

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 99 (2001)

Heft: 3

Artikel: Zur Behandlung von Ungewissheit bei der Analyse geodätischer Daten

Autor: Kutterer, Hansjörg

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-235740>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Behandlung von Ungewissheit bei der Analyse geodätischer Daten

In der Geodäsie werden Modelle zur Approximation der Realität verwendet. Der unbekannte Unterschied zwischen der Realität und dem Modell reflektiert sich in einer Ungewissheit. Für die Analyse ungewisser Daten gibt es verschiedene mathematische Theorien. Neben der Stochastik sind z.B. die Bayes-Statistik und die Fuzzy-Theorie zu nennen. Im Folgenden wird die Notwendigkeit einer umfassenden Ungewissheitstheorie für die Analyse geodätischer Daten motiviert. Verschiedene Arten von Ungewissheit und verfügbare mathematische Theorien werden zusammengestellt. Die Relevanz der Darlegungen für geodätische Analysen wird aufgezeigt.

En géodésie on utilise des modèles pour l'approximation de la réalité. La différence inconnue entre la réalité et le modèle reflète une incertitude. Pour l'analyse de données incertaines, il existe diverses théories mathématiques. Outre la stochastique, il y a lieu de mentionner par exemple la statistique selon Bayes et la théorie Fuzzy. Ci-après, l'argumentation de la nécessité d'une théorie d'incertitude globale pour l'analyse de données géodésiques est présentée ainsi que l'inventaire de différents genres d'incertitudes et de théories mathématiques disponibles. Leur bien-fondé est démontré pour les analyses géodésiques.

In geodesia si utilizzano dei modelli per l'approssimazione della realtà. L'ignota differenza tra la realtà e il modello si rispecchia nell'incertezza. Per l'analisi dei dati incerti sussistono varie teorie matematiche. Per esempio, oltre alla stocastica ci sono la statistica bayesiana e la teoria fuzzy. Nell'articolo seguente si spiega la necessità di avere una teoria sull'incertezza per l'analisi dei dati geodetici, si confrontano i vari tipi d'incertezza e le teorie matematiche disponibili, e si illustra l'importanza rivestita dalle rappresentazioni per le analisi geodetiche.

H. Kutterer

1. Einführung

Geodätische Probleme sind in der realen Welt angesiedelt. Um sie theoretisch behandeln zu können, müssen sie modelliert werden. Ein Modell beschreibt oder erklärt eine bestimmte Situation zur Vorhersage nicht-beobachtbarer Zustände. Man unterscheidet dabei das *Messmodell* und das (theoretische) *geodätische Modell*, die durch die *geodätischen Observablen* verknüpft sind. Die Größen, die im geodätischen Modell erwartet werden, können in der Regel nicht direkt beobachtet werden. Das Messmodell liefert Korrekturen, um die ursprünglichen Messwerte in das geodätische Modell einführen zu können; dies ist in Abbildung 1

veranschaulicht. Zwischen der realen Welt und dem Modell klafft aber eine Lücke: Der Verlust von Information durch die Modellbildung führt immer zu Ungewissheit.

Der übliche geodätische Ansatz zur Ungewissheit basiert auf dem Fehlerbegriff mit den drei Ausprägungen *grob*, *systematisch* und *zufällig*. Grobe Fehler sind Datenfehler; sie sind aufzudecken und aus dem Datenmaterial zu entfernen. Systematische Fehler sind Modellfehler; sie sind durch geeignete Messanordnungen zu beseitigen. Die übrigbleibenden, zufälligen Fehler sind unvermeidbar; sie können mit statistischen Methoden behandelt werden.

Oft genügt es, Daten und Modell durch freie Parameter ohne Konkretisierung der Ungewissheit optimal anzunähern. Soll jedoch die wissenschaftliche Bedeutung des Ergebnisses beurteilt werden, ist ein Ungewissheitskonzept nötig. In der Geodäsie bietet dies traditionell die Stochastik unter der Annahme von rein zufällig variierenden Daten. Aus methodischer Sicht ist dies bequem, die Stochastik ist weit entwickelt, von Seiten der Daten aus jedoch problematisch, wie nachfolgend dargelegt wird. Abbildung 2 zeigt die traditionelle Abfolge von Modellierung und Datenanalyse in der Geodäsie unter Verwendung linearer oder linearisierter Modelle.

2. Arten von Ungewissheit

Die *zufällige Variabilität* der Daten ist verknüpft mit der beliebigen Wiederholbarkeit von Zufallsexperimenten. Messwerte werden als Realisierungen von Zufallsva-

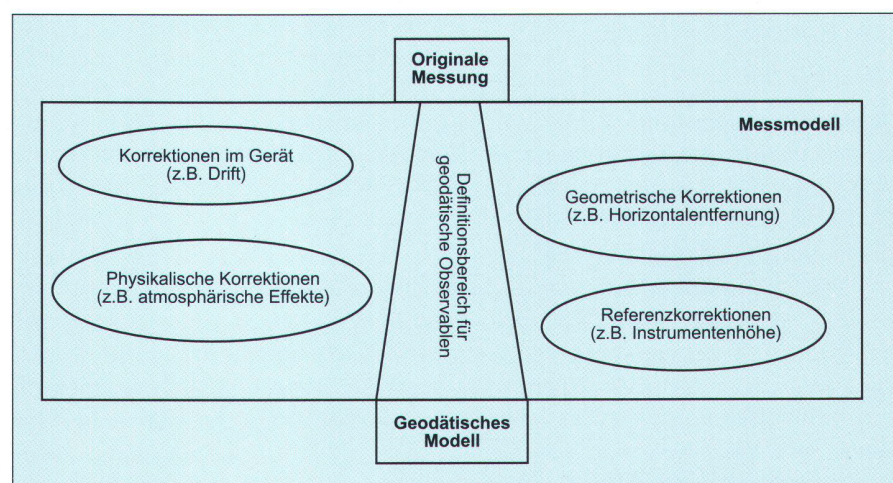


Abb. 1: Zusammenhang zwischen Messmodell und geodätischem Modell.

riablen mit zugeordneten Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet. In der Geodäsie nimmt man gemeinhin an, dass die ursprünglichen Beobachtungen normalverteilt sind. Ist die Normalverteilung nicht gesichert, kann man bei grossem Stichprobenumfang auf der Basis von Grenzwertsätzen die asymptotische Normalverteilung des Stichprobenmittels nutzen.

Die Ungewissheit, die aus dem unzureichenden Wissen um (Rest-)Systematiken entsteht, wird als *Impräzision* bezeichnet. Zufällige Variabilität und Impräzision sind die wichtigsten Arten von Ungewissheit in der Geodäsie. Sie sind in der Praxis schwierig zu unterscheiden, obwohl zwischen ihnen ein qualitativer Unterschied besteht: Zufällige Variabilität spiegelt die Wiederholbarkeit von Beobachtungen wider, Impräzision hingegen die Ungewissheit in Verbindung mit einem Modell.

Unschärfe und *Vagheit* sind Arten von Ungewissheit, die eng mit Impräzision verwandt sind, aber aus linguistischen Unzulänglichkeiten resultieren. Als Beispiel sei der Begriff «bewölkter Himmel» genannt; offensichtlich gibt es dafür keine präzise und eindeutige mathematische Formulierung. Weitere Arten sind *Datenlücken*, *Widersprüche*, *mangelnde Zuverlässigkeit* oder *Unvollständigkeit*. Im folgenden Abschnitt wird eine Auswahl an mathematischen Theorien zum Umgang mit Ungewissheit vorgestellt.

3. Mathematik zur Behandlung von Ungewissheit

Die *Approximationstheorie* ist die grundlegende mathematische Theorie zur Verknüpfung von Daten und Modell. Das Modell ist in rein funktionaler Form gegeben. Der Unterschied zwischen Daten und Modell wird durch kleine unklassifizierte Abweichungen erklärt. Das Approximationsprinzip besteht in der Minimierung einer geeigneten Zielfunktion, z.B. einem Abstandsmass zwischen Daten und Modell. Üblicherweise kommt hierfür die Methode der kleinsten Quadrate zum Einsatz. Eine andere Wahl der Ziel-

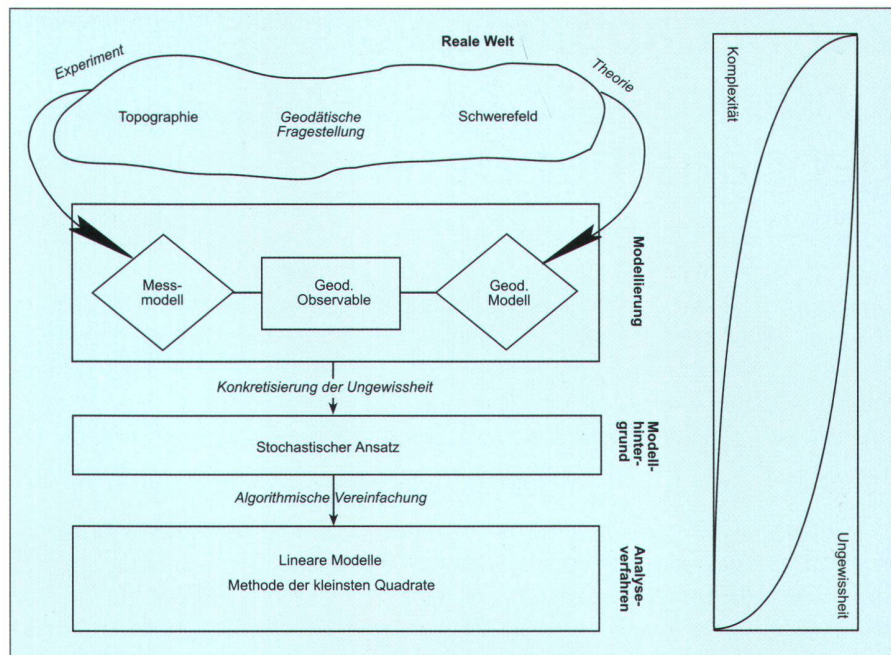


Abb. 2: Abfolge der Modellierung und Datenanalyse in der Geodäsie.

funktion führt zur *robusten Statistik*. Diese Theorie ermöglicht, die Auswirkung von Ausreissern auf die Parameterschätzung zu minimieren. Die Theorie der *Stochastik* gestattet zudem, die betrachtete Art von Ungewissheit zu qualifizieren. Die Beobachtungen werden als Zufallsvariable angesetzt. Der Erwartungswert der Beobachtungen wird mit dem funktionalen Modell identifiziert, ihre Dispersionsmatrix quantifiziert die Ungewissheit (Koch, 1999). Dies erlaubt die Fortpflanzung von zufälliger Variabilität auf abgeleitete Grössen. Ausserdem können statistische Tests durchgeführt werden, z.B. zur Aufdeckung von Datenfehlern.

Die Bayes-Theorie bietet ein allgemeines Verfahren zur Einführung (stochastischer) Vorinformation in die Datenanalyse (Koch, 2000). Die klassische Stochastik kann als Sonderfall der Bayes-Theorie aufgefasst werden. Kritik an der Bayes-Theorie setzt an der (subjektiven) Wahrscheinlichkeitsmodellierung von Aussagen an, da vorausgesetzt wird, dass Vorinformation eine Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt. Es bestehen praktische Probleme in Verbindung mit der Aufstellung von Wahrscheinlichkeitsdichten für die Vorinformation – hierfür sind in der Regel umfangreiche Erhebungen erforderlich. Die

Evidenztheorie oder *Dempster-Shafer-Theorie* (Shafer, 1976) kann als Verallgemeinerung der Bayes-Theorie aufgefasst werden. Sie beruht auf der Verwendung eines Glaubwürdigkeitsmasses, das die positiven (konstruktiven) Beweise bewertet und eines Plausibilitätsmasses, das die Gegenbeweise bewertet.

Die bislang präsentierten mathematischen Theorien sind für einen Ungewissheitsbegriff geeignet, der mehr oder weniger dem der Stochastik entspricht. Liegen jedoch impräzise Daten vor, sind andere mathematische Ansätze vorzuziehen. Dann können die Intervallmathematik (Alefeld und Herzberger, 1974), die hier nicht beschrieben wird, oder die Fuzzy-Theorie angewendet werden. Diese gehen nicht von der Wahrscheinlichkeit, sondern von der Möglichkeit des Auftretens von Beobachtungswerten aus – eine Wahrscheinlichkeitsverteilung muss nicht vorliegen.

Das grundlegende Konstrukt der *Fuzzy-Theorie* ist die unscharfe Menge (fuzzy set) als Verallgemeinerung einer klassischen Menge. Die Zugehörigkeit eines Elementes einer Grundmenge X zu einer unscharfen Menge auf X kann stetige Werte annehmen zwischen den Werten 0 (*ist kein Element*) und 1 (*ist Element*).

Eine allgemeine Einführung in die Fuzzy-Theorie geben Dubois und Prade (1980). Die Lehre unscharfer Mengen führt zum einen zur unscharfen Logik und zu unscharfen Regelungen, zum anderen zur Analyse unscharfer Daten. Letztere erfordert unscharfe Zahlen sowie Vektoren von unscharfen Zahlen. Setzt man für praktische Zwecke Unschärfe und Impräzision gleich, steht die Fuzzy-Theorie zur Behandlung impräziser Daten zur Verfügung. Umfassende Darstellungen zur Analyse unscharfer oder impräziser Daten geben Bandemer und Näther (1992) sowie Viertl (1996).

4. Relevanz für geodätische Probleme

Daten und Modelle spielen eine wesentliche Rolle in der Geodäsie. Alle in der Problemstellung enthaltene Ungewissheit wird traditionell den Daten zugesprochen; zufällige Fehler und verbleibende systematische Fehler werden nicht unterschieden. Dies ergibt für die Praxis einige Probleme. Als typische geodätische Beobachtungen sollen elektronische Entfernungsmessungen betrachtet werden, die nur zufällig verfälscht seien. Für geodätische Modelle wird oft die euklidische Schrägentfernung zwischen den beiden Modellbezugspunkten (nicht notwendigerweise den Messbezugspunkten) benötigt. Da die Messungen in einer realen Umgebung erfolgen, ist der gemessene Wert einer Reihe von Umgebungseinflüssen unterworfen. An den ursprünglichen Messwerten sind somit Korrekturen anzubringen, die deterministisch sind und den Stand des Wissens widerspiegeln. In einem strengen Sinne jedoch treffen sie

nicht zu. Die ihnen immanente Ungewissheit ist keine zufällige Variabilität. Vielmehr sind Korrekturenmodelle Quellen von Impräzision.

Geodätische Beobachtungen stammen mehr oder weniger aus Experimenten mit sehr geringem Stichprobenumfang, oftmals ohne die Gewähr eines stabilen Beobachtungsrahmens. Somit ist weder die Zufälligkeit der Beobachtungen unmittelbar nutzbar noch treffen die Voraussetzungen für die Anwendung von Grenzwertsätzen zu. Daneben ist zu bemerken, dass geodätische Anwendungen, die sich auf die Erde als Ganzes beziehen, wie z.B. Schwerefeldmodelle oder plattenkinematische Modelle auf der Basis satellitengeodätischer Verfahren, stark von den verfügbaren Daten abhängen. Datenlücken sind möglich aufgrund von logistischen, politischen oder kommerziellen Restriktionen. Werden Daten von externen Quellen übernommen, können sich Ungewissheiten ergeben aufgrund fehlender oder unvollständiger Referenzen oder nicht offengelegter Vorverarbeitung.

5. Wertung

Die Verwendung der Methoden der jeweiligen mathematischen Theorie legt die Art von Ungewissheit fest, die behandelt wird. Somit wirken die vorgestellten mathematischen Theorien alle normativ in Bezug auf Ungewissheit. Dies macht deutlich, dass zur mathematischen Behandlung von Ungewissheit neben der funktionalen Modellierung eines geodätischen Problems auch die auftretende Ungewissheit modelliert werden muss. Eine solche Modellierung ist ebenfalls mit Ungewissheit verbunden. Da dies auch

für die stochastisch begründeten Methoden gilt, ist es keine wesentliche Einschränkung. Vielmehr bereitet die erweiterte Grundlage beim Umgang mit Ungewissheit eine Perspektive für neue methodische Entwicklungen in einer gleichermaßen modell- und datenorientierten geodätischen Forschung. Verschiedene der voranstehend beschriebenen Theorien verfügen bereits über einen hinreichend entwickelten Methodenschatz. Andere Methoden stecken in den Anfängen; sie müssen noch entwickelt werden, um praktisch eingesetzt werden zu können.

Literatur:

Alefeld G.; Herzberger J. (1974): Einführung in die Intervallrechnung. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim Zürich Wien.

Bandemer H.; Näther W. (1992): Fuzzy Data Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dubois D.; Prade H. (1980): Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, New York.

Koch K. R. (1999): Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models (2nd Ed.). Springer, Berlin Heidelberg.

Koch K. R. (2000): Einführung in die Bayes-Statistik. Springer, Berlin Heidelberg.

Shafer G. (1976): A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, Princeton.

Viertl R. (1996): Statistical Methods for Non-Precise Data. CRC Press, Boca Raton New York London Tokyo.

Dr.-Ing. Hansjörg Kutterer
Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut
Marstallplatz 8
D-80539 München
kutterer@dgfi.badw.de

Wandeln Sie Ihr INTERLIS-Datenmodell in ein UML-Diagramm. Oder umgekehrt. Software herunterladen, testen.

Ihr Datenmodell als Diagramm!



EISENHUT INFORMATIK

Rosenweg 14 • CH-3303 Jegenstorf • Tel 031 762 06 62 • Fax 031 762 06 64 • <http://www.eisenhutinformatik.ch>