Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 98 (2000)

Heft: 7

Artikel: GPS-Geometrie nach antikem Vorbild (3)

Autor: Deile, M.-L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-235664

GPS-Geometrie nach antikem Vorbild (3)

Das 21. Jahrhundert hat dem Meter eine geistige Neugeburt zugesichert. Dieser dritte Teil der Artikelreihe schildert wie der Meter dank seiner, in Teil I + und II vorgestellten, aktiven Komponenten als Brücke zur Einverleibung der Keplerschen und Newtonschen Erkenntnisse in die Satelliten-Pseudo-Distenz-Ortungs-Geodäsie dienen kann.

Le 21ème siècle promet au mètre un véritable renouveau. Dans cette troisième partie de la série d'articles, il est décrit comment le mètre, grâce à ses propriétés actives présentées dans les parties I et II, peut servir de pont pour l'assimilation des théories de Kepler et Newton dans la géodésie satellitaire de la mesure des pseudo distances.

Il 21° secolo ha generato una rinascita «spirituale» del metro. Questa terza parte della serie di articoli spiega come il metro, grazie ai suoi componenti attivi, presentati nella parte I e II, funga da collegamento per l'incorporazione delle conoscenze kepleriane e newtoniane nella geodesia di determinazione della pseudodistanza dei satelliti.

M.-L. Deile

Kepler und Newton als GPS-Pseudo-Distanz-Berichtiger

Bestätigung für die, in den Teilen I und II behandelten, Grundlagen einer modernen Raum-Zeit-Geodäsie.

Die den Erdball umhüllende Orbit-Satelliten-Struktur des Global Positioning Systems GPS ist, astronomisch gesehen, ein Mini-Planeten-System.

Die Wissenschaftler Johannes Kepler (1571–1630) und Isaac Newton (1642–1727) hatten zu ihrer Lebenszeit noch nicht über den Meter verfügt. Ihre Lehren konnten von der Nachwelt nur schwerlich verstanden werden, denn es fehlte an einer universellen Masseinheit.

Der Mathematiker Johannes Kepler war der erste, der sich Gedanken gemacht hatte über das Verhältnis von Strecke und Planeten-Umlaufzeit. Er war seiner Zeit um zirka 200 Jahre voraus gewesen. Denn erst das Ende des achtzehnten Jahrhunderts entsprach dem nicht mehr aufzuhaltenden Bedürfnis nach einer Streckeneinheit, die einem rechten Erd-Meri-

Dritte Folge der Artikelreihe «GPS-Geometrie nach antikem Vorbild – die Meter-Einheit in ihrer vierten Dimension praktisch dargelegt», VPK 10/98, 6/99.

Keplersche Gesetze

1. die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht:
2. der von der Sonne nach dem Planeten weisende Strahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen;
3. die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich zueinander wie die 3. Potenzen der grossen Achsen der Bahnellipsen.

Newtonsche Axiome

(nur das 3. stammt von ihm selbst)

1. Jeder Körper, auf den keine Kräfte wirken, verharrt im Zustand der Ruhe oder bewegt sich gleichförmig.
2. Einwirkende Kräfte erteilen dem Körper eine Beschleunigung, die der bewegenden Kraft proportional ist und in der Richtung erfolgt, in der die Kraft wirkt: mathematisch ausgedrückt: Kraft = Masse x Beschleunigung.
3. Die Wirkung zweier Körper aufeinander ist gleich, aber von entgegengesetzter Richtung.

Der Keplersche Weg zur Bestimmung von $e_{error_{a)}}$ aus $e_{error_{b)}}$:

Formel:

$$e_{error_{a)}} = \frac{\Delta\, e_{error_{a)/b)}}}{1 - \sqrt{\dfrac{r_{a)}^3 \cdot \text{rad. } \%_{a)}}{r_{b)}^3}}} - \Delta\, e_{error_{a)/b)}} \text{ m in Natur}$$

In Zahlen:

$$e_{error_{a)}} = \frac{20}{1 - \sqrt{\dfrac{1{,}353707^3 \cdot 0{,}8284093}{1{,}79499^3}}} - 20 \text{ m in Natur}$$

$$e_{error_{a)}} = \frac{20}{1 - \sqrt{0{,}359282^{*)}}} - 20 \text{ m in Natur}$$

$$e_{error_{a)}} = 49,925349 - 20 \text{ m in Natur}$$

$$e_{error_{a)}} = \frac{20}{1 - 0{,}5994019} - 20 \text{ m in Natur}$$

$$e_{error_{a)}} = \underline{29,925349 \text{ m in Natur}}$$

$$e_{error_{b)}} = 29,925349 \text{ m in Natur}$$

*) Der Wurzelwert 0,359282 bildet das Äquivalent zur Newtonschen «Kraft = N» (Kraft = Masse x Beschleunigung)

dian-Zentrumswinkel von 90° die Bogenlänge einer vollen Dezimaleinheit zuordnete.

Der Meter mit seinen, in Teil II aufgeführten, aktiven Komponenten stellt somit einen Bruchteil der Streckeneinheit Eins des Keplerschen Raumes dar und ist den Keplerschen Gesetzen und den Newtonschen Axiomen anteilmässig mit unterworfen. Mit dem Meter als Recheneinheit hätte Johannes Kepler seine Gesetze vor der Nachwelt beweisen können.

Ihm zu Ehren wird nachfolgend, wenn auch die Genauigkeit nicht ganz befriedigt, unter Wiederverwendung der Daten aus den Teilen I und II die Fehl-Zeit-Distanz $e_{error a)}$ gemäss dem 3. Keplerschen Gesetz ausgezogen. Die beiden Beispiele a) und b) erfüllen die Rollen der zwei Keplerschen Planeten. Die grossen Achsen der Bahnellipsen in der 3. Potenz werden ersetzt durch die Pseudo-Fehl-Dreiecks-Radien $r_{a)}$ und $r_{b)}$. Die Fehl-Zeit-Distanzen $e_{error a)}$ und $e_{error b)}$ treten an die Stelle der Umlaufzeiten der beiden Keplerschen Planeten (siehe Kasten).

Der Physiker Isaac Newton begnügt sich nicht nur mit dem Pseudo-Fehl-Distanz-Dreieck, sondern nimmt gleichzeitig an, dass die mittlere Signal-Übertragungsgeschwindigkeit zwischen Satelliten und Beobachter eine Pseudo-Beschleunigung g erlitten habe.

Die dreidimensionale Logik glaubt sich entscheiden zu müssen: «Entweder Pseudo-Strecke oder Pseudo-Beschleunigung, entweder Kepler oder Newton!» Doch die vierdimensionale Logik braucht beide vereint, Kepler und Newton.

Das 2. Newtonsche Axiom besitzt die mathematische Formulierung:

Kraft = Masse x Beschleunigung
$N = m \cdot g$

Für die hier demonstrierte, Newtonsche Auslegung der e_{error}-Bestimmung werden die Bezeichnungen des Axions folgendermassen angepasst:

Wirkung = Radius x Beschleunigung
$N = r \cdot g$,

wobei r den Radien $r_{a)}$ und $r_{b)}$ entspricht. Der ausstehende Beschleunigungsfaktor

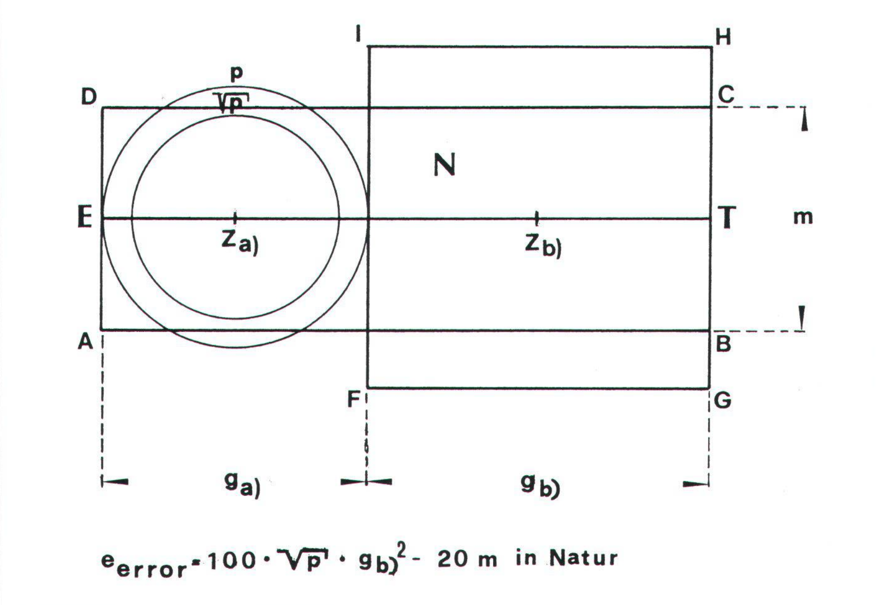

Abb. 1: Kepler-Newtonsche Raum-Zeit-Struktur zur Pseudo-Distanz-Berichtigung. Schematische Darstellung der ausgewerteten Streckenverhältnisse.

Kurzzeichenerklärung:

$g_{a)}$ = Pseudo-Beschleunigung a)
$g_{b)}$ = Pseudo-Beschleunigung b), Seite des Quadrats F-G-H-I
p = Kreis mit dem Durchmesser $g_{a)}$
$\sqrt{p}$ = Kreis mit dem Durchmesser $\frac{\sqrt{p}}{\pi}$
$Z_{a)}$ = Zentrum der Kreise p und $\sqrt{p}$
$Z_{b)}$ = Zentrum des Quadrats F-G-H-I
m = Für a) und b) gültige, durchschnittliche Pseudo-Masse

$$m = \frac{1}{r_{a)} + r_{b)}} = \frac{1}{1{,}358707 + 1{,}794989}\ \text{cm}$$

E-T = $g_{a)} + g_{b)}$ = Raum-Zeit-Achse
N = Für a) und b) gültiges, durchschnittliches Newtonsches Kraft-Flächen-Rechteck A-B-C-D, $N = m \cdot g$

Daten:

$g_{a)}$	=	0,4765823 cm
$g_{b)}$	=	0,6392476 cm
m	=	0,317088 cm
E-T	=	1,11583 cm
$r_{a)}$	=	1,358707 cm
$r_{b)}$	=	1,794989 cm
N	=	0,353816 cm^2
p	=	1,4972274 cm
$\sqrt{p}$	=	1,2236124 cm

$\Delta e_{error a)/b)}$ = 20 m in Natur = Differenz zwischen den Pseudo-Distanzen $e_{a)}$ und $e_{b)}$

g wird mittels folgender Formeln aus den, schon eingeführten Ausgangsdaten $\frac{1}{9}$, r und rad. % gewonnen. Der Einsatz des Kilometer/Grad-Koeffizienten $\frac{1}{9}$ erklärt sich dadurch, dass es sich bei der gnomonischen Projektion des Pseudo-Fehl-Dreiecks um eine Winkelprojektion handelt. Die enstandenen Bogengrade müssen also in metrische Einheiten umgewandelt werden.

Bestimmung des Beschleunigungsfaktoren g:

Beispiel a)

Formel:

$$g_{a)} = \frac{1}{9 \cdot (1-\text{rad.}\%_{a)}) \cdot r_{a)}} \text{ cm}$$

In Zahlen:

$$g_{a)} = \frac{1}{9 \cdot (1-0{,}8284093 \cdot 1{,}358707} \text{ cm}$$

$g_{a)} = 0{,}476582$ cm

Beispiel b)

Formel:

$$g_{b)} = 1 - \frac{1}{9 \cdot (1-\text{rad.}\%_{b)}) \cdot r_{b)}} \text{ cm}$$

In Zahlen:

$$g_{b)} = 1 - \frac{1}{9 \cdot (1-0{,}8284123 \cdot 1{,}79499} \text{ cm}$$

$g_{b)} = 0{,}639247$ cm

Vergleich mit dem, innerhalb des Keplerschen Weges entstandenen, als Newtonsche Kraft N vermerkten, Wurzelwert: 0,359282

2. Newtonsches Axiom: $N = r \cdot g$

Beispiel a):

$$N_{a)} = \frac{1}{1{,}358707} \cdot 0{,}476582 = 0{,}350761$$

Beispiel b):

$$N_{b)} = \frac{1}{1{,}79499} \cdot 0{,}639247 = 0{,}356128$$

Die Newtonsche Weiterführung des Keplerschen Weges zur Bestimmung von

Fehl-Zeit-Distanz e_{rror} und
Altituden-Intervall $\Delta R_{G\text{-}CM}$

unter Einsatz des vorhergehend aufgestellten Beschleunigungsfaktoren g:

Bestimmung von $e_{rror\ a)/b)}$:

Formel:

$$e_{rror\ a)} = 100 \cdot g_{b)}^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot g_{a)}} - 20 \text{ m in Natur}$$

In Zahlen:

$$e_{rror\ a)} = 100 \cdot 0{,}6392476^2 \sqrt{\pi \cdot 0{,}4765823} - 20 \text{ m in Natur}$$

$e_{rror\ a)} = \underline{30{,}001392}$ m in Natur

$e_{rror\ b)} = 50{,}001392$ m in Natur

Bestimmung von $\Delta R_{G\text{-}CM}$:

Formel:

$$\Delta R_{G\text{-}CM} = \frac{\text{tg}\ \alpha_{\text{mittel}\ b)}{}^{\circ} \cdot 100}{6\ \pi \cdot g_{a)}}$$

$$\left(\text{entwickelt aus: } \frac{1 \cdot 3\text{tg}\ \alpha_{b)} \cdot 100}{9 \cdot 2\ \pi \cdot g_{a)}}\right) \text{ m in Natur}$$

In Zahlen:

$$\Delta R_{G\text{-}CM} = \frac{\text{tg}\ 61{,}380276^{\circ} \cdot 100}{6\ \pi \cdot 0{,}4765823} \text{ m in Natur}$$

$\Delta R_{G\text{-}CM} = \underline{20{,}400244}$ m in Natur

Die Artikelreihe GPS-Geometrie nach antikem Vorbild ist mit der demonstrierten Einbeziehung der Newtonschen Beschleunigung in die Bestimmungen von Zeit-Distanz- und Altituden-Intervall beendet. Falls Sie ausführlichere Unterlagen betreffs der Gewinnung der Ausgangsdaten wünschen sollten, steht die Autorin gerne zur Verfügung (Tel. 021 / 801 87 14).

Marie-Louise Deile
Chemin de l'Alouette 12
CH-1110 Morges