

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 99 (2001)

Heft: 3

Artikel: Intervallmathematische Behandlung von Unsicherheiten in geodätischen Messungen

Autor: Schön, Steffen / Kutterer, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-235741>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Intervallmathematische Behandlung von Unsicherheiten in geodätischen Messungen

In Vorverarbeitungsschritten vor der geodätischen Netzausgleichung müssen die gemessenen Beobachtungen wegen atmosphärischer, topographischer oder instrumenteller Effekte korrigiert werden. Die maximale Unsicherheit der für die Korrekturen nötigen zusätzlichen Informationen wird intervallmathematisch beschrieben und liefert Intervalle für die korrigierten Messungen. Diese maximalen Unsicherheiten werden auf die Koordinaten fortgepflanzt. Die somit erhaltenen Ergebnisse werden in den Rahmen der klassischen Netzqualitätsmasse integriert.

La prise en compte des effets atmosphériques, topographiques ou instrumentelles nécessite de corriger les observations brutes. A cet effet, des mesures auxiliaires comme la température ou la pression sont nécessaires. L'article décrit l'incertitude de ces mesures par mathématiques d'intervalles. Ces incertitudes maximales se propagent sur les coordonnées. Les résultats ainsi obtenus sont intégrés dans le cadre des mesures classiques de la qualité du réseau.

Nelle fasi preliminari del preprocessing, prima della compensazione geodetica di rete, le osservazioni misurate devono essere corrette in seguito a effetti atmosferici, topografici o strumentali. L'incertezza massima delle informazioni supplementari necessarie per le correzioni è descritta ricorrendo alla matematica degli intervalli, e fornisce gli intervalli per le misure corrette. Queste incertezze massime sono inserite sulle coordinate. I risultati così ottenuti sono integrati nelle misure classiche della qualità della rete.

S. Schön, H. Kutterer

1. Motivation

Eine wesentliche Aufgabe der Geodäsie ist die Beschreibung und Darstellung der Erdoberfläche. Der dabei modellhaft bestehende nichtlineare funktionale Zusammenhang zwischen den Messungen und den Koordinaten der topographischen Punkte (Modellparameter) wird durch Linearisierung in ein *lineares geodätisches Modell* überführt. Aufgrund atmosphärischer, topographischer oder instrumenteller Effekte ist dieses geodätische Modell inkonsistent mit dem *Beobachtungsmodell*, das die Physik der Messung an sich beschreibt. Um ein einfaches und somit mathematisch gut handhabbares geodätisches Modell zu erhalten, müssen Korrekturen an den Messungen angebracht werden, wofür verschiedene Modelle zur Verfügung stehen.

Zur Anwendung der Korrekturenmodelle sind zusätzliche Messungen oder Informationen in bezug auf beispielsweise Temperatur und Druck nötig. Die Korrekturen vermindern zwar die Inkonsistenz zwischen Modell und Messwerten; sie können diese jedoch nicht eliminieren, da sie selbst unsicher sind. Wir wollen im folgenden untersuchen, wie diese zusätzlichen Unsicherheitseinflüsse behandelt werden können.

Die konzeptuell einfachste Methode besteht im *Vernachlässigen* dieser durch die Anwendung der Korrekturenmodelle bedingten zusätzlichen Unsicherheitseinflüsse: Der Gesamtfehlerhaushalt wird unverändert durch das stochastische Modell des Ausgleichsprozesses beschrieben. Allerdings sollten diese Vernachlässigungen bei der Interpretation der Ergebnisse in Rechnung gestellt werden.

Die klassische, von der ISO (1995) emp-

fohlene Vorgehensweise sieht eine *stochastische Modellierung* aller durch die Korrekturenmodelle bedingten Fehlereinflüsse vor. Hierzu können die Modelle als Funktion der zu untersuchenden Einflussgrößen, beispielsweise der zusätzlichen Messungen oder Modellkonstanten aufgefasst werden. Diese werden dann als Realisierung einer Zufallsvariablen und ihre Unsicherheit als Standardabweichung aufgefasst, wobei üblicherweise eine Normalverteilung zugrunde gelegt wird. Schliesslich kann mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz eine vollbesetzte Kovarianzmatrix für die reduzierten Beobachtungen abgeleitet werden.

Die Hauptkritik an dieser Vorgehensweise zielt auf die angenommene Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen. Diese Annahmen können selten statistisch getestet werden, da nur eine oder wenige Ablesungen für die zusätzlichen Messungen vorliegen. Es kann im allgemeinen nicht davon ausgegangen werden, dass das statistische Verhalten hinreichend bekannt sei. Darüber hinaus ist oft in technischen Anwendungen die Menge aller möglichen Ablesewerte beschränkt durch kleine Sensorimperfektionen. Zusammengenommen scheint es somit angebracht, nichtstochastische Methoden zu verwenden, um unvollständiges Wissen über statistisches Verhalten zu beschreiben.

Ist man zusätzlich an den maximalen Unsicherheitseinflüssen der Korrekturenmodelle auf die korrigierten Messungen interessiert, so ist die *intervallmathematische Vorgehensweise* adäquat. Worst-Case-Sensorverhalten kann modelliert werden; Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zusätzlichen Messungen und Informationen sind nicht nötig.

$$[I] = [I_m - I_r, I_m + I_r] \quad (1)$$

Bei der intervallmathematischen Vorgehensweise bilden die korrigierte Beobachtung $I_m = I$ (Intervallmitte) und die Unsicherheitseinflüsse aus den Korrekturmodellen I_r (Intervallradius) in der folgenden Weise ein Intervall $[I]$ (siehe Abb.1).

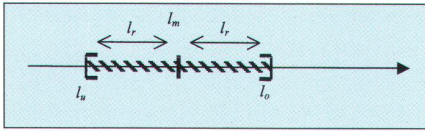


Abb. 1: Intervalldarstellung.

Für die Grundlagen der Intervallmathematik sei auf Alefeld und Herberger (1983) verwiesen. In der Geodäsie sind diese Konzepte z.B. von Kutterer (1994, 1995) vorgestellt worden. Hier soll die Ableitung von Intervallradien als nicht-stochastische Unsicherheitsmasse direkt am Beispiel der Streckenmessung erfolgen.

2. Intervallmathematische Beschreibung am Beispiel «Streckenmessung»

Abbildung 2 zeigt die Situation für eine Streckenmessung zwischen zwei Punkten P_i und Q_i mit elektronischer Distanzmessung (EDM). Das *geodätische Modell* beschreibt die euklidische Distanz zwischen P_0 und Q_0 . Wegen atmosphärischer Effekte und Einflüssen der Instrumentenhöhe und Zielhöhe sind Korrekturen am gekrümmten Strahlverlauf P_iQ_i anzubringen, um die euklidische Distanz zu erhalten. Das Korrekturenmodell stellt also eine Verbindung zwischen dem Anzeigewert am Messinstrument und dem Wert her, der als Beobachtung in das geodätische Modell eingeführt wird.

Sei D_i der Anzeigewert einer Entfernung, die durch das Phasenvergleichsverfahren gewonnen wurde, siehe Rüeger (1996). Dieser Wert enthält bereits *geräteinterne Korrekturen*; – nicht alle Hersteller ver-

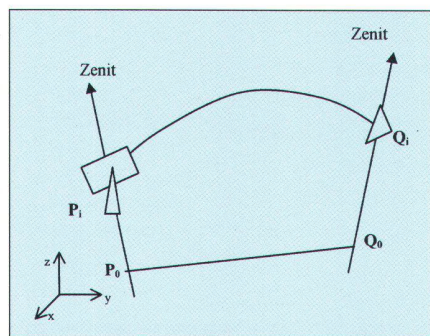


Abb. 2: Geometrischer Zusammenhang bei der EDM.

öffentlichen die dazu verwendeten Modelle. Der Rohstreckenanteil wird mit Hilfe der geräteinternen Referenzwerte n_0 für den Brechungsindex, f_0 für die Modulationsfrequenz, c_0 für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum berechnet. Die Mehrdeutigkeit wird mit N und das Phasenreststück mit $\Delta\varphi$ bezeichnet.

$$D_I = \frac{c_0}{2n_0f_0} \left(N + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) + d \left(\sqrt{n_p^2 - \sin^2 \beta} - n_p \right) + e(1 - \cos \beta) + a \quad (2)$$

Der zweite Formelanteil berücksichtigt Fehlausrichtungen des Prismas bezüglich der direkten Verbindungslinie zwischen den beiden Messbezugspunkten. Hierbei bezeichnet d den Abstand der Prismenspitze von der Prismengrundfläche, e den Abstand der horizontalen und vertikalen Prismenachse von der Prismengrundfläche, n_p den Brechungsindex des Prismenmaterials und β den Einfallswinkel, siehe Rüeger (1996). Die Additionskonstante ist mit a bezeichnet.

In einem nächsten Schritt muss der Anzeigewert D_i wegen *atmosphärischer Effekte* korrigiert werden. Als ein Beispiel wird hier nur die erste Geschwindigkeitskorrektur besprochen, die die geräteinternen meteorologischen Bezugswerte durch repräsentative gemessene Werte ersetzt.

$$D_A = \frac{n_0}{n} D_i \quad (3)$$

Der Brechungsindex der Luft n wird nach den neuen IAG Resolutionen abgeleitet, siehe Rüeger (1999).

Schliesslich sind *topographische Korrekturen* nötig, um den Übergang von P_i nach P_0 und Q_i nach Q_0 zu gewährleisten. Einige der auftretenden Effekte sind bedingt durch: Lotabweichungen, Wahl des Referenzsystems oder Exzentrizitäten des Instruments bezogen auf den Bodenpunkt. Es zeigt sich, dass eine korrekte Beschreibung der Effekte nur durch eine Kombination der Polarelemente (Distanz, Richtung und Zenitwinkel) in topozentrischen 3d Koordinatensystemen möglich ist. Diese Korrekturen sollen hier jedoch nicht weiter vertieft werden.

Im folgenden wird der Unsicherheitseinfluss einzelner Grössen p , die in den angegebenen Korrekturmodellen vorkommen, auf die reduzierte Beobachtung D_A abgeleitet. Prinzipiell stehen zwei Methoden zur Verfügung. Bei der *Sensitivitätsbetrachtung* wird durch das totale Differential der Gleichungen (2) und (3) ein linearer Zusammenhang zwischen der Korrektur und den einzelnen Einflussgrössen p hergestellt. Die Differentiale dp werden als ihre maximale Unsicherheit aufgefasst. F beschreibt die entsprechenden partiellen Ableitungen des Korrekturmodells.

$$D_m = D_A, D_r = |F| dp \quad (4a, b)$$

Da der maximale Einfluss abgeleitet werden soll, dürfen sich keine Einflüsse auslöschen; somit ist der Absolutbetrag $|F|$ der Matrixelemente in F ist zu bilden. Dieses approximative Vorgehen ist besonders dann geeignet, wenn man sich für die Beiträge der einzelnen Einflussgrössen zum Gesamteffekt interessiert.

Das strenge Vorgehen besteht in einer *Intervallauswertung* der Korrektursterme, das an anderer Stelle dargestellt wird.

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Beiträge der verschiedenen Effekte zur maximalen Unsicherheit, die mit dem Sensitivitätsmodell (4b) abgeleitet wurden. In der ersten Spalte sind die Einflussgrössen aufgelistet, deren Unsicherheit in betracht gezogen wird. Die zweite Spalte gibt deren konkrete Werte an, die aus wissenschaftlichen Untersuchungen, z.B. Rüeger (1996) oder aus den technischen Daten der Gerätehersteller entnommen werden. Die letzte Spalte zeigt die Beiträge verschiedener Effekte zur Gesamtunsicherheit, die durch den Intervallradius ausgedrückt wird. Der Gesamteffekt für eine Strecke von 100 m Länge beläuft sich auf 1.1 mm, was sich aus der Summe der Zeilen 1, 10 und 14 ergibt.

3. Intervallauswertung des Kleinste-Quadrate-Schätzers

Kutterer (1994, 1995) stellt das Konzept der Intervallauswertung des Kleinste-

Einflussgrösse	Unsicherheit	Beitrag zu D_r [mm]
Instrumenten spezifisch: total		1.005
Interner Brechungsindex n_0		≈ 0
– Temperatur	$\pm 0.1^\circ\text{C}$	
– Druck	$\pm 0.05 \text{ hPa}$	
– Relative Feuchte	$\pm 1\%$	
– Modellkonstanten	± 0.5 letzte Stelle	
Frequenz	$\pm 5 \text{ Hz}$	0.005
Additionskonstante	$\pm 0.5 \text{ mm}$	0.5
Rundungsfehler	± 0.5 letzte Stelle	0.5
Reflektor spezifisch		0.004
– Brechungsindex Glas BK7 n_p	$\pm 5 \text{ ppm}$	
– Geometrische Konstanten d, e	$\pm 0.5 \text{ mm}$	
– Einfallswinkel β	$\pm 0.7 \text{ gon}$	
Brechungsindex n		0.13
– Temperatur	$\pm 0.1^\circ\text{C}$	
– Druck	$\pm 1 \text{ hPa}$	
– relative Feuchte	$\pm 1\%$	
– Modellkonstanten	± 0.5 letzte Stelle	

Tab. 1: Überblick über die Beiträge verschiedener Effekte zur Gesamtunsicherheit.

Quadrate-Schätzers bei der Pseudo-Inversen Lösung vor:

$$[\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{x}}] = ((\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}) ([\mathbf{l}] - \mathbf{a}_0) \quad (5)$$

Dabei stellen \mathbf{A} die Designmatrix, \mathbf{P} die Gewichtsmatrix, \mathbf{a}_0 den Term nullter Ordnung der Taylorentwicklung und $[\mathbf{l}]$ den Intervallvektor der reduzierten Messungen dar.

Gleichung (5) kann äquivalent durch Mittelpunkt und Radius dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{x}}_m &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{l}_m - \mathbf{a}_0) \\ \hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{x}}_r &= |(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}| \mathbf{l}_r \end{aligned} \quad (6a, b)$$

Gleichung (6a) entspricht dem klassischen Schätzwert unter Berücksichtigung der statistischen Annahmen für die ursprünglichen Beobachtungen, die in der Gewichtsmatrix ausgedrückt sind. Die maximale Unsicherheit, die im Intervallansatz modelliert wird, wird nach (6b) auf die Schätzwerte fortgepflanzt.

Ein Qualitätsmass für geodätische Netze sind Punkt-Konfidenzellipsen. Zur Ableitung eines entsprechenden Masses im Intervallansatz kann man wie folgt vorgehen: Der Durchmesser der durch (6b) angegebenen Intervalle stellt die Unsi-

cherheit für jede Koordinate im gewählten Koordinatensystem dar. Punktweise können somit Rechtecke gebildet werden, deren Seiten achsparallel zum Koordinatensystem sind und die im Intervallmittelpunkt, d.h. dem Schätzwert, gelagert sind. Der Flächeninhalt der Rechtecke kann als *Qualitätsmass im Intervall-Sinne* aufgefasst werden. Im Gegensatz zur Punktfehlerellipse, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 39.4% den unbekannten Erwartungswert enthält, liegen innerhalb der Intervallbox alle aufgrund der Beobachtungsintervalle möglichen Werte.

Abbildung 3 zeigt die klassischen Punktfehlerellipsen für ein 2d Streckennetz. Die Standardabweichung einer Strecke ist gegeben zu $\sigma = 2 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$.

Abbildung 4 zeigt die Intervalleinschliessung nach Gleichung (5); die Beobachtungsunsicherheiten sind Tabelle 1 zu entnehmen.

4. Zusammenfassung

Die intervallmathematische Beschreibung von Unsicherheiten in geodätischen Messungen ist besonders dann geeignet, wenn objektive und zuverlässige Informationen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht vorliegen. Die stochastische Vorgehensweise führt zu vermittelnden Ergebnissen, während intervallbasierte Unsicherheitsmasse maximale Effekte beschreiben und somit zur Untersuchung von Worst-Case-Szenarien verwendet werden können. Intervallboxen wurden

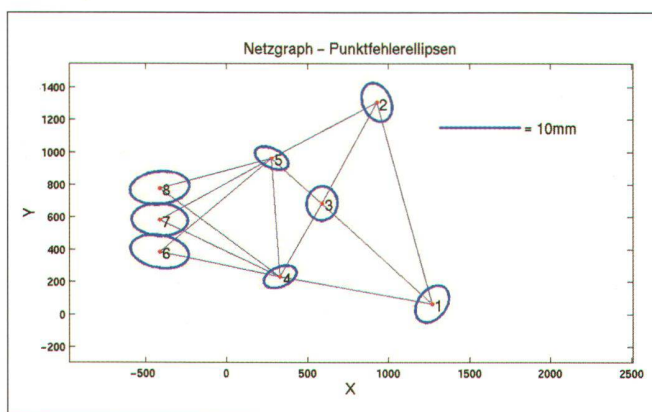


Abb. 3: Punktfehlerellipsen.

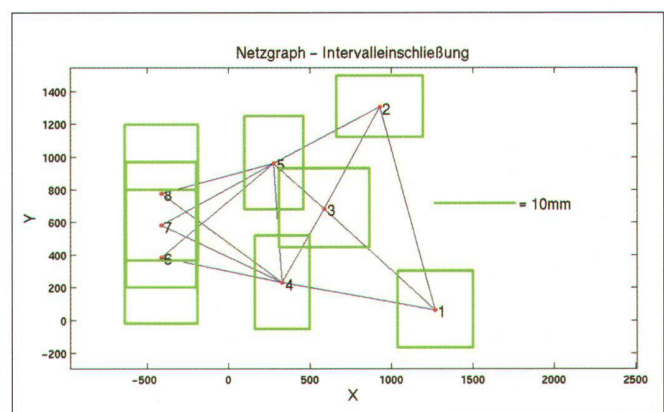


Abb. 4: Intervalleinschliessung.

als weiteres Qualitätsmass für geodätische Netze angegeben.

Dank

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung des Projektes KU 1250/1-1: «Optimaler Entwurf geodätischer Überwachungsnetze unter Berücksichtigung strenger Toleranzen».

Literatur:

Alefeld G. and J. Herzberger (1983): Introduction to Interval Computations. Academic Press, New York.

ISO (1995): Guide to the Expression of Uncer-

tainty in Measurements. German translation: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. Deutsches Institut für Normung, Beuth Verlag, Berlin Wien Zürich.

Kutterer H. (1994): Intervallmathematische Behandlung endlicher Unschärfen linearer Ausgleichungsmodelle, DGK C 423, München.

Kutterer H. (1995): The effect of fuzzy weight matrices on the results of least squares adjustments, In: F. Sansò Geodetic Theory today. IAG Symposium No 104, Springer, Berlin Heidelberg New York, pp. 224–234.

Rüeger J.-M. (1996): Electronic Distance Measurement – An Introduction (4th Ed). Springer Berlin Heidelberg New York.

Rüeger J.-M. (1999): Report of the «Ad-Hoc Working Party on Refractive Indices of Light,

Infrared and Radio Waves in the Atmosphere» of the IAG SC3. IUGG Birmingham, UK.

Steffen Schön
Geodätisches Institut
Universität Karlsruhe (TH)
Englerstrasse 7
D-76128 Karlsruhe
schoen@gik.uni-karlsruhe.de

H. Kutterer
Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
Marstallplatz 8
D-80539 München
kutterer@dgfi.badw.de

Internet Mapping Framework

BauKo – Das Baustellen-Koordinationsmodul

BauKo – die Internet-Applikation für effektives Koordinieren von Baumaßnahmen im öffentlichen Strassenraum. Schnelle und hocheffektive Eingabeanwendung, sofort bedienbar, ohne GIS-Kenntnisse. Durchdachte Koordinationsanwendung, die den unterschiedlichen Projektanforderungen gerecht wird.

BauKo – effektives Arbeiten

- Kostenminimierung in den Bereichen Planung, Koordination und Ausführung
- Zentrale Koordination übers Internet anstelle vieler Koordinationssitzungen
- Verringerung der Belästigungen für die Anwohner und die Geschäftswelt
- Erhöhung der Lebens- und Wohnqualität

IMF

BauKo – durchdachte Prozesse

- Anlegen, verändern und löschen von Bauprojekten
- Wizard-gesteuerte Suche nach Bauprojekten
- Koordination von Bauprojekten nach geografischen Kriterien
- Informationsdarstellung zu allen Projekten
- Automatisches Erstellen von Projektblättern im Word-Format

BauKo – erfolgreiche Kooperation


BauKo steht für eine neue Art der Kooperation und Koordination. Überzeugen Sie sich selbst. Unter www.geotask.ch finden Sie die Informationen. Und rufen Sie uns an. +41/61/337 84 84. Wir beraten Sie gerne.

GeoTask

Geographic Database and Internet Solutions



Besuchen Sie uns
auf der CeBIT
Hannover 22.-28.3.2001
Halle 4 Stand B52

the  business company

GeoTask AG Güterstrasse 253 CH-4053 Basel +41/61/337 84 84 info@geotask.ch www.geotask.ch