

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 99 (2001)

**Heft:** 3

## Werbung

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

erhält man die Aussage, dass sich die Plücker-Koordinaten  $\bar{d} = \bar{d}(l)$ , die durch Ränderung von A mit l entstehen, nicht von denjenigen Plücker-Koordinaten unterscheiden, die durch Ränderung von A mit dem Fehlervektor  $\epsilon$  entstehen:

$$\bar{d}(l) = \bar{d}(\epsilon), \quad \bar{d}(\bar{l}) = 0 \quad (1.27)$$

In diesem Sinne können die Plücker-Koordinaten  $\bar{d}$  als lokale Fehlerschätzer verstanden werden. Liegt insbesondere nur eine fehlerhafte Beobachtung vor ( $\epsilon_i \neq 0$ ,  $\epsilon_j = 0$ ,  $j \neq i$ ), so gilt:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{i_1, \dots, i_{u+1}} &= 0 \\ i_1, \dots, i_{u+1} &\in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \\ \bar{d}_{i_1, \dots, i_u, i} &= \epsilon_i \cdot d_{i_1, \dots, i_u} \\ i_1, \dots, i_u &\in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

d.h., alle erweiterten Plücker-Koordinaten verschwinden, die die fehlerhafte Beobachtung nicht enthalten. In diesem Fall geht (1.26) unter Beachtung von (1.17) über in:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{r}_{i,i} \cdot \epsilon_i^2 \quad (1.29)$$

Lässt man in (1.25) alle verschwindenden Summanden weg und dividiert beide Seiten durch  $r_{i,i} \neq 0$  (keine Restriktion), so erhält man:

$$\hat{v}_i = \sum w_{(i)} \frac{\bar{d}_i}{d_{(i)}} \quad (1.30)$$

$$w_{(i)} = \frac{d_{(i)}^2}{\sum d_{(i)}^2} \quad \left( \sum w_{(i)} = 1 \right)$$

Die Grössen auf der linken Seite in (1.30) werden in der Literatur auch Grobfehlerschätzungen genannt. Nach (1.30) ergeben sie sich als gewichtetes arithmetisches Mittel der Grössen

$$\frac{\bar{d}_i}{d_{(i)}}$$

Diese Grössen können aber ebenfalls als diejenigen Grobfehlerschätzungen interpretiert werden, die sich für die i-te Be-

obachtung aus den (u+1) Beobachtungen, die zu  $\bar{d}_i$  gehören, ergeben.

Wir wenden uns nun dem Problem der Ausreissersuche (Grobfehleraufdeckung) zu. Wir betrachten dazu eine nichtverschwindende Plücker-Koordinate  $\bar{d}_i \neq 0$ . Unter Beachtung von (1.27) und der Schwarzschen Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= \bar{d}_{i_1, \dots, i_u, i} \\ i_1, \dots, i_u &\in \{1, \dots, u\} \setminus \{i\} \\ \frac{\bar{d}_i^2}{\sum_{j_1, \dots, j_u} d_{j_1, \dots, j_u}^2} &\leq \epsilon_i^2 + \sum_{k=1}^u \epsilon_{i_k}^2 \\ j_1, \dots, j_u &\in \{1, \dots, i_u\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

(1.31) stellt eine Fehlerabschätzung für die Fehler in den Beobachtungen  $i, i_1, \dots, i_u$  dar. Grosse Werte von  $\bar{d}_i$  können somit auf grosse Fehler hinweisen. Jedoch kann ein solcher grober Fehler nicht innerhalb dieser Beobachtungen detektiert werden. Wir wenden uns deshalb zunächst der Frage nach kleinen (bzw. verschwindenden) Plücker-Koordinaten  $\bar{d}_i$  zu, da diese auf kleine Fehler hinweisen könnten. Dabei geht es jedoch nicht um einzelne Plücker-Koordinaten, sondern um Gruppen von Beobachtungen, für die alle Plücker-Koordinaten klein sind, die diese Beobachtungen nicht enthalten. Sei dazu:

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

eine Indexmenge und  $\bar{d}_i$  bezeichne alle möglichen Plücker-Koordinaten, die die Indizes aus I nicht enthalten. Um die «Kleinheit» dieser Plücker-Koordinaten zu quantifizieren, setzen wir die Masse (Quadratsumme) ins Verhältnis zur Gesamtmasse:

$$\bar{r}_I = \frac{\sum \bar{d}_{(I)}^2}{\sum \bar{d}^2} \quad (1.32)$$

Ist  $\bar{r}_I$  klein, so bringen die Beobachtungen, die nicht zu I gehören, nach (1.26) auch nur einen kleinen Beitrag zur Schätzung von  $\hat{\sigma}$ . Ist I einelementig ( $I = \{i\}$ ), so

geht (1.32) über in:

$$\bar{r}_i = \frac{\sum \bar{d}_{(i)}^2}{\sum \bar{d}^2} = \bar{r}_{i,i} = 1 - \bar{h}_{i,i} \quad (1.33)$$

Die Grössen  $\bar{r}_{i,i}$  sind jedoch die Diagonalelemente der Projektionsmatrizen  $\bar{R}$  bzw.  $\bar{H}$ , die sich aus der erweiterten Designmatrix ergeben. Diese stellen bekannte Diagnosetools dar (siehe z.B. Chatterjee, Hadi 1988). Insbesondere gilt der Zusammenhang:

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} \quad (1.34)$$

Des Weiteren kann die Idee in (1.32) sofort auf die Untersuchung von Hebelpunkten (Gruppen von Hebeln) übertragen werden, indem man statt der Plücker-Koordinaten  $\bar{d}$  die Plücker-Koordinaten d verwendet.

**Abonnementsbestellungen  
unter folgender Adresse:**

**SIGWERB AG**  
Dorfmatenstrasse 26  
CH-5612 Ullmorgen  
Telefon 056 / 619 52 52  
Telefax 056 / 619 52 50

**Jahresabonnement 1 Jahr:**  
Inland sFr. 96.-, Ausland sFr. 120.-