

<b>Zeitschrift:</b>	Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)
<b>Band:</b>	99 (2001)
<b>Heft:</b>	3
<b>Artikel:</b>	Plücker-Koordinaten : ein neues Hilfsmittel zur Geometrie-Analyse und Ausreissersuche
<b>Autor:</b>	Jurisch, Ronald / Kampmann, Georg
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-235744">https://doi.org/10.5169/seals-235744</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Plücker-Koordinaten – ein neues Hilfsmittel zur Geometrie-Analyse und Ausreissersuche

Gegenstand unserer Betrachtungen ist das folgende lineare Gauss-Markoff-Modell:  $Ax = l + v$ ,  $D(l) = \sigma^2 P^{-1}$  (1.1). Hierin stellt A eine  $(n, u)$ -Matrix ( $n > u$ ) mit vollem Spaltenrang ( $\text{rg}(A) = u$ ) dar, die im Weiteren als Design-Matrix bezeichnet wird.  $x \in R^u$  ist ein Vektor fester, unbekannter Parameter,  $l \in R^n$  ein (zufälliger) Beobachtungsvektor und  $v \in R^n$  der Vektor der sogenannten Verbesserungen (Residuen).  $D(l)$  ist die Varianz-Kovarianz-Matrix der Beobachtungen, wobei die diagonale Gewichtsmatrix  $P = \text{diag}(P_1, \dots, P_n)$  (unkorrelierte Beobachtungen,  $P_i > 0$ ) als bekannt vorausgesetzt wird,  $\sigma^2$  als Varianz der Gewichtseinheit jedoch unbekannt ist.

*Le modèle lineaire de Gauss-Markoff est l'objet des considérations suivantes:  $Ax = l + v$ ,  $D(l) = \sigma^2 P^{-1}$  (1.1). A représente une matrice  $(n, u)$  de type  $(\text{rg}(A) = u)$  qu'on appellera par la suite matrice design.  $x \in R^u$  est un paramètre inconnu à vecteur fixe,  $l \in R^n$  un vecteur d'améliorations (résidus).  $D(l)$  est la matrice de variance-covariance des observations pour lesquelles on admet connaître la matrice diagonale de pondération  $P = \text{diag}(P_1, \dots, P_n)$  (observations non corrélées,  $P_i > 0$ ) alors que  $\sigma^2$  est inconnu en tant que variance de l'unité de pondération.*

Il modello lineare di Gauss-Markoff è oggetto delle seguenti considerazioni:  $Ax = l + v$ ,  $D(l) = \sigma^2 P^{-1}$  (1.1). A rappresenta una matrice  $(n, u)$  ( $n > u$ ) di tipo  $(\text{rg}(A) = u)$ , chiamata successivamente matrice design.  $x \in R^u$  è un parametro sconosciuto del vettore fisso,  $l \in R^n$  un vettore d'osservazione e  $v \in R^n$  il vettore dei cosiddetti miglioramenti (residui).  $D(l)$  è la matrice di varianza-covarianza delle osservazioni per le quali si ammette la matrice diagonale di ponderazione  $P = \text{diag}(P_1, \dots, P_n)$  (osservazioni non correlate,  $P_i > 0$ ) mentre  $\sigma^2$  è sconosciuta come varianza dell'unità di ponderazione.

R. Jurisch, G. Kampmann

Eine der bekanntesten und am weitesten verbreiteten Methoden zur Schätzung von  $x$ ,  $v$  und  $\sigma^2$  aus (1.1) ist die Gaußsche Kleinste-Quadrat-Methode. Danach sollen die Schätzungen derart bestimmt werden, dass die gewichtete Quadratsumme der Verbesserungen minimal wird:

$$v^T P v \rightarrow \text{Min} \quad (1.2)$$

Im Weiteren wird zunächst der Fall  $P = I$  (gleich genaue, unkorrelierte Beobachtungen) betrachtet. Dies stellt jedoch keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, denn durch die sogenannte Homogenisierung kann man das Modell (1.1/1.2) stets in ein Modell mit  $P = I$  überführen. Dazu wird zunächst die Gleichung in (1.1)

mit der Diagonal-Matrix  $\sqrt{P} = \text{diag}(\sqrt{P_1}, \dots, \sqrt{P_n})$  multipliziert:

$$Apx = l_p + v_p$$

$$Ap = \sqrt{P} A, \quad l_p = \sqrt{P} l, \quad v_p = \sqrt{P} v \quad (1.3)$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz gilt:

$$D(l_p) = \sigma^2 I \quad (1.4)$$

Die Schätzungen erfolgen jetzt durch:

$$v_p^T v_p \rightarrow \text{Min} \quad (1.5)$$

Die hieraus erhaltenen Schätzungen können nun durch (1.3) in die Schätzungen aus dem Modell (1.1/1.2) überführt werden, wobei die Schätzungen der unbe-

kannten Parameter in beiden Modellen übereinstimmen.

Geometrisch betrachtet ergeben sich die Schätzungen  $\hat{l}$  (ausgeglichene Beobachtungen) im Fall  $P = I$  als orthogonale Projektion auf denjenigen  $u$ -dimensionalen Unterraum  $U$  des  $R^n$ , der von den Spalten der Design-Matrix A aufgespannt wird. Diese orthogonale Projektion kann durch eine symmetrische, idempotente Matrix H (Hat-Matrix) erzeugt werden:

$$\hat{l} = Hl, \quad H = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (1.6)$$

In analoger Weise erhält man die ausgeglichenen Verbesserungen  $\hat{v}$  durch orthogonale Projektion von  $v$  auf den zu  $U$  orthogonalen Unterraum  $U^\perp$  (dessen Dimension  $n - u$  ist). Die entsprechende Projektionsmatrix werde mit R bezeichnet. Dann gilt:

$$-\hat{v} = Rl, \quad R = I - H \quad (1.7)$$

Die Schätzung für die unbekannten Parameter erhält man aus dem sogenannten Normalgleichungssystem:

$$(A^T A)\hat{x} = A^T l \quad (1.8)$$

Von grosser praktischer Bedeutung ist nun die Beurteilung der Qualität der erhaltenen Schätzungen. Obwohl gleich genaue Beobachtungen vorliegen, überträgt sich dies im Allgemeinen nicht auf die Schätzungen. Die Ursache dafür liegt in geometrischen Besonderheiten der Unterräume  $U$  bzw.  $U^\perp$  in ihrer Lage zum Beobachtungsraum  $R^n$ . Die wichtigsten Hilfsmittel im Sinne dieser Geometrie-Analyse (Sensitivitäts-Analyse) stellen hierbei die Diagonal-Elemente  $h_{i,i}$  bzw.  $r_{i,i} = 1 - h_{i,i}$  (Teilredundanzen) der Projektionsmatrizen, sowie die ausgeglichenen Verbesserungen und daraus abgeleitete Größen (z.B. standardisierte und studentisierte Verbesserungen) dar. Insbesondere versucht man dadurch Beobachtungen (einzelne oder kollektiv) zu charakterisieren, die einen grossen Einfluss auf die Schätzungen haben. In der Fachliteratur (siehe z.B. Chatterjee, Hadi 1988) wird dies durch die bekannten Begriffe Hebel-

punkt (High-Leverage-Point), einflussreiche Punkte (Influential Points) und Ausreisser (Outlier) charakterisiert.

Die Schwierigkeiten der Erkennung solcher Besonderheiten sind hinlänglich bekannt. Zahlreiche Beispiele hierfür wurden in der Literatur angeführt und resultierten in einer kaum überschaubaren Vielzahl neuer Diagnoseverfahren.

In unserem Beitrag versuchen wir etwas mehr Klarheit in die verschiedenartigen Begriffsbildungen zu bringen und eine gemeinsame Grundlage zu schaffen. Dies geschieht durch Einführung sogenannter Plücker-Koordinaten zur Geometriebeschreibung.

Plücker-Koordinaten entstammen der algebraischen Geometrie (siehe z.B. van der Waerden 1973) und stellen homogene Koordinaten zur Beschreibung eines  $u$ -dimensionalen Unterraums  $U$  des  $R^n$  dar. Auch in der Approximationstheorie ( $L_1, L_\infty$ ) stellen sie wichtige theoretische Hilfsmittel dar (siehe z.B. Finzel 1994). Erste Betrachtungen und Anwendungen für die  $L_2$ -Theorie wurden von den Autoren in der Zeitschrift für Vermessungswesen veröffentlicht (Jurisch, Kampmann 1998; Jurisch, Kampmann, Linke 1999 I/II).

Die Bestimmung der Plücker-Koordinaten erfolgt nun durch Berechnung aller  $u$ -reihigen Determinanten, die sich aus einer Basis des Unterraumes  $U$  ergeben. Sei dazu  $U$  der Unterraum, der durch die Spalten der Design-Matrix  $A$  aufgespannt wird. Betrachtet man die Matrix  $A$  als Matrix ihrer Zeilen:

$$A = (a^1, \dots, a^n)^T, \quad (1.9)$$

so erhält man eine Plücker-Koordinate  $d$  durch Auswahl von  $u$  paarweise verschiedenen Indizes  $i_1, \dots, i_u$  und Berechnung der Determinante der entsprechenden Submatrix von  $A$ :

$$d = d_{i_1, \dots, i_u} = \det(a^{i_1}, \dots, a^{i_u})^T \\ i_1, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\} \quad (1.10)$$

Offensichtlich gibt es  $\binom{n}{u}$  Plücker-Koordinaten. Diese sind jedoch nicht unab-

hängig, sondern erfüllen die sogenannten Plücker-Relationen (van der Waerden 1973; Jurisch, Kampmann, Linke 1999 I/II). Aus den Plücker-Koordinaten zu  $U$  ergeben sich auch unmittelbar diejenigen des orthogonalen Komplements  $U^\perp$ . Neben den Plücker-Koordinaten zur Matrix  $A$  aus (1.9) benötigen wir des Weiteren die entsprechenden Plücker-Koordinaten zur durch den Beobachtungsvektor  $l$  erweiterten Matrix  $A^l$ :

$$A^l = (A \mid l) \quad (1.11)$$

Diese werden durch  $\bar{d}$  bezeichnet:

$$\bar{d} = \bar{d}_{i_1, \dots, i_{u+1}}, \quad i_1, \dots, i_{u+1} \in \{1, \dots, n\} \quad (1.12)$$

Des Weiteren bezeichne  $A_i^l$  diejenige Matrix, die aus  $A$  entsteht, indem man die  $j$ -te Spalte von  $A$  durch  $l$  ersetzt. Diese Plücker-Koordinaten werden durch  $\tilde{d}_i$  bezeichnet:

$$\tilde{d}^j = \tilde{d}_{i_1, \dots, i_u}^j, \quad i_1, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\} \quad (1.13)$$

Um hervorzuheben, dass eine Plücker-Koordinate die  $i$ -te Beobachtung enthält, benutzen wir die Schreibweise  $d_i$ :

$$d_i = d_{i, i_2, \dots, i_u} \quad i_2, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \quad (1.14)$$

Analog bezeichne  $d_{(i)}$  eine Plücker-Koordinate, die die  $i$ -te Beobachtung nicht enthält:

$$d_{(i)} = d_{i_1, \dots, i_u} \quad i_1, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \quad (1.15)$$

Analoge Bezeichnungen gelten auch für die Plücker-Koordinaten  $\bar{d}$  bzw.  $\tilde{d}$ . Des Weiteren vereinbaren wir eine Summenkonvention zur Vereinfachung der Schreibweise. In Summen über Plücker-Koordinaten wird über alle Möglichkeiten summiert, die die Auswahl der nicht festgelegten Indizes betreffen. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden:

$$\sum d^2 = \sum d_{i_1, \dots, i_u}^2$$

$$i_1, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum d_i d_j = \sum d_{i, i_2, \dots, i_u} d_{j, i_2, \dots, i_u}$$

$$i_2, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\} / \{i, j\} \quad (1.16)$$

Im Weiteren werden wir nun aufzeigen, dass sich sowohl die Projektionsmatrizen als auch die Schätzungen als einfache Funktionen der Plücker-Koordinaten ergeben. Wir beginnen mit einer Darstellung von  $H$  und  $R$ .

Es gilt:

$$h_{i,i} = \frac{1}{D} \sum d_{(i)}^2 \quad i = 1, \dots, n$$

$$h_{i,j} = \frac{1}{D} \sum d_i d_j \quad i \neq j$$

$$r_{i,i} = 1 - h_{i,i} = \frac{1}{D} \sum d_{(i)}^2 \quad i = 1, \dots, n$$

$$D = \sum d^2 = \det(A^T A) \quad (1.17)$$

Aus (1.17) wird Folgendes ersichtlich: Die Quadratsumme aller Plücker-Koordinaten entspricht der Determinante der Normalgleichungsmatrix  $A^T A$ , welche im Weiteren als Gesamtmasse der Plücker-Koordinaten bezeichnet wird.

Die Größen  $h_{i,i}$  bzw.  $r_{i,i}$  beschreiben also die Anteile der Plücker-Koordinaten, die die  $i$ -te Beobachtung enthalten bzw. nicht enthalten. Aus der Darstellung (1.17) lassen sich in einfachster Weise bekannte Sachverhalte ableiten, von denen nur einige aufgeführt werden sollen.

Offensichtlich gilt  $h_{i,i} \in [0, 1]$ , wobei die Grenzfälle  $h_{i,i} = 1$  (Restriktion) bzw.  $h_{i,i} = 0$  (vollredundante Beobachtung) nur dann auftreten, falls alle Plücker-Koordinaten, die die  $i$ -te Beobachtung enthalten (bzw. nicht enthalten), verschwinden. Die Ursache für das Verschwinden liegt dabei offensichtlich in linearen Abhängigkeiten der Spalten bzw. Zeilen der entsprechenden Submatrix, die zur Bildung

herangezogen wurde. Sind alle Plücker-Koordinaten gleich gross, so wird

$$h_{i,i} = \frac{u}{n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wie man anhand der Normalform der Design-Matrix erkennen kann, ist die Gleichheit aller Plücker-Koordinaten im Fall  $n > 3$  nur für  $u = 1$  bzw.  $u = n-1$  möglich. Die Summe der  $h_{i,i}$  ist  $u$  (Ansatz-Probe), da in dieser Summe jede Plücker-Koordinate genau  $u$  mal auftritt.

Wir untersuchen nun, wie sich die Größen in (1.17) bei Einführung von Beobachtungsgewichten ändern. Die Beobachtungsgewichte  $p_i = \sqrt{P_i}$  können dabei sowohl durch Homogenisierung aus dem Modell (1.1) stammen (a-priori-Gewichte) als auch durch andere Vorgaben (etwa bei robusten Verfahren durch iterative Regewichtung) entstehen. Zunächst untersuchen wir die Auswirkung auf die Plücker-Koordinaten. Mit  $d(P)$  bezeichnen wir eine solche Plücker-Koordinate. Dann gilt offensichtlich:

$$d(P) = d_{i_1, \dots, i_u}(P) = p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_u} d_{i_1, \dots, i_u}, \quad (1.18)$$

d.h., die ursprünglichen Plücker-Koordinaten werden mit denjenigen Gewichten multipliziert, die den verwendeten Beobachtungen entsprechen. Unter Ausnutzung dieses Aspektes lässt sich folgende Aussage über die Sensitivität der Hauptdiagonalelemente von  $H(P)$  beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{i,i}}{\partial P_i} &= \frac{h_{i,i}(1-h_{i,i})}{P_i} & i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial h_{i,j}}{\partial P_j} &= -\frac{h_{i,j}^2}{P_j} & i \neq j \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die  $h_{i,j}$  stellen also monoton wachsende Funktionen bzgl. des eigenen Gewichts  $P_i$  dar, jedoch monoton fallende Funktionen bzgl. anderer Gewichte  $P_j$  mit  $j \neq i$ . Insbesondere können voll-redundante Beobachtungen ( $h_{i,i} = 0$ ) und Restriktionen ( $h_{i,i} = 1$ ) durch Gewichtung nicht beeinflusst werden. Liegen die Werte von  $h_{i,j}$  in der Nähe von 1 bzw. 0, bewirken selbst

große Gewichte nur kleine Veränderungen der  $h_{i,j}$ .

Wir zeigen nun, wie sich die Schätzung  $\hat{x}_j$  der unbekannten Parameter als Funktion der Plücker-Koordinaten  $d$  aus (1.10) und  $\tilde{d}$  aus (1.13) ergibt:

$$\hat{x}_j = \frac{1}{D} \sum d \tilde{d}^j \quad (1.20)$$

Vereinbart man weiterhin, dass nur über nichtverschwindende Plücker-Koordinaten  $d \neq 0$  summiert wird, erhält man aus (1.20):

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= \sum w_i \frac{\tilde{d}_i^j}{d_i}, & j = 1, \dots, u \\ w_i &= \frac{d^2}{D}, & \sum w_i = 1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Hieraus wird ersichtlich, dass sich die Schätzung der Parameter als gewichtetes arithmetisches Mittel der Größen

$$\frac{\tilde{d}_i^j}{d_i}$$

ergibt. Nach der Cramerschen Regel für quadratische, konsistente Gleichungssysteme sind dies jedoch die Werte für  $x_j$ , die sich aus jeweils  $u$  Beobachtungen ergeben. Für  $u = 1$  ergibt sich aus (1.21) unmittelbar das arithmetische Mittel der Beobachtungen (bzw. das gewichtete arithmetische Mittel). Für  $u = n$  stellt (1.21) die Cramersche Regel dar. Die Gewichte in (1.21) hängen von den Plücker-Koordinaten (geometrische Gewichte) ab. Da im Allgemeinen nicht alle Plücker-Koordinaten gleich gross sein können, ist dies jedoch kein arithmetisches Mittel. Dies wird auch deutlich, falls man die Summe in (1.21) in die Anteile aufspaltet, die zur  $i$ -ten Beobachtung gehören bzw. nicht gehören:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= h_{i,i} \sum w_i \frac{\tilde{d}_i^j}{d_i} + (1-h_{i,i}) \sum w_{(i)} \frac{\tilde{d}_{(i)}^j}{d_{(i)}} \\ w_i &= \frac{d_i^2}{\sum d_i^2} \quad (\sum w_i = 1) \end{aligned}$$

$$w_{(i)} = \frac{d_{(i)}^2}{\sum d_{(i)}^2} \quad (\sum w_{(i)} = 1) \quad (1.22)$$

Für Werte von  $h_{i,i}$  in der Nähe von 1 (oder gleich 1) wird  $\hat{x}_j$  also im Wesentlichen aus den Werten geschätzt, die die  $i$ -te Beobachtung enthalten. Analoges gilt für Werte in der Nähe von 0.

Zerlegt man den Beobachtungsvektor  $I$  gemäß

$$I = \bar{I} + \varepsilon \quad (1.23)$$

wobei  $\bar{I}$  die wahren Werte (Erwartungswerte) und  $\varepsilon$  den Fehlervektor bezeichnet, so ergibt sich unmittelbar aus (1.22):

$$\begin{aligned} \hat{x}_j - \bar{x}_j &= h_{i,i} \sum w_i \frac{\tilde{d}_i^j(\varepsilon)}{d_i} + \\ (1-h_{i,i}) \sum w_{(i)} \frac{\tilde{d}_{(i)}^j(\varepsilon)}{d_{(i)}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Hierbei ist  $\bar{x}_j$  der wahre Wert des unbekannten Parameters  $x_j$  und  $\tilde{d}_i^j(\varepsilon)$  bezeichnet diejenige Plücker-Koordinate, die erhalten wird durch Ersetzen der  $j$ -ten Spalte von  $A$  durch den Fehlervektor  $\varepsilon$ . (1.24) kann z.B. zu Simulationsstudien im Sinne einer postoptimalen Problemmodifikation genutzt werden.

Wir wenden uns nun dem Studium der geschätzten Werte  $\hat{v}$  und  $\hat{\sigma}$  bzw.  $\hat{v}^T \hat{v}$  zu. Dabei kommen die Plücker-Koordinaten der erweiterten Design-Matrix (im Weiteren erweiterte Plücker-Koordinaten genannt) zur Anwendung (siehe (1.18)). Es gilt:

$$\hat{v}_i = \frac{1}{D} \sum d_{(i)} \bar{d}_i \quad (1.25)$$

$$\hat{v}^T \hat{v} = \bar{D}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\bar{D}}{(n-u)D}$$

$$\bar{D} = \sum \bar{d}^2 = \det((A^1)^T A^1)$$

$$D = \sum d^2 = \det(A^T A) \quad (1.26)$$

Unter Verwendung der Zerlegung (1.23)

erhält man die Aussage, dass sich die Plücker-Koordinaten  $\bar{d} = \bar{d}(l)$ , die durch Ränderung von A mit l entstehen, nicht von denjenigen Plücker-Koordinaten unterscheiden, die durch Ränderung von A mit dem Fehlervektor  $\varepsilon$  entstehen:

$$\bar{d}(l) = \bar{d}(\varepsilon), \quad \bar{d}(l) = 0 \quad (1.27)$$

In diesem Sinne können die Plücker-Koordinaten  $\bar{d}$  als lokale Fehlerschätzer verstanden werden. Liegt insbesondere nur eine fehlerhafte Beobachtung vor ( $\varepsilon_i \neq 0$ ,  $\varepsilon_j = 0$ ,  $j \neq i$ ), so gilt:

$$\bar{d}_{i_1, \dots, i_{u+1}} = 0$$

$$i_1, \dots, i_{u+1} \in \{1, \dots, n\} / \{i\}$$

$$\bar{d}_{i_1, \dots, i_u, i} = \varepsilon_i \cdot d_{i_1, \dots, i_u}$$

$$i_1, \dots, i_u \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \quad (1.28)$$

d.h., alle erweiterten Plücker-Koordinaten verschwinden, die die fehlerhafte Beobachtung nicht enthalten. In diesem Fall geht (1.26) unter Beachtung von (1.17) über in:

$$\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}} = r_{i,i} \cdot \varepsilon_i^2 \quad (1.29)$$

Lässt man in (1.25) alle verschwindenden Summanden weg und dividiert beide Seiten durch  $r_{i,i} \neq 0$  (keine Restriktion), so erhält man:

$$\frac{\hat{v}_i}{r_{i,i}} = \sum w_{(i)} \frac{\bar{d}_{(i)}}{d_{(i)}} \quad (1.30)$$

$$w_{(i)} = \frac{d_{(i)}^2}{\sum d_{(i)}^2} \quad \left( \sum w_{(i)} = 1 \right)$$

Die Größen auf der linken Seite in (1.30) werden in der Literatur auch Grobfehlerschätzungen genannt. Nach (1.30) ergeben sie sich als gewichtetes arithmetisches Mittel der Größen

$$\bar{d}_{(i)}$$

Diese Größen können aber ebenfalls als diejenigen Grobfehlerschätzungen interpretiert werden, die sich für die i-te Be-

obachtung aus den ( $u+1$ ) Beobachtungen, die zu  $\bar{d}_i$  gehören, ergeben.

Wir wenden uns nun dem Problem der Ausreissersuche (Grobfehleraufdeckung) zu. Wir betrachten dazu eine nichtverschwindende Plücker-Koordinate  $\bar{d}_i \neq 0$ . Unter Beachtung von (1.27) und der Schwarzschen Ungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= \bar{d}_{i_1, \dots, i_u, i} \\ i_1, \dots, i_u &\in \{1, \dots, u\} / \{i\} \\ \frac{\bar{d}_i^2}{\sum d_{j_1, \dots, j_u}^2} &\leq \varepsilon_i^2 + \sum_{k=1}^u \varepsilon_{i_k}^2 \\ j_1, \dots, j_u &\in \{i_1, \dots, i_u, i\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

(1.31) stellt eine Fehlerabschätzung für die Fehler in den Beobachtungen  $i, i_1, \dots, i_u$  dar. Große Werte von  $\bar{d}_i$  können somit auf große Fehler hinweisen. Jedoch kann ein solcher grober Fehler nicht innerhalb dieser Beobachtungen detektiert werden. Wir wenden uns deshalb zunächst der Frage nach kleinen (bzw. verschwindenden) Plücker-Koordinaten  $\bar{d}_i$  zu, da diese auf kleine Fehler hinweisen könnten. Dabei geht es jedoch nicht um einzelne Plücker-Koordinaten, sondern um Gruppen von Beobachtungen, für die alle Plücker-Koordinaten klein sind, die diese Beobachtungen nicht enthalten. Sei dazu:

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

eine Indexmenge und  $\bar{d}_i$  bezeichne alle möglichen Plücker-Koordinaten, die die Indizes aus I nicht enthalten. Um die «Kleinheit» dieser Plücker-Koordinaten zu quantifizieren, setzen wir die Masse (Quadratsumme) ins Verhältnis zur Gesamtmasse:

$$\bar{r}_I = \frac{\sum \bar{d}_{(I)}^2}{\sum \bar{d}^2} \quad (1.32)$$

Ist  $\bar{r}_I$  klein, so bringen die Beobachtungen, die nicht zu I gehören, nach (1.26) auch nur einen kleinen Beitrag zur Schätzung von  $\hat{\sigma}$ . Ist I einteilig ( $I = \{i\}$ ), so

geht (1.32) über in:

$$\bar{r}_i = \frac{\sum \bar{d}_{(i)}^2}{\sum \bar{d}^2} = \bar{r}_{i,i} = 1 - \bar{h}_{i,i} \quad (1.33)$$

Die Größen  $\bar{r}_{i,i}$  sind jedoch die Diagonalelemente der Projektionsmatrizen  $\bar{R}$  bzw.  $\bar{H}$ , die sich aus der erweiterten Designmatrix ergeben. Diese stellen bekannte Diagnosetools dar (siehe z.B. Chatterjee, Hadi 1988). Insbesondere gilt der Zusammenhang:

$$\bar{H} = H + \frac{vv^T}{v^T v} \quad (1.34)$$

Des Weiteren kann die Idee in (1.32) sofort auf die Untersuchung von Hebelpunkten (Gruppen von Hebeln) übertragen werden, indem man statt der Plücker-Koordinaten  $\bar{d}$  die Plücker-Koordinaten d verwendet.



Hat man nun eine solche Indexmenge  $I$  aufgedeckt, für die  $\bar{r}_i$  klein ist (verschwindet), so muss noch nach der Ursache für die Kleinheit der damit verbundenen Plücker-Koordinaten gesucht werden. Als Ursache dafür kommen jedoch nur zwei Aspekte ins Spiel. Die Indexmenge  $I$  kann Heelpunkte (auch im Sinne von Gruppen) enthalten, die zur Kleinheit von entsprechenden Plücker-Koordinaten führen. Diese müssen aus  $I$  entfernt werden. Die Kleinheit dieser Plücker-Koordinaten ist somit geometrisch bedingt. Für verbleibende Plücker-Koordinaten kommen als Ursache für die Kleinheit nur statistische Ursachen (kleine Fehler) in Betracht. Aus (1.31) erhält man dann realistische Grobfehlerschätzungen, falls man  $i_1, \dots, i_u \notin I$  wählt.

## Beispiele:

Siehe Tagungs-Proceedings

messungswesen, 123: 350–357 (Teil I), 388–395 (Teil II).

Van der Waerden, B.L. (1973): Einführung in die algebraische Geometrie, Springer Verlag, Berlin.

## Literatur:

Chatterjee, S., Hadi, A. S. (1988): Sensitivity Analysis in Linear Regression. John Wiley & Sons, New York.

Finzel, M. (1994): Linear Approximation in  $L^\infty$ . Journal of Approximation Theory, Vol. 76: 326–350.

Jurisch, R., Kampmann, G. (1998): Vermittelnde Ausgleichsrechnung mit balancierten Beobachtungen – erste Schritte zu einem neuen Ansatz. Zeitschrift für Vermessungswesen, 123: 87–92.

Jurisch, R., Kampmann, G., Linke, J. (1999): Über die Analyse von Beobachtungen in der Ausgleichsrechnung. Zeitschrift für Ver-

Prof. Dr. rer. nat. Ronald Jurisch  
Prof. Dr.-Ing. Georg Kampmann  
Hochschule Anhalt (FH)  
Fachbereich Vermessungswesen  
Forschungsgruppe GeoMath  
Postfach 2215  
D-06846 Dessau

## **swipos®-Positionierungsdienste des Bundesamtes für Landestopographie**



### **swipos – NAV**

- Metergenauigkeit in Echtzeit
- Zugang mit speziellem UKW/RDS-Decoder
- Anwendung im Natur- und Umweltschutz, Planung sowie Land- und Forstwirtschaft



### **swipos – GIS/GEO**

- cm-Genauigkeit in Echtzeit
- Zugang mit GSM über 0900-Dienstenummer
- Erhöhte Wirtschaftlichkeit dank Wegfall einer eigenen Referenzstation
- Ideal für den GIS- und Vermessungsbereich

Bundesamt für Landestopographie  
**swipos**

Seftigenstrasse 264  
CH-3084 Wabern

Telefon 031/963 23 76  
[swipos@LT.admin.ch](mailto:swipos@LT.admin.ch)