

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 99 (2001)

**Heft:** 3

**Artikel:** Ausgleichung nach maximaler Korrelation in der geometrischen Deformationsanalyse

**Autor:** Neitzel, Frank

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-235743>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ausgleichung nach maximaler Korrelation in der geometrischen Deformationsanalyse

Als Alternative zu den Standardverfahren in der geometrischen Deformationsanalyse wird ein Formenvergleich auf Grundlage einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation eingeführt. Mit dieser Auswertestrategie ist es möglich, korrekte Aussagen über stabile und instabile Punkte zu treffen, sogar in Fällen, in denen die auf metrischen Kriterien basierenden Standardverfahren versagen.

*Comme alternative aux méthodes standard pour l'analyse géométrique de déformation, on utilise une comparaison des formes sur la base d'une compensation selon la corrélation maximale. Par cette stratégie, il est possible de faire des propositions correctes sur des points stables et instables, même dans les cas où les méthodes standard basées sur des critères métriques sont défaillantes.*

Come alternativa ai processi standard nell'analisi della deformazione geometrica si introduce un confronto delle forme basato su una compensazione con massima correlazione. Grazie a questa strategia di valutazione, è possibile fare affermazioni corrette sulla stabilità o instabilità dei punti, addirittura in casi in cui falliscono i processi standard basati su criteri metrici.

F. Neitzel

## 1. Einleitung

Die geometrische Deformationsanalyse ist eine Aufgabenstellung bei der von vornherein bekannt ist, dass in den Daten nicht nur zufällige Einflüsse enthalten sind. Dennoch basieren die gebräuchlichen Auswertestrategien auf einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit dem Ziel  $\Sigma pvv \rightarrow \min$ . Ausführliche Abhandlungen dazu sind in Pelzer (1971) und Niemeier (1979) zu finden, einen aktuellen Überblick bieten Welsch et al. (2000). Auf der Grundlage von Koordinaten in mindestens zwei Epochen wird die zu untersuchende Epoche auf eine Referenzepoche transformiert, um im Anschluss aus den Residuen eine Aussage über Deformationserscheinungen abzuleiten. Diese Modellbildung ist jedoch in Bezug auf die über die zufälligen Fehler hinausgehenden Punktverschiebungen als unvollständig anzusehen, was die Residuenanalyse erschwert oder sogar unmöglich macht, da sich die Residuen aus drei Komponenten zusammensetzen:

Residuen nach Transformation =  
tatsächliche Deformationen +  
Transformationsdefekt + zufällige Fehler

Die einzige Lösung dieses Problems besteht darin, die Punkte in stabile und instabile Punkte zu unterteilen. In den bekannten Standardverfahren erfolgt diese Klassifizierung anhand metrischer Kriterien (z.B. Interpretation von Klaffungsanteilen). Ein Beispiel in dem aufgezeigt wird, dass ein Standardverfahren ein falsches Ergebnis liefern kann, ist in Reinking (1994) zu finden.

Als alternatives Auswerteverfahren wird ein Formenvergleich unter Verwendung des Korrelationskoeffizienten entwickelt. Nach einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation (MCA1) ist es möglich, den Korrelationskoeffizienten zwischen den Punktgruppen als Kriterium für die Ähnlichkeit der Formen zu interpretieren. Diese Ausgleichung ist rein geometrisch begründet und somit ein non-probabilistisches Auswerteverfahren. Damit ist es möglich, stabile und instabile Punkte zu klassifizieren, sogar in Fällen, in denen die Lösungen nach metrischen Kriterien versagen.

## 2. Grundprinzip der Deformationsanalyse

Unabhängig vom Aufgabengebiet (Erkennung tektonischer Bewegungen, Überwachung von Bauwerken, Transformation heterogener geodätischer Netze, usw.) herrscht immer das gleiche Grundprinzip. Auf der Basis wiederholter Messungen werden die Koordinaten von Punktfeldern in zwei (oder mehr) Epochen miteinander verglichen. In der praktischen Anwendung sind dabei zwei Fälle grundsätzlich zu unterscheiden:

1. Die Datumsparameter sind im voraus bekannt.
2. Die Datumsparameter sind unbekannt (Allgemeinfall).

Im ersten Fall setzen sich die Residuen nach der Transformation aus zwei Komponenten zusammen:

Berechnete Abweichungen = Deformationen + Messfehler

Die Entscheidung, ob die Abweichungen aus Deformationserscheinungen resultieren, wird gewöhnlich mit Hilfe statistischer Tests getroffen.

Im zweiten Fall wird eine Transformation erforderlich, um die zu vergleichenden Epochen in ein einheitliches Datum zu überführen. Die Berechnung der dafür erforderlichen Parameter erfolgt in der Regel mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten. Die daraus resultierenden Residuen sind aber oftmals schwer (manchmal sogar gar nicht) zu interpre-

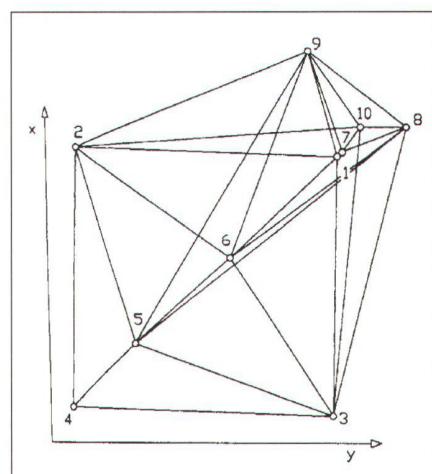


Abb. 1: Beispielnetz.

Pkt. Nr.	Epoche I		Epoche II	
	Y [m]	X [m]	y [m]	x [m]
1	220.00	220.00	222.00	217.50
2	20.00	220.00	22.50	222.50
3	220.00	20.00	217.50	17.50
4	20.00	20.00	16.00	25.50
5	70.00	70.00	68.00	73.00
6	140.00	140.00	140.00	140.50
7	225.00	220.00	225.00	220.00
8	275.00	240.00	275.00	240.00
9	200.00	300.00	200.00	300.00
10	240.00	240.00	242.00	237.50

Tab. 1: Koordinatenverzeichnis des Netzes.

tieren, da sie sich aus drei Komponenten zusammensetzen:

Residuen nach Transformation = tatsächliche Deformationen + Transformationsdefekt + Messfehler

Die einzige Lösung dieses Problems besteht in einer Klassifizierung des Punktfeldes in stabile und instabile Punkte. Für diese Entscheidung sind die berechneten Transformationsparameter aber nicht in allen Fällen zu gebrauchen aufgrund des Transformationsdefekts verursacht durch die instabilen Punkte.

### 3. Deformationsanalyse mit metrischen Kriterien

Bei dem folgenden Beispiel (Abbildung 1) handelt es sich um einen Datensatz, der in Reinking (1994) verwendet wird, um aufzuzeigen, dass heutzutage gebräuchliche Algorithmen bei bestimmten Netzkonfigurationen nicht in der Lage sind, ähnliche oder sogar kongruente Punktgruppen aufzufinden. Da die Koordinaten (Tabelle 1) bereits im Soll-Datum bekannt sind, ist zu erkennen, dass die Punkte 7, 8 und 9 eine kongruente Punktgruppe (identische Koordinaten in beiden Epochen) bilden. Diese Information soll aber während der Berechnung nicht verwendet werden und das geodätische Datum soll als unbekannt angenommen werden.

Für die somit erforderliche Datumstransformation hat Reinking (1994) das Ver-

Punkt	R <sub>f</sub>	Punkt	R <sub>f</sub>
1	14.16	6	14.63
2	13.60	7	14.68
3	12.92	8	12.69
4	12.74	9	12.67
5	15.50	10	13.74

Tab. 2: Testgrösse R<sub>f</sub>.

fahren «Lokalisierung mit S-Transformation» mit festem Massstab zwischen beiden Epochen verwendet. Nach der Berechnung der Testgrösse R<sub>f</sub>, für Details siehe Niemeier (1985), wird der Punkt, der den geringsten Wert für R<sub>f</sub> liefert (Tabelle 2), als instabil deklariert.

In diesem Fall liefert Punkt 9 den geringsten Wert für die Testgrösse R<sub>f</sub> und ist somit aus der Gruppe der stabilen Punkte zu eliminieren. Da aber in diesem Beispiel bekannt ist, dass es sich bei Punkt 9 um einen stabilen Punkt handelt, führt diese Methode hier nicht zu einem korrekten Ergebnis.

### 4. Formenvergleich durch Ausgleichung nach maximaler Korrelation

Als Alternative zur Deformationsanalyse mit metrischen Kriterien soll nun der Vergleich von Formen verwendet werden.

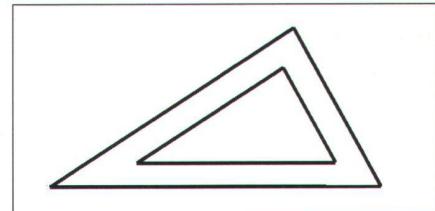


Abb. 2: Zwei ähnliche Dreiecke in homothetischer Lage.

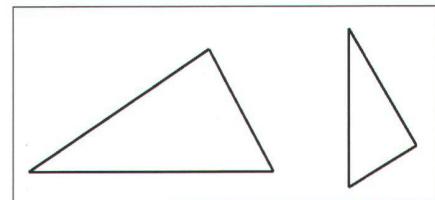


Abb. 3: Zwei ähnliche Dreiecke in beliebiger Lage.

Dieser Vergleich basiert auf der Ähnlichkeit von Formen und kann mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten beschrieben werden.

#### 4.1 Der Korrelationskoeffizient

Ausgehend von der Definition des Korrelationskoeffizienten für zwei Gruppen reeller Zahlen wird dieser nun in einer generalisierten Form zwischen Gruppen von Vektoren aufgestellt. Für den Vergleich zweier Punktgruppen mit jeweils n Punkten bietet sich die Möglichkeit an, die Koordinaten als Vektoren in einem m-dimensionalen Vektorraum (z.B. m = 2 in der Ebene) zu betrachten. Die Vektoren

(siehe Formel 1)

beinhalten dann die Koordinaten der Punkte in Epoche 1 bzw. 2 und man erhält den Korrelationskoeffizienten in der Form

$$r^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{w}_i - \bar{\mathbf{w}}) \cdot (\mathbf{z}_i - \bar{\mathbf{z}}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (\mathbf{w}_i - \bar{\mathbf{w}})^2 \sum_{i=1}^n (\mathbf{z}_i - \bar{\mathbf{z}})^2} \quad (2)$$

mit

$$\mathbf{w}_i = [w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,m}]^T \in \mathbb{R}^m \text{ und } \mathbf{z}_i = [z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,m}]^T \in \mathbb{R}^m, (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \text{ und } \bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i . \quad (3)$$

## 4.2 Ausgleichung nach maximaler Korrelation (MCA)

Die Grösse des berechneten Wertes für den Korrelationskoeffizienten  $r^2$  ist abhängig von

1. dem Ausmass der Übereinstimmung der Formen (Ähnlichkeit),
2. der relativen Position der Konfigurationen zueinander.

Dies soll an einem einfachen geometrischen Beispiel mit zwei ähnlichen Dreiecken veranschaulicht werden. Um die Formen zu vergleichen werden Koordinaten verwendet, so dass jeweils ein Koordinatensystem festgelegt werden muss. Wählt man diese so, dass sich die relative Position in Abbildung 2 ergibt, erhält man den Wert  $r^2 = 1$ . Wählt man die Koordinatensysteme derart, dass man z.B. die Position der Dreiecke wie in Abbildung 3 erhält, so wird der Korrelationskoeffizient nicht mehr  $r^2 = 1$  sein.

Um nur die Übereinstimmung der Formen festzustellen, müssen alle relativen Positionen beider Koordinatensysteme untersucht werden und diejenige ausgewählt werden, die den maximalen Korrelationskoeffizienten liefert. Dies erfolgt durch eine Ausgleichung nach maximaler Korrelation. Damit erhält man einen Korrelationskoeffizienten, der frei vom Einfluss der Koordinatensysteme ist und nur das Mass der Ähnlichkeit der Formen darstellt.

## 4.3 Definition und Eigenschaften des Ausgleichungsergebnisses nach maximaler Korrelation

Die Lösung einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation wird von Petrovic (1997) folgendermassen definiert:

Wenn in einer gegebenen Klasse von reellen Funktionen  $F$  ein Element  $f \in F$  existiert, derart, dass der Korrelationskoeffizient (quadrert)  $r^2(l, f(x))$  seinen maximal möglichen Wert bezüglich der Klasse  $F$  annimmt, dann ist die Funktion  $f$  die Lösung eines Ausgleichungsproblems nach maximaler Korrelation.

Diese Ausgleichung hat folgende Eigenschaft, siehe Petrovic (1991):

Ist  $f \in F$  eine Lösung nach maximaler Korrelation und gilt  $c_1 + c_2 f \in F$  mit  $c_1, c_2 \in \mathfrak{R}$ , dann ist  $c_1 + c_2 f$  ebenfalls eine Lösung, nämlich  $r^2(\lambda, c_1 + c_2 f) = r^2(\lambda, f)$ .

Die Lösung einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation ist somit im allgemeinen nicht eindeutig, sondern besteht vielmehr aus einer ganze Klasse aus der es eine geeignete Lösung auszuwählen gilt.

## 5. Ausgleichung nach maximaler Korrelation zwischen zweidimensionalen Ortsvektoren

### 5.1 Funktionales Modell

Als funktionales Modell wird eine 4-Parameter-Transformation

(siehe Formel 4)

mit  $X_0, Y_0$  Translation des Koordinatenursprungs,  $\alpha$  Rotationswinkel,  $m$  Massstabsfaktor angesetzt. Führt man die Abkürzungen  $a = m \cos \alpha$  und  $o = \sin \alpha$  ein, erhält sich

$$X = a x - o y + X_0 \text{ und } Y = o x + a y + Y_0 . \quad (5)$$

### 5.2 Der Korrelationskoeffizient

Ausgehend von den Gleichungen (5) wird nun der Korrelationskoeffizient zwischen den Vektoren

(siehe Formel 6)

aufgestellt. Die Mittelwerte  $\bar{\mathbf{w}}$  und  $\bar{\mathbf{z}}$  ergeben sich, mit  $n =$  Anzahl der homologen Punkte, zu

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} a \bar{x} - o \bar{y} + X_0 \\ a \bar{y} + o \bar{x} + Y_0 \end{bmatrix} \text{ und } \bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Setzt man die Vektoren (6) und (7) in den Korrelationskoeffizienten (2) ein, so erhält man

(siehe Formel 8)

Nach Bildung der Skalarprodukte und einigen Umformungen ergibt sich die endgültige Form

(siehe Formel 9)

wobei zu erkennen ist, dass sich die Translationsparameter  $X_0, Y_0$  aufgehoben haben und sich der Massstabsfaktor  $m$  kürzt

$$X = (m \cos \alpha) x - (m \sin \alpha) y + X_0, \quad Y = (m \sin \alpha) x + (m \cos \alpha) y + Y_0 \quad (4)$$

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{i_x} \\ w_{i_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_i - o y_i + X_0 \\ a y_i + o x_i + Y_0 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} z_{i_x} \\ z_{i_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$r^2 = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} a x_i - o y_i + X_0 \\ a y_i + o x_i + Y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \bar{x} - o \bar{y} + X_0 \\ a \bar{y} + o \bar{x} + Y_0 \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} \right) \right\}^2}{\sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} a x_i - o y_i + X_0 \\ a y_i + o x_i + Y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \bar{x} - o \bar{y} + X_0 \\ a \bar{y} + o \bar{x} + Y_0 \end{bmatrix} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix} \right)^2} \quad (8)$$

$$r^2 = \left\{ \left( \cos \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i X_i - n \bar{x} \bar{X} + \sum_{i=1}^n y_i Y_i - n \bar{y} \bar{Y} \right) + \sin \alpha \left( \sum_{i=1}^n x_i Y_i - n \bar{x} \bar{Y} - \sum_{i=1}^n y_i X_i + n \bar{y} \bar{X} \right) \right)^2 \right\} / \left\{ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right) \times \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 + \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n \bar{Y}^2 \right) \right\} \quad (9)$$

zen liess. Diese Eigenschaften führen zu folgendem Satz:

#### Satz 1:

Sind  $n > 2$  homologe Punkte in Koordinatensystemen gegeben, die mit einer 4-Parameter-Transformation ineinander überführt werden sollen und fasst man die Koordinaten jeweils als Ortsvektoren in einem 2-dimensionalen Vektorraum auf, so ist der Korrelationskoeffizient für diesen Fall unabhängig von den Translationsparametern  $X_0$  und  $Y_0$  und vom Massstabsfaktor  $m$ .

#### 5.3 Suche nach Maxima

In der Ausgleichung nach maximaler Korrelation soll die Lösung derart bestimmt werden, dass der Korrelationskoeffizient (9) seinen maximalen Wert ( $r^2 = \max \leq 1$ ) annimmt. Um den Extremwert zu bestimmen wird angenommen, dass der dazugehörige Punkt im Inneren des Definitionsbereichs der Funktion  $r^2$  liegt. Somit besteht die Aufgabe ein relatives Maximum zu finden. Durch Lösung der Gleichung  $dr^2/d\alpha = 0$  werden die stationären Punkte bestimmt, die danach auf ihre Extremwerteigenschaften zu überprüfen sind. Nach Bildung der Ableitung  $dr^2/d\alpha$  kann man die Gleichung  $dr^2/d\alpha = 0$  lösen und man erhält für den Extremwert die Lösung

$$\alpha = \arctan \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n \bar{x} \bar{Y} - \sum_{i=1}^n y_i X_i + n \bar{y} \bar{X}}{\sum_{i=1}^n x_i X_i - n \bar{x} \bar{X} + \sum_{i=1}^n y_i Y_i - n \bar{y} \bar{Y}}. \quad (10)$$

Die Beziehung zwischen dem Rotationswinkel aus der Ausgleichung nach maximaler Korrelation und dem Ergebnis aus einer Helmerttransformation werden in Abschnitt 6 näher untersucht.

#### 5.4 Residuenanalyse

Hat man durch Lösen der Gleichung (10) den Rotationswinkel  $\alpha$  gefunden, kann man mit ihm und den frei wählbaren Pa-

rametern  $m$ ,  $X_0$  und  $Y_0$  die ausgeglichenen Funktionswerte berechnen. Da man aber mit den frei wählbaren Parametern eine ganze Klasse von Lösungen generieren kann, erhält man auch für jeden Punkt eine ganze Klasse von Residuenvektoren. Diese Residuenvektoren, bzw. die daraus abgeleiteten Residuenbilder, gilt es zu interpretieren um systematische Punktverschiebungen zu identifizieren. Um eine strukturierte Datenanalyse durchführen zu können, ist es sinnvoll, die Residuen jeweils für alle Punkte gemeinsam in die Komponenten X- bzw. Y-Verschiebung zu zerlegen. So erhält man

$$\mathbf{v}_X = \begin{bmatrix} (m \cos \alpha) x_1 - (m \sin \alpha) y_1 + X_0 \\ \vdots \\ (m \cos \alpha) x_n + (m \sin \alpha) y_n + X_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

und

$$\mathbf{v}_Y = \begin{bmatrix} (m \cos \alpha) y_1 + (m \sin \alpha) x_1 + Y_0 \\ \vdots \\ (m \cos \alpha) y_n + (m \sin \alpha) x_n + Y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

mit

$m \in \mathbb{R}^+$  frei wählbar und  $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}$  frei wählbar.

Da die Parameter  $X_0$  und  $Y_0$  keinen Einfluss auf die relativen Verhältnisse zwischen den Residuen ausüben, liefert eine Variation dieser Werte keinen Informationsgewinn und man kann  $X_0 = \text{const.}$  und  $Y_0 = \text{const.}$  setzen und die Klasse aller Residuenvektoren lediglich durch Variation des Parameters  $m$  generieren. Die Kriterien für die Auswahl jeweils einer Lösung (aus der Klasse) können Annahmen für ein bestimmtes Verhalten von  $\mathbf{v}_X$  und  $\mathbf{v}_Y$  sein, z.B.:

- glatter Verlauf der Residuen innerhalb von Punktgruppen,
- bestimmte Größenordnung der Residuen für Punktgruppen.

Darauf folgt die Identifizierung der Form von systematischen Einflüssen, oder die Einteilung des Punktfeldes in Gruppen mit unterschiedlichen Deformationserscheinungen.

## 6. Zusammenhänge zwischen Helmerttransformation und MCA mit zweidimensionalen Ortsvektoren

Nummerische Untersuchungen haben gezeigt, dass der Rotationswinkel aus einer Helmerttransformation mit dem aus der Ausgleichung einer 4-Parameter-Transformation nach maximaler Korrelation übereinstimmt. Dieser Zusammenhang soll nun mit Hilfe eines Satzes von Petrovic (1997) weiter untersucht werden:

Wird die Lösung einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation  $f(x)$  in einer Klasse von Funktionen  $F$  gesucht mit der Eigenschaft

$$\forall f(x) \in F \quad \& \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 + c_2 f(x) \in F, \quad (13)$$

so gilt:

Die Lösung nach maximaler Korrelation ist nicht eindeutig, sondern eine ganze Klasse

$$\{f \mid f(x) = c_1 + c_2 f_0(x), c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq F, \quad (14)$$

wobei die Basisfunktion  $f_0(x)$  eine beliebige aus allen Lösungen sein kann. Weiterhin wurde von Petrovic (1991) bewiesen:

Falls  $F$  die Eigenschaft (13) aufweist, ist die Lösung nach kleinsten Quadraten in der Unterklasse (14) enthalten.

Somit kann man, wenn die Klasse  $F$  aller 4-Parameter-Transformationen (4) die Eigenschaft (13) besitzt, aus der Lösung einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation erzeugen. Für die Funktionen der 4-Parameter-Transformation (4) führt die Forderung (13) zu folgender Behauptung:

$$\begin{bmatrix} (c_2 m \cos \alpha) x_1 - (c_2 m \sin \alpha) y_1 + c_2 X_0 + c_1 \\ (c_2 m \cos \alpha) y_1 + (c_2 m \sin \alpha) x_1 + c_2 Y_0 + c_1 \\ \vdots \\ (c_2 m \cos \alpha) x_1 - (c_2 m \sin \alpha) y_1 + c_2 X_0 + c_1 \\ (c_2 m \cos \alpha) y_1 + (c_2 m \sin \alpha) x_1 + c_2 Y_0 + c_1 \end{bmatrix} \in F \quad (15)$$

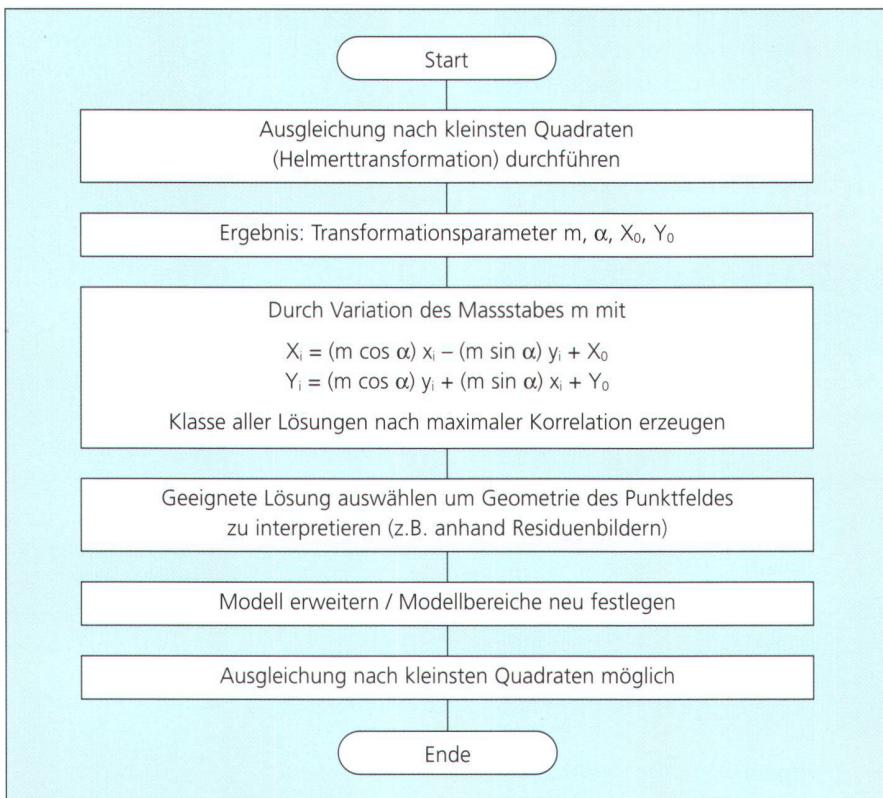


Abb. 4: Modelluntersuchung auf Basis der MCA-Lösungen generiert aus Ergebnissen einer Helmerttransformation.

Beweis:

Fasst man die neu entstandenen Ausdrücke zu

$$m' = c_2 m, X_0' = c_2 X_0 + c_1 \text{ und } Y_0' = c_2 Y_0 + c_1 \quad (16)$$

zusammen, so erhält man

$$\begin{bmatrix} (m' \cos \alpha) x_1 - (m' \sin \alpha) y_1 + X_0' \\ (m' \cos \alpha) y_1 + (m' \sin \alpha) x_1 + Y_0' \\ \vdots \\ (m' \cos \alpha) x_n - (m' \sin \alpha) y_n + X_0' \\ (m' \cos \alpha) y_n + (m' \sin \alpha) x_n + Y_0' \end{bmatrix} \in \mathbf{F}. \quad (17)$$

Dieser Ausdruck gehört zur selben Klasse von Funktionen  $\mathbf{F}$  wie die ursprünglichen

Funktionen der 4-Parameter-Transformation in den Gleichungen (4), was zu beweisen war. Somit ist gezeigt, dass sich die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation aus der «Helmert-Lösung» erzeugen lässt.

Abschliessend kann folgender Satz formuliert werden:

### Satz 2:

Sind  $n > 2$  homologe Punkte in Koordinatensystemen gegeben, die mit einer 4-Parameter-Transformation ineinander überführt werden sollen und fasst man die Koordinaten jeweils als Vektoren in einem 2-dimensionalen Vektorraum auf, so ist das Ergebnis einer Helmerttransformation eine Lösung aus der Klasse aller Lösungen der Ausgleichung nach maximaler Korrelation. Darüber hinaus lässt sich die Klasse aller Lösungen nach maximaler Korrelation aus der Helmert-Lösung erzeugen.

### 6.1 Bedeutung für die praktische Anwendung

Die in Satz 2 beschriebenen Eigenschaften sind von grosser Bedeutung für die praktische Anwendung. So kann die Klasse aller Lösungen einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation aus dem Ergebnis einer Helmerttransformation generiert werden, wobei für die Berechnung jede «Standardsoftware» verwendet werden kann. In Abbildung 4 ist diese Auswertestrategie als Ablaufplan dargestellt.

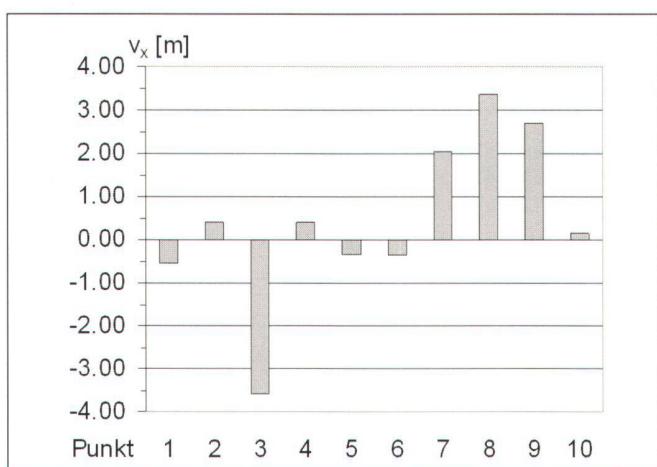


Abb. 5: Residuen  $v_x$  für die ausgewählte MCA-Lösung.

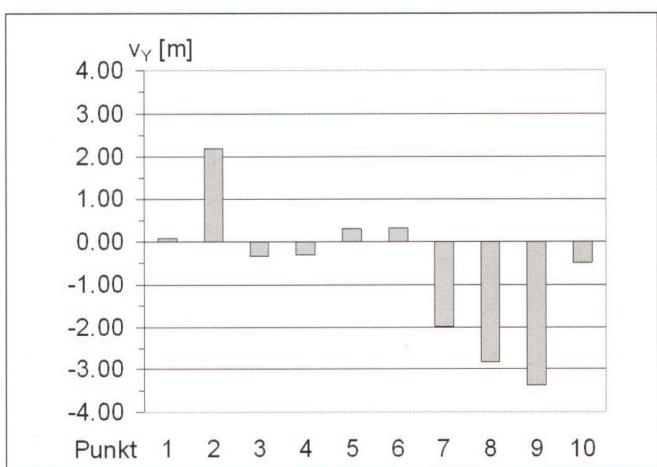


Abb. 6: Residuen  $v_y$  für die ausgewählte MCA-Lösung.

## 7. Deformationsanalyse durch Formenvergleich

Als Beispiel wird das gleiche Netz wie in Abschnitt 3 verwendet. Aus der Klasse aller Lösungen der Ausgleichung nach maximaler Korrelation wird jeweils eine Lösung ausgewählt und man erhält mit  $\alpha = 398.7078$ ,  $m = 1.0148$ ,  $X_0 = -5.800$ ,  $Y_0 =$  beliebig die Residuen  $v_x$  in Abbildung 5. Mit der Lösung  $\alpha = 398.7078$ ,  $m = 0.9917$ ,  $X_0 =$  beliebig,  $Y_0 = 4.350$  erhält man die in Abbildung 6 dargestellten Residuen  $v_y$ .

Die Interpretation der Residuenbilder ergibt, dass sich das Punktfeld in zwei Gruppen mit unterschiedlichem Deformationsverhalten aufteilen lässt:

- Gruppe 1 bestehend aus den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10,
- Gruppe 2 bestehend aus den Punkten 7, 8, 9.

Nach dieser Einteilung kann die Deformationsanalyse fortgesetzt werden, z.B. durch eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten für jede Gruppe. Führt man diese Ausgleichung durch, so zeigt sich, dass Gruppe 1 aus instabilen und Gruppe 2 aus stabilen Punkten besteht. Diese Einteilung entspricht den tatsächlichen Deformationen, die in diesem Beispiel im voraus bekannt waren.

## 8. Zusammenfassung

Als Alternative zu den Standardverfahren der geometrischen Deformationsanalyse wird ein Formenvergleich mit Hilfe einer Ausgleichung nach maximaler Korrelation entwickelt. Diese Ausgleichung ist rein geometrisch begründet und ist somit ein non-probabilistisches Auswerteverfahren. An einem Beispiel, in dem die Analyse mit metrischen Kriterien versagt, kann gezeigt werden, dass man mit Hilfe von MCA Residuenbilder erzeugen kann, die eine korrekte Einteilung in Punktgruppen mit unterschiedlichem Deformationsverhalten ermöglicht. Zudem werden die grundlegenden Zusammenhänge zwischen der Helmerttransformation und der Ausgleichung der 4-Parameter-Transformation nach maximaler Korrelation aufgezeigt.

### Anmerkungen:

<sup>1</sup> MCA = (engl.) Maximum Correlation Adjustment = (dt.) Ausgleichung nach maximaler Korrelation.

### Literaturverzeichnis:

Niemeier, W. (1979). Zur Kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer Netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 88, Hannover.

Niemeier, W. (1985). Deformationsanalyse. In: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II, Hrsg. Pelzer, H., Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

Pelzer, H. (1971). Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. DGK, Reihe C, Nr. 164, München.

Petrovic, S. (1991). Geometry of the Correlation Coefficient and its Application in Geodesy. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 71.

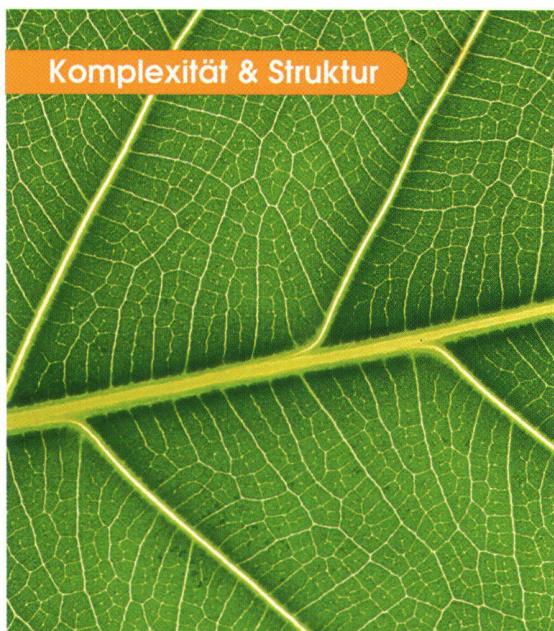
Petrovic, S. (1997). Maximum Correlation Adjustment and Incomplete Models. In: Proceedings of the Second Turkish-German Joint Geodetic Days, Berlin, pp. 687–694.

Reinking, J. (1994). Geodätische Analyse inhomogener Deformationen mit nichtlinearen Transformationsfunktionen. DGK, Reihe C, Nr. 413, München.

Welsch, W., O. Heunecke, H. Kuhlmann (2000). Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.

Frank Neitzel

Institut für Geodäsie und  
Geoinformationstechnik  
Technische Universität Berlin  
Strasse des 17. Juni 135  
D-10623 Berlin  
frank@mca.bv.tu-berlin.de



## Die Verwaltung und das Management von Leitungsnetzen ist komplex.

Da sind Sie als Unternehmen gefordert und verpflichtet zugleich. Sei es als Energieversorger, Industriewerk oder Kommune. Dazu brauchen Sie solide Werkzeuge und flexible Lösungen. Wir von BERIT haben für jeden Einsatzzweck die passende Softwarelösung. Basierend auf unserer LIDST™-Technologie. Absolut praxisnah und skalierbar für alle Aufgaben in der Ver- und Entsorgung. Ob für Gas, Wasser, Strom, Fernwärme oder Kanal. Setzen Sie bei der Organisation Ihrer Netze von Anfang an auf Qualität.

Fordern Sie uns!



[www.berit.ch](http://www.berit.ch)  
Info@berit.ch  
(+41) 061-816 99 99

