der Theorie der gemischten Modelle (Schaffrin, 1983, S.15) und stellt zugleich die Grundlage für das Kovarianzkomponenten-Modell von Rao (1972) dar (siehe auch Grafarend u.a., 1980). Mit (1-2) ergibt sich nämlich aus (1-7) unter Beachtung von (1-8) und $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ die Kovarianzmatrix der Beobachtungen zu

$$D\{\mathbf{l}\} = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\}$$
$$= \sigma_1^2\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T + \sigma_{12}(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^T + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_1^T) + \ldots + \sigma_c^2\mathbf{B}_c\mathbf{B}_c^T \tag{1-9}$$
$$= \sigma_1^2\mathbf{Q}_{11} + \sigma_{12}\mathbf{Q}_{12} + \ldots + \sigma_c^2\mathbf{Q}_{cc}. \tag{1-4}$$

Die Spezialisierung des Kovarianzkomponenten- zum Varianzkomponenten-Modell ergibt sich aus der Modifizierung der Erwartungswerte (1-8) durch

$$E\{\epsilon_i\} = 0 \text{ und } E\{\epsilon_i\epsilon_j^T\} = \begin{cases} \sigma_i^2\mathbf{E} \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j, \end{cases} \tag{1-10}$$

so dass in (1-9) bzw. (1-4) die Kovarianzkomponenten σ_{ij} für $i \neq j$ entfallen.
Gleichung (1-5) kann auch als erweitertes Gauss-Markoff-Modell aufgefasst werden. Mit der durch (1-9) bzw. (1-10) gegebenen Dispersionsmatrix linearer Struktur wird die Schätzung von VKK gewöhnlich in diesem Modell durchgeführt. Infolge der Bedingung $c \leq n - q$ muss allerdings die Anzahl der VKK beschränkt werden, was im allgemeinen zur Bildung von Beobachtungsgruppen zwingt. Die Betrachtung der aus dem erweiterten gemischten Modell (1-7) abgeleiteten linearen Dispersionsstruktur (1-9) gibt nicht nur wichtige Hinweise auf die Zusammensetzung der Dispersionsmatrix, wenn Kenntnisse über Elementarfehler vorliegen, sondern – umgekehrt – auch über deren Zerlegung, die für die Schätzung von VKK problemorientiert erfolgen muss. Dies soll an zwei einfachen Beispielen gezeigt werden.

1.4 Beispiele

Beide Beispiele (Persson, 1980) beziehen sich auf das Varianzkomponenten-Modell (1-5) in Verbindung mit (1-10).
Ein Winkel x sei mit zwei verschieden genauen Theodoliten gemessen. Von den Messfehlern ϵ_i seien die Erwartungswerte $E\{\epsilon_i\} = 0$ und $E\{\epsilon_i\epsilon_i^T\} = \sigma_i^2\mathbf{E}$ gegeben, wobei die noch unbekannten Varianzen σ_i^2 als mittlere Instrumentenfehler zu interpretieren sind. Der allgemeine Ansatz werde zunächst im gemischten Modell ausgeführt:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \tag{1-5}$$

was mit (1-6) sofort zum erweiterten gemischten Modell

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\epsilon_1 + \mathbf{B}_2\epsilon_2 \tag{1-7}$$

führt; explizit ist dies

$$l_1 = x + \epsilon_1$$

$$l_2 = x + \epsilon_2$$

oder

$$\mathbf{l} = \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} x + \begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}\epsilon_1 + \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\epsilon_2.$$

Hieraus kann mit (1-10) gemäss (1-9) unmittelbar die Dispersionsmatrix der Beobachtungen

$$\mathbf{C} = D\{\mathbf{l}\} = \sum_{i=1}^{2}\sigma_i^2\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T$$

$$= \sigma_1^2\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{vmatrix} + \sigma_2^2\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\sigma_1^2 & 0\\0 & \sigma_2^2\end{vmatrix} \tag{1-11}$$

gebildet werden.

Die Dispersions- oder Kovarianzmatrix der Beobachtungen kann hier ‹reihend› zerlegt werden.
Nun sei der Winkel x mit einem Theodoliten zweimal gemessen. Es werden ein gleichbleibender Zentrierfehler ϵ_1

und Messfehler $\boldsymbol{\epsilon}_2^T = |\epsilon_{2,1}\ \epsilon_{2,2}|$ angenommen; $E\{\boldsymbol{\epsilon}_i\} = 0$; $E\{\boldsymbol{\epsilon}_i\boldsymbol{\epsilon}_i^T\} = \sigma_i^2\mathbf{E}$.
In Analogie zum ersten Beispiel erhält man:

$$l_1 = x + \epsilon_1 + \epsilon_{2,1}$$
$$l_2 = x + \epsilon_1 + \epsilon_{2,2}$$

oder

$$\mathbf{l} = \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} x + \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}\epsilon_1 + \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_2.$$

Damit wird

$$\mathbf{C} = D\{\mathbf{l}\} = \sum_{i=1}^{2}\sigma_i^2\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^T$$
$$= \sigma_1^2\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} + \sigma_2^2\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix}\sigma_1^2+\sigma_2^2 & \sigma_1^2\\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2+\sigma_2^2\end{vmatrix}. \qquad (1\text{-}12)$$

Die für die Problemstellung des zweiten Beispiels erforderliche Zerlegung der Dispersionsmatrix ist ‹überlappend›.
In beiden Fällen besteht die Aufgabe der VKK-Schätzung in der Ermittlung der unbekannten Varianzfaktoren σ_i^2 (auch im zweiten Beispiel treten trotz korrelierter Beobachtungen $\mathbf{l}$ nur Varianzkomponenten auf).
Das lineare Modell mit linearer Dispersionsstruktur bildet auch das Fundament für die Ausgleichung unvollständiger, heterogener, korrelierter Wiederholungsmessungen in multivariaten Modellen. Es stellt damit eine sehr allgemeine und wesentliche Gundlage dar (Schaffrin, 1983).

2. Schätzungsprinzipien

Nachdem im vorigen Abschnitt die lineare Struktur des stochastischen Modells aufgezeigt wurde, werden im folgenden die wesentlichen Eigenschaften des Schätzers betrachtet, mit dessen Hilfe die VKK-Berechnung durchgeführt wird.

2.1 Quadratische Schätzer

Das Problem der VKK-Schätzung ist ein quadratisches Schätzproblem, vgl. z. B. (1-9), so dass die verwendeten Schätzer in aller Regel quadratisch sind. Eine beliebige Funktion $\chi = \mathbf{p}^T\boldsymbol{\sigma}$ ist im linearen Modell genau dann schätzbar, wenn eine symmetrische Funktion $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ der Beobachtungen so existiert, dass $E\{\mathbf{M}(\mathbf{l})\} = \chi$; sie ist quadratisch schätzbar, wenn mit $\mathbf{M}(\mathbf{l}) = \mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}$ für $E\{\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}\} = \chi$ gilt. Damit ist $\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}$ ein quadratischer Schätzer von χ. Quadratische Schätzer sind also quadratische Formen der Beobachtungen.
Man schätzt zunächst nicht einzelne Komponenten σ_{ij}, sondern eine lineare Funktion $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\sigma}$ aller Komponenten. Setzt man aber als Spezialfall $\mathbf{p}^T = |0, \ldots, r_i, \ldots, 0|$, so ist auch die Schätzung einzelner Komponenten σ_{ij} möglich (wegen der Bedeutung von r_i vgl. Abschnitt 4.3).

2.2 Unverzerrte quadratische Schätzer – QUE

Die erste Eigenschaft, die man von einem ‹guten› Schätzer verlangt, ist, dass er unverzerrte Schätzungen liefert (Quadratic Unbiased Estimator – QUE).
Grundlage für die Konstruktion dieser Eigenschaft des Schätzers $\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}$ ist die Verteilung dieser Form. Sie ist (Searle, 1971, p. 55) für normalverteilte Beobachtungen χ^2-verteilt mit dem Erwartungswert

$$E\{\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}\} = E\{\mathbf{l}^T\}\mathbf{M}\,E\{\mathbf{l}\} + sp\{\mathbf{M}\,D(\mathbf{l})\} \qquad (2\text{-}1)$$

($sp\{\cdot\}$ Spur-Operator).
Mit (1-2) und (1-3) folgt

$$E\{\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}\} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} + sp\{\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}\} = \mathbf{p}^T\boldsymbol{\sigma}. \qquad (2\text{-}2)$$

Die Forderung nach Unverzerrtheit des Schätzers $\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}$ verlangt nun

- Unabhängigkeit von den festen Parametern $\mathbf{x}$; dies führt zu der Bedingung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{0}. \qquad (2\text{-}3)$$

  $\mathbf{x}$ kann also im linearen Modell mit einer beliebigen generalisierten Inversen $\mathbf{N}^-$ der Normalgleichungen $\mathbf{N}$ gewonnen werden. Damit sind auch Probleme der Festlegung des geodätischen Datums bedeutungslos.
- Unabhängigkeit von den unbekannten, dennoch a priori im Ausgleichungsansatz zu berücksichtigenden VKK, die in $\mathbf{C}$ enthalten sind. Dies führt zur zusätzlichen Forderung

$$sp\{\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}\} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{c}\sigma_{ij}\,sp\{\mathbf{M}\mathbf{Q}_{ij}\} = \mathbf{p}^T\boldsymbol{\sigma}$$

  oder komponentenweise

$$sp\{\mathbf{M}\mathbf{Q}_{ij}\} = p_i,\ \sum_{i=1}^{c}p_i = p \qquad (2\text{-}4)$$

Die quadratische Form $\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}$ ist dann QUE für $\mathbf{p}^T\boldsymbol{\sigma}$, wenn die Forderungen (2-3) und (2-4) erfüllt sind.

2.3 Invariante, unverzerrte quadratische Schätzer – IQUE

Invarianz ist als sog. Translationsinvarianz zu verstehen, z. B. Invarianz gegenüber einer (zulässigen) Änderung der Näherungskoordinaten bei einer geodätischen Netzausgleichung. Invariante, unverzerrte quadratische Schätzer heissen IQUE (Invariant Quadratic Unbiased Estimator).
An die Stelle des Modells (1-1) tritt dann das neue Modell (Persson, 1980, p. 8)

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}d\mathbf{x} \qquad (2\text{-}5)$$

oder

$$\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}d\mathbf{x} \qquad (2\text{-}6)$$

mit

$$E\{\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}\} = \mathbf{A}d\mathbf{x},\ D\{\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}\} = \mathbf{C}. \qquad (2\text{-}7)$$

Der neue Schätzer

$$(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{M}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

soll vernünftigerweise die gleichen Schätzergebnisse liefern wie der Schätzer (2-2) in Verbindung mit (2-3) und (2-4). Das ist dann der Fall, wenn

$$(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{M}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}. \qquad (2\text{-}8)$$

Multiplikation der linken Seite führt zu der Bedingung

$$\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l} - 2\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l},$$

die nur erfüllt wird, wenn

$$\mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{O}. \qquad (2\text{-}9)$$

Forderung (2-3) folgt damit ebenso aus (2-9). Die Umkehrung gilt nur für positiv definites $\mathbf{M}$ (Koch, 1980, S. 207), für das QUE und IQUE identisch sind.

2.4 BESTe IQUE – BIQUE

BEST bedeutet minimale Varianz des Schätzers.
Für normalverteilte Beobachtungen ist (Searle, 1971, p. 57) die Varianz $V\{\cdot\}$ der quadratischen Form $\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}$ gegeben durch

$$V\{\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}\} = 2sp\{\mathbf{M}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}\} + 4\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

und wegen (2-9)

$$V\{\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}\} = 2sp\{\mathbf{M}\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}\} \approx 2sp\{\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}\}. \qquad (2\text{-}10)$$

$\mathbf{Q}$ wird hier als Näherungswert für $\mathbf{C} = \sigma^2\mathbf{Q}$ verwendet, da σ^2 zunächst nicht bekannt ist. BIQUE können dann konstruiert werden, wenn (2-10) – unter Beachtung von (2-3) bzw. (2-9) und (2-4) – minimiert wird. Die Lösung dieser Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen führt (Koch, 1980, S. 210) mit s^2 als Schätzwert für die Varianz der Gewichtseinheit σ^2 auf die Gleichung

$$S\cdot s^2 = q, \qquad (2\text{-}11)$$

woraus für s^2 mit

$$S = sp\{\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}\} = sp\{\mathbf{M}\mathbf{Q}\} \qquad (2\text{-}12)$$
$$q = \mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{l} = \mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l} \qquad (2\text{-}13)$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^-\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{-1} \qquad (2\text{-}14)$$

folgt:

$$s^2 = \frac{\mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l}}{sp\{\mathbf{M}\mathbf{Q}\}}. \qquad (2\text{-}15)$$

Die Übereinstimmung mit der üblichen, aus $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$ resultierenden Schät-

zung wird in den nächsten Abschnitten aufgezeigt.
Sollen VKK σ_{ij} geschätzt werden, sind sie mit Hilfe der Grössen

$$\mathbf{S} = (s_{ij}) = sp\{\mathbf{MQ}_{ij}\mathbf{MQ}_{ij}\} \quad (2\text{-}16)$$
$$\mathbf{q} = (q_i) = \mathbf{l}^T\mathbf{MQ}_{ij}\mathbf{Ml} \quad (2\text{-}17)$$
$i,j = 1,\ldots,c$

zu gewinnen. Details werden weiter unten erläutert.
Für normalverteilte Beobachtungen ist BIQUE äquivalent mit MINQUE (Minimum Norm Quadratic Unbiased Estimation; Rao 1970; Persson 1980).

2.5 Heuristische Bestimmung von M

Betrachtet man (1-5) als Gauss-Markoff-Modell

$$\mathbf{l} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e},\ D\{\mathbf{l}\} = \sigma^2\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}$$

(Gewichtsmatrix $\mathbf{P}$), so werden die Unbekannten $\mathbf{x}$ durch $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^-\mathbf{A}^T\mathbf{Pl} = \mathbf{N}^-\mathbf{A}^T\mathbf{Pl}$ und der Fehlervektor $\mathbf{e}$ durch die Verbesserungen $\mathbf{v}$ geschätzt. Dann sind die ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{AN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{Pl}$ und die Verbesserungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{l} - \hat{\mathbf{l}}. \quad (2\text{-}18)$$

Bildet man die quadratische Form $\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}$, so ergibt sich

$$\mathbf{v}^T\mathbf{Pv} = \mathbf{l}^T\mathbf{Pl} - \mathbf{l}^T\mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{Pl}$$
$$= \mathbf{l}^T(\mathbf{P} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{l} = \mathbf{l}^T\mathbf{Ml}. \quad (2\text{-}19)$$

Die Formmatrix ist die gesuchte Matrix $\mathbf{M}$ (2-14).

2.6 Beispiel der Einheitsvarianz

Fasst man die bisherigen Ergebnisse (2-15), (2-4), (2-19) und die allgemein bekannte Formel zur Schätzung der Einheitsvarianz zusammen, so ergeben sich die Beziehungen

$$s^2 = \frac{\mathbf{l}^T\mathbf{Ml}}{sp\{\mathbf{MQ}\}} = \frac{\mathbf{l}^T\mathbf{Ml}}{p} = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}}{n-m},$$

die in Verbindung mit (2-14) beste invariante quadratische unverzerrte Schätzer der Einheitsvarianz sind. Die folgenden Berechnungen bestätigen dies:

a) $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$

b) $\mathbf{A}^T\mathbf{MA} = \mathbf{0}$: $\mathbf{A}^T(\mathbf{P}-\mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{A}$
$= \mathbf{A}^T\mathbf{PA} - \mathbf{A}^T\mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{PA}$
$= \mathbf{N} - \mathbf{NN}^-\mathbf{N} = \mathbf{0}$

c) $sp\{\mathbf{MQ}\} = p = n-m$:
$sp\{(\mathbf{P} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{Q}\}$
$= sp\{\mathbf{E} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\}$
$= sp\{\mathbf{E}\} - sp\{\mathbf{A}^T\mathbf{PAN}^-\}$
$= n - m$
$(\mathbf{A}^T\mathbf{PAN}^- = \mathbf{NN}^-$, idempotent)

s^2 ist QUE für σ^2.

d) $\mathbf{MA} = \mathbf{0}$: $(\mathbf{P} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{A}$
$= \mathbf{PA} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{PA}$
$= \mathbf{PA} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{N} = \mathbf{0}$
(Koch, 1980, S. 50)

s^2 ist IQUE für σ^2.

e) $V\{\mathbf{l}^T\mathbf{Ml}\} = V\{\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}\} = 2sp\{\mathbf{MCMC}\}$
$= 2(\sigma^2)^2 sp\{\mathbf{MQMQ}\}$
$= 2(\sigma^2)^2 sp\{\mathbf{MQ}\}$
$= 2(\sigma^2)^2(n-m)$

$$s^2 = \left(\frac{1}{n-m}\right)\mathbf{v}^T\mathbf{Pv} \Rightarrow$$

$$V\{s^2\} = \left(\frac{1}{n-m}\right)V\{\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}\}\left(\frac{1}{n-m}\right)$$

$$= \frac{1}{(n-m)^2} \cdot 2(\sigma^2)^2(n-m)$$

$$= \frac{2(\sigma^2)^2}{n-m}.$$

Der Schätzwert der Varianz beträgt damit – wie allgemein bekannt:

$$\hat{V}(s^2) = \frac{2(s^2)^2}{n-m}.$$

s^2 ist BIQUE für σ^2.

2.7 Lokale, iterierte, gleichmässige Schätzer

Die Bedingung $sp\{\mathbf{MQ}\} = p = n - m = r$ (Redundanz) lässt sich – gleich welcher Näherungswert in (2-10) gewählt wurde – für die Schätzung der Einheitsvarianz immer erfüllen. Diese ist tatsächlich unabhängig von der a priori gewählten Varianz. Unter Einhaltung der übrigen Bedingungen ist die Schätzung s^2 deshalb immer BIQUE (‹gleichmässig› beste Schätzung).
Beim Schätzer von VKK wird die Bedingung $sp\{\mathbf{MQ}_i\} = p_i$ nicht auf Anhieb für alle i zu erfüllen sein. Die Schätzungen sind vielmehr zunächst von der gewählten Trennung der Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{c}\sigma_{ij}\mathbf{Q}_{ij}$ in ihre Bestandteile σ_{ij} und $\mathbf{Q}_{ij}$ abhängig. Diese Abhängigkeit führt dann zu ‹lokal› erwartungstreuen und in der Folge zu ‹lokal› besten Schätzern. Die lokal besten Schätzer können aber zur Verbesserung der Näherungswerte und zu einer iterativen Erreichung der gleichmässigen besten Schätzung verwendet werden (Koch, 1980, S. 209ff.). Wenn das Modell richtig formuliert ist, und die Näherungswerte nicht zu schlecht sind, werden die iterativen Schätzer nach wenigen Iterationen konvergieren. Damit sind die iterativ verbesserten lokalen Schätzer nach Erreichen des Konvergenzzieles gleichmässig erwartungstreue, invariante und beste Schätzer.

3. Praktische Durchführung der VKK-Schätzung

3.1 Übergang vom $\mathbf{l}^T\mathbf{Ml}$- zum $\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}$-Schätzer

Gewöhnlich werden Varianzkomponenten-Schätzungen nicht mit der quadratischen Form $\mathbf{l}^T\mathbf{Ml}$, sondern mit der Form $\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}$ durchgeführt. Der Übergang vom einen zum anderen Schätzer wird im folgenden veranschaulicht.

Mit (2-14)

$$\mathbf{M} = \mathbf{P} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P}$$
$$= \mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{AN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P}) = \mathbf{PD} \quad (3\text{-}1)$$

folgt aus (2-18)

$$\mathbf{v} = \mathbf{l} - \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{E} - \mathbf{AN}^-\mathbf{A}^T\mathbf{P})\mathbf{l} = \mathbf{Dl} \quad (3\text{-}2)$$

und

$$\mathbf{Q}^{vv} = \mathbf{DQD}^T. \quad (3\text{-}3)$$

Damit wird aus (2-12)

$$\mathbf{S} = sp\{\mathbf{MQMQ}\} = sp\{\mathbf{PDQPDQ}\}$$
$$= sp\{\mathbf{PDQD}^T\} = sp\{\mathbf{PQ}^{vv}\}. \quad (3\text{-}4)$$

Aus (2-13) wird

$$\mathbf{q} = \mathbf{l}^T\mathbf{MQMl} = \mathbf{l}^T\mathbf{PDQPDl} = \mathbf{l}^T\mathbf{PDl}$$
$$= \mathbf{l}^T\mathbf{Ml} = \mathbf{v}^T\mathbf{Pv}. \quad (3\text{-}5)$$

Damit lautet (2-11) bzw. (2-15) nunmehr

$$s^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}}{sp\{\mathbf{PQ}^{vv}\}}. \quad (3\text{-}6)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man sofort, wenn man für die Verbesserungen mit der Verteilung

$$\mathbf{v} \sim N\{\mathbf{0}, \mathbf{C}^{vv}\} \quad (3\text{-}7)$$

den Erwartungswert ihrer quadratischen Form betrachtet:

$$E\{\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}\} = sp\{\mathbf{PC}^{vv}\} = \sigma^2 sp\{\mathbf{PQ}^{vv}\}. \quad (3\text{-}8)$$

Wird der Nenner in (3-6) weiterentwickelt, so ergibt sich

$$sp\{\mathbf{PQ}^{vv}\} = sp\{\mathbf{PDQD}^T\}$$
$$= sp\{(\mathbf{E} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T)$$
$$(\mathbf{E} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T)\}$$
$$= sp\{\mathbf{E} - \mathbf{PAN}^-\mathbf{A}^T\}$$
$$= sp\{\mathbf{E}\} - sp\{\mathbf{A}^T\mathbf{PAN}^-\}$$
$$= n - m = r$$

(Redundanz r), woraus die bekannte Beziehung für die Schätzung der Einheitsvarianz

$$s^2 = \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}}{r} \quad (3\text{-}9)$$

folgt.

3.2 Varianzkomponenten-Schätzung

Die Aufgabe besteht in der Schätzung einzelner Varianzkomponenten σ_i^2, die bei der Zerlegung der Dispersionsmatrix $D\{\mathbf{l}\}$ gemäss (1-4) auftreten und unbekannt sind. Für die praktische Durchführung der Schätzung (Welsch, 1980a) wird von (3-2) ausgegangen, indem die Beobachtungen und ihre Verbesserungen der erforderlichen Zerlegung der Dispersionsmatrix entsprechend aufgeteilt werden, z. B. in ‹Beobachtungsgruppen›

$$D\{l\} = \sum_{i=1}^{c} C_{ii} \qquad (3\text{-}10)$$

$$v_i = l_i - A_i\hat{x} = (E_i - A_iN^{-}A^{T}P)l = D_il \qquad (3\text{-}11)$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{c} v_i = v,\ \sum_{i=1}^{c} l_i = l,\ \sum_{i=1}^{c} D_i = D.$$

In D_i sind auch Anteile der anderen Beobachtungsgruppen $j \neq i$ enthalten, so dass

$$D_i = \sum_{l=1}^{c} (E_i - A_iN^{-}(A^{T}P)_l) = \sum_{l=1}^{c} D_{il}.$$

Der Erwartungswert der quadratischen Form der Verbesserungen v_i (vgl. (3-7)) wird damit zu

$$E\{v_i^{T}P_{ii}v_i\} = sp\{P_{ii}D_iCD_i^{T}\}$$

$$= sp\{P_{ii}D_i \sum_{l=1}^{c} C_{il}D_i^{T}\}$$

$$= sp\{\sum_{l=1}^{c} P_{ii}D_{il}C_{il}D_{li}\}. \qquad (3\text{-}12)$$

Die Struktur (3-12) lässt es zunächst nicht zu, die Varianzkomponenten getrennt zu schätzen. Die Beziehung (3-12) wird schon von Helmert (1907) als Schätzer verwendet (Welsch, 1977).
Erst nach Übergang vom Erwartungswert zur Schätzung und nach Erreichen des Konvergenzzieles

$$s_l^2 \rightarrow 1 \quad l = 1, \ldots, i, j, \ldots, c \qquad (3\text{-}13)$$

gelingt es, die Summation auszuführen (Förstner, 1979) und zu setzen

$$v_i^{T}P_{ii}v_i = s_i^2\ sp\{P_{ii}D_iQD_i^{T}\}$$
$$= s_i^2\ sp\{P_{ii}Q_{ii}^{vv}\} \qquad (3\text{-}14)$$

oder durch Ausnützung des Spur-Operators

$$v_i^{T}P_{ii}v_i = s_i^2 \sum_{g=1}^{c_i} (p_{gg}q_{gg}^{vv})_i, \qquad (3\text{-}15)$$

worin c_i die Anzahl der Beobachtungen, für die s_i^2 geschätzt wird, bezeichnet.

3.3 Kovarianzkomponenten-Schätzung

Ist es erforderlich und nach Zerlegung (1-4) der Dispersionsmatrix möglich, auch Kovarianzkomponenten zu schätzen, so wird ganz analog zur Varianzkomponenten-Schätzung vorgegangen. Dies sei in Kürze dargestellt.
Zerlegung des mathematischen Modells

$$D\{l\} = \sum_{i=1}^{t} C_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{c-t} C_{ij} \qquad (3\text{-}16)$$

$$v_i = D_il,\ D_i = \sum_{l=1}^{c} D_{il}$$

$$v_j = D_jl,\ D_j = \sum_{k=1}^{c} D_{jk}, \qquad (3\text{-}17)$$

Bildung der Erwartungswerte

$$E\{v_i^{T}P_{ij}v_j\} = sp\{P_{ji}D_iCD_j\}. \qquad (3\text{-}18)$$

In (3-18) sind in C sämtliche VKK σ_{ij} enthalten, die nach Übergang zur Schätzung erst nach Erreichen des Konvergenzzieles

$$s_{lk} \rightarrow s_{ij} \rightarrow 1 \quad l,k = 1, \ldots, i, j, \ldots, c \qquad (3\text{-}19)$$

getrennt werden können:

$$v_i^{T}P_{ij}v_j = s_{ij}\ sp\{P_{ij}Q_{ji}^{vv}\}. \qquad (3\text{-}20)$$

Infolge des Spur-Operators ist wiederum eine elementenweise Summation möglich

$$v_i^{T}P_{ij}v_j = s_{ij} \sum_{h=1}^{c_j} \sum_{g=1}^{c_i} (p_{hg}q_{gh}^{vv})_{ij}. \qquad (3\text{-}21)$$

3.4 Varianz der Schätzer

Auf die Varianz der VKK soll hier nicht eingegangen, vielmehr auf die Abschnitte 2.4 und 2.6 oder z. B Koch (1980, S. 210ff.) verwiesen werden.

4. Anwendungen

Anwendungen, über die bisher berichtet worden ist, beziehen sich fast ausschliesslich auf die Schätzung von Varianzkomponenten. Dies ist verständlich, wenn man bedenkt, wie schwierig es ist, Vorinformationen über Korrelationen bzw. Kovarianzmatrizen zu bekommen.

Die Darstellung der folgenden Anwendungsbeispiele beschränkt sich im wesentlichen auf die Erläuterung des stochastischen Modells und die Zerlegung der Dispersionsmatrix.

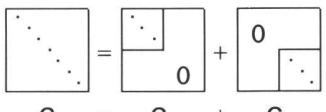
4.1 Geodätische Netzausgleichungen mit heterogenem Beobachtungsmaterial

Die Aufgabe besteht in der Schätzung der Varianzen einzelner Beobachtungsgruppen, z. B. der Richtungs- und Streckenbeobachtungen in einem kombinierten Triangulations-Trilaterationsnetz. Von der Modell-Technik her gesehen spricht man von univariaten Gauss-Markoff-Modellen.
Mit den Symbolen α für Richtungsmessungen und d für Streckenmessungen wird das mathematische Modell wie folgt aufgebaut:

$$l - v = Ax \text{ mit } l^{T} = |\alpha^{T}d^{T}|,$$

$$v^{T} = |v_\alpha^{T}v_d^{T}|,\ A^{T} = |A_\alpha^{T}A_d^{T}|. \qquad (3\text{-}11)$$

Die Dispersionsmatrix wird ‹reihend› zerlegt



$$C = C_\alpha + C_d \qquad (3\text{-}11)$$

oder

$$D\{l\} = C = \sum_{i=1}^{2} C_{ii}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_\alpha^2\,\mathrm{diag}\{Q_\alpha\} & 0 \\ 0 & \sigma_d^2\,\mathrm{diag}\{Q_d\} \end{vmatrix}. \qquad (3\text{-}10)$$

Die Gewichte $1/q_\alpha$, $1/q_d$ werden a priori angenommen, die Verbesserungen v_α, v_d und ihre Kofaktoren $q_{\alpha\alpha}^{vv}$ und q_{dd}^{vv} sind Ergebnisse einer ersten Ausgleichung. Mit (3-15) werden Varianzen s_α^2 und s_d^2 berechnet, eine zweite Ausgleichung durchgeführt, erneute Werte für s_α^2 und s_d^2 berechnet solange, bis mit $s_\alpha^2 = s_d^2 = 1$ das Konvergenzziel erreicht ist.

Ein numerisches Beispiel findet sich bei Welsch (1980b). Veröffentlichungen mit numerischen Beispielen der Schätzung von Kovarianzkomponenten im unvollständigen multivariaten Gauss-Markoff-Modell (Schaffrin, 1983) liegen derzeit noch nicht vor.

4.2 Schätzung der Fehlerkomponenten eines EDM-Gerätes

Die Aufgabe besteht in der Schätzung der Fehlerkomponenten a und b für den Ansatz

$$s_{EDM}^2 = a^2 + b^2 \cdot s^2,$$

der die Fehlerformel für EDM-Geräte darstellt (Koch, 1978).

Für die Konstruktion der Dispersionsmatrix wird vom gemischten Modell

$$l = Ax + e \qquad (1\text{-}5)$$

ausgegangen.

Der Fehlervektor **e** ist Linearkombination des konstanten Fehlereinflusses a und des streckenabhängigen Einflusses b

$$e = \sum_{i=1}^{2} B_i\epsilon_i = B_1\epsilon_1 + B_2\epsilon_2 \qquad (1\text{-}6)$$

mit

$$B_1 = \underset{n,n}{E},\ B_2 = \begin{vmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{vmatrix}$$

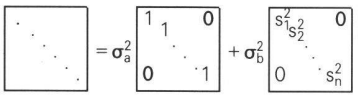
und den Verteilungsaussagen

$$E\{e\} = E\{\epsilon_i\} = 0,\ E\{ee^{T}\} = E\{\epsilon_i\epsilon_i^{T}\} = \sigma_i^2E. \qquad (1\text{-}10)$$

Damit kann die Dispersionsmatrix aufgebaut werden

$$C = \sum_{i=1}^{2} \sigma_i^2B_iB_i^{T} = \sum_{i=1}^{2} \sigma_i^2Q_i$$
$$= \sigma_1^2Q_{11} + \sigma_2^2Q_{22}.$$

(1-9) ist ein Beispiel für eine ‹überlappende› Zerlegung gemäss (1-12)



$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_a + \mathbf{C}_b \quad (3\text{-}10)$$

Für die Schätzung s_a^2 und s_b^2 der Varianzkomponenten σ_a^2 und σ_b^2 benötigt man die Gewichte $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ ($p_{1_i} = 1$, $p_{2_i} = \frac{1}{s_i^2}$), die Verbesserungen v_i und ihre Kofaktoren q_{ii}^{vv}. Damit kann (3-15) solange angewendet werden, bis das Iterationsziel erreicht ist. In Koch (1981) wurde auch die Kovarianzkomponente σ_{ab} geschätzt.

4.3 Varianzkomponenten-Schätzung und Zuverlässigkeit

Die Beobachtungen werden in zwei Gruppen eingeteilt. Die erste Gruppe besteht aus einer einzigen Beobachtung, derjenigen, deren Zuverlässigkeit bzw. Fehlerhaftigkeit untersucht werden soll. Die zweite Gruppe enthält alle übrigen Beobachtungen.
Dem Beispiel in Abschnitt 4.1 folgend wird die Dispersionsmatrix zerlegt und der Anteil der ersten Gruppe betrachtet.

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{C}_{ii}$$

$$\mathbf{C}_{11} = \sigma_1^2 \mathbf{Q}_{11} = \sigma_1^2 q_{11} .$$

Der Varianzfaktor σ_1^2 ist zu schätzen aus

$$v_1^T p_1 v_1 = s_1^2 p_1 q_{11}^{vv}$$

$$s_1^2 = \frac{v_1^2 p_1}{p_1 q_{11}^{vv}} = \frac{v_1^2}{q_{11}^{vv}}$$

$$s_1 = \frac{v_1}{\sqrt{q_{11}^{vv}}} .$$

Das Zuverlässigkeitsmass der normierten Verbesserung

$$w = \frac{s_1}{s} = \frac{v_1}{s\sqrt{q_{11}^{vv}}} = \frac{v_1}{s_{v_1}}$$

hat somit nur die Qualität eines ‹lokal besten› Masses, wenn nicht – was theoretisch geschehen müsste – der Iterationsprozess bis zur Konvergenz fortgesetzt wird (Li, 1983).
Die Grösse $p_1 q_{11}^{vv} = r_1$ gibt den Redundanzteil der Beobachtung an, der im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie eine wesentliche Rolle spielt.

4.4 Genauigkeitssteigerung in der klassischen Ausgleichung

Bisweilen bestehen Vorausinformationen über die zu schätzenden Unbekannten $\mathbf{x}$ einer Ausgleichung (z. B. Einstellfehler bei der Messung photogrammetrischer Punktkoordinaten, Zentrierfehler o. ä.). Diese Information kann in einem Varianzkomponenten-Modell verarbeitet werden. Dazu wird das gewöhnliche Gauss-Markoff-Modell erweitert

$$\mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_{11}^{-1} \text{ aus } D\{\mathbf{l}_1\} = \sigma_1^2 \mathbf{Q}_{11}$$

$$\mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{E}\mathbf{x},\ \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{22}^{-1} \text{ aus } D\{\mathbf{l}_2\} = \sigma_2^2 \mathbf{Q}_{22}.$$

Die Einstell- oder Zentrierfehler der Punktkoordinaten $\mathbf{x}$ werden als zusätzliche Beobachtungen $\mathbf{l}_2 = \mathbf{0}$ angesehen. Verwendet man die vermutete Einstell- oder Zentriergenauigkeit als Gewicht $\mathbf{P}_2$ dieser Beobachtungen, so kann die vollständige Dispersionsmatrix

$$\mathbf{C} = \sigma_1^2 \mathbf{Q}_{11} + \sigma_2^2 \mathbf{Q}_{22}$$

angesetzt und die Genauigkeit σ_2^2 der Vorinformation mit (3-15) geschätzt werden. Das Verfahren wurde von Ebner (1978) angegeben. Es lässt viele Anwendungen zu, z. B. die Berücksichtigung von Punktunruhen bei Stabilitäts- und Sensitivitätsuntersuchungen und Deformationsanalysen, Einbeziehung nicht-modellierbarer systematischer Restfehler (Schwintzer, 1984) u. a.

4.5 Weitere Anwendungen

Über weitere Anwendungen wird z. B. von Grafarend und Kleusberg (1980) bei der Schätzung von Instrumenten- und Beobachtungsfehlern bei Kreiselmessungen berichtet, Schaffrin (1983, S. 101ff.) analysiert weitere Beispiele, insbesondere auch die Schätzung von Kovarianzmatrizen für photogrammetrische Bildkoordinaten. Aus Platzgründen kann jedoch auf diese und andere Beispiele nicht näher eingegangen werden.

Für die eingehendere Darstellung wurden bewusst einfache Anwendungsbeispiele ausgewählt, um zu demonstrieren, dass eine recht komplizierte Theorie so aufbereitet werden kann, dass sie auch dem Praktiker bei alltäglichen Problemen zu einem Gewinn verhelfen kann. Darüber hinaus steht die Ausschöpfung der theoretischen Möglichkeiten für viele Gebiete erst am Anfang.

Literatur

Ebner, H., 1978: A posteriori Gewichtsschätzung bei der verallgemeinerten kleinste Quadrate Ausgleichung; Geowissenschaftliche Mitteilungen der Technischen Universität Wien, Heft 13, S. 73–84, Wien 1978

Förstner, W., 1979: Konvergenzbeschleunigung bei der a posteriori Varianzschätzung; Zeitschrift für Vermessungswesen 104 (1979) 4, S. 149–156

Grafarend, E., Kleusberg, A., 1980: Expectation and Variance Component Estimation of Multivariate Gyrotheodolite Observations I; Allgemeine Vermessungsnachrichten 87 (1980) 3, S. 129–137

Grafarend, E., Kleusberg, A., Schaffrin, B., 1980: An Introduction to the Variance-Covariance-Component Estimation of Helmert-Type; Zeitschrift für Vermessungswesen 105 (1980) 4, S. 161–180

Helmert, F. R., 1907: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; 2. Auflage, Teubner Verlag, Leipzig–Berlin 1907

Koch, K. R., 1978: Schätzung von Varianzkomponenten; Allgemeine Vermessungsnachrichten 85 (1978) 7, S. 264–269

Koch, K. R., 1980: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen; Dümmler Verlag, Bonn 1980

Koch, K. R., 1981: Varianz- und Kovarianzkomponentenschätzung für Streckenmessungen auf Eichlinien; Allgemeine Vermessungsnachrichten 88 (1981) 4, S. 125–132

Li, D., 1983: Ein Verfahren zur Aufdekkung grober Fehler mit Hilfe der a posteriori-Varianzschätzung; Bildmessung und Luftbildwesen 51 (1983) 5, S. 184–187

Persson, C. G., 1980: MINQUE and Related Estimators for Variance Components in Linear Models; The Royal Institute of Technology, Division of Geodesy, Stockholm 1980

Rao, C. R., 1970: Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Models; Journal of the American Statistical Association 65 (1970) 329, pp. 161–172

Rao, C. R., 1972: Estimation of Variance and Covariance Components in Linear Models; Journal of the American Statistical Association 67 (1972) 337, pp. 112–115

Schaffrin, B., 1983: Varianz-Kovarianz-Komponenten-Schätzung bei der Ausgleichung heterogener Wiederholungsmessungen, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 282, München 1983

Schwintzer, P., 1984: Zur Analyse geodätisch gemessener Punktlageänderungen mit gemischten Modellen; Heft 12 der Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der HSBw München, München 1984

Searle, S. R., 1971: Linear Models; John Wiley, New York 1971

Welsch, W., 1977: Ein Beitrag zur optimalen Gewichtsverteilung bei der Ausgleichung heterogenen Beobachtungsmaterials; XV. FIG-Kongress, Stockholm 1977

Welsch, W., 1980a: Übersicht über die Schätzung von Varianzen und Kovarianzen geodätischer Beobachtungen für die praktische Durchführung, in: Conzett-Matthias-Schmid (Hrsg.): Ingenieurvermessung 80, Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessungen in Zürich, Band 1, paper B7, Dümmler Verlag, Bonn 1981

Welsch, W., 1980b: A posteriori Varianzschätzung im erweiterten Ausgleichungsmodell nach der Methode der kleinsten Quadrate, in: Pelzer (Hrsg.): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung, Wittwer Verlag, Stuttgart 1980, S. 213–236

Adresse des Verfassers:
Prof. Dr.-Ing. Walter Welsch
Hochschule der Bundeswehr München
Institut für Geodäsie
Werner-Heisenberg-Weg 39,
D–8014 Neubiberg