Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 86 (1988)

Heft: 3

Artikel: Die Interpretation geophysikalischer Erregungen von Polbewegung und Rotationsschwankung

Autor: Jochmann, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233747

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Interpretation geophysikalischer Erregungen von Polbewegung und Rotationsschwankung

H. Jochmann

Variationen von Polbewegung und Tageslänge werden durch geophysikalische Prozesse hervorgerufen. Diese beeinflussen das Rotationsverhalten der Erde, wenn sie mit Massenbewegungen oder Kopplungsmomenten zwischen verschiedenen Sphären der Erde verbunden sind.
Die Untersuchung dieser Zusammenhänge erfordert ein Modell des Rotationsverhaltens der Erde, in dem die Kenntnisse über den inneren Aufbau der Erde soweit berücksichtigt sind, wie es für die Interpretation der betreffenden geophysikalischen Prozesse erforderlich ist. Die anzuwendende Lösungsmethode der aus diesem Modell folgenden Differentialgleichungen hängt von den Informationen über den zu untersuchenden geophysikalischen Prozess ab. Die direkte Methode wurde erfolgreich bei der Interpretation atmosphärischer Einflüsse auf das Rotationsverhalten der Erde angewandt, da durch die meteorologischen Organisationen ausreichend Informationen über das Verhalten der Atmosphäre zur Verfügung gestellt werden. Die inverse Lösung wird zweckmässig für die Interpretation von Prozessen angewandt, deren Verlauf global nicht so gut bekannt ist, wie z.B. Schwankungen des Meeresspiegels.
Die Untersuchung des Rotationsverhaltens der Erde in Verbindung mit geophysikalischen Prozessen ist nicht nur wichtig für die Erklärung von Variationen der Rotationsparameter, sondern trägt auch zum Erkennen der globalen Eigenschaften geophysikalischer Prozesse bei.

Les variations du mouvement des pôles et de la longueur des jours sont provoqués par des phénomènes géophysiques. Ceux-ci influencent la rotation de la Terre lorsqu'ils sont liés à des mouvements de masses et à des moments de couplage entre les différentes sphères de la Terre.
La recherche de ces dépendances exige un modèle de la rotation de la Terre dans lequel les connaissances sur sa constitution interne sont prises en compte comme cela est nécessaire pour l'interprétation des phénomènes géophysiques concernés. La méthode de résolution à appliquer et les équations différentielles qui en résultent dépendent des informations concernant les phénomènes géophysiques à étudier. La méthode directe a été utilisée avec succès pour l'interprétation des influences atmosphériques sur la rotation de la Terre car des informations sur le comportement de l'atmosphère peuvent être obtenues auprès des organisations météorologiques. La solution inverse sera appliquée pour l'interprétation des phénomènes dont le comportement global n'est pas bien connu, comme par exemple les variations du niveau de la mer.
La recherche concernant la rotation de la Terre en liaison avec des phénomènes géophysiques n'est pas seulement importante pour expliquer la variation des paramètres de cette rotation, mais elle contribue aussi à la connaissance des propriétés globales des phénomènes géophysiques.

Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und die Richtung der Rotationsachse sind Schwankungen unterworfen, die durch äussere Kräfte und die am Erdkörper ablaufenden geophysikalischen Prozesse hervorgerufen werden. Als äussere Kräfte sind die Anziehungskräfte von Sonne, Mond und Planeten bekannt, die Präzession, Nutation und Gezeitendeformationen hervorrufen. Neben diesen astronomisch bedingten Einflüssen, können geophysikalische Prozesse das Verhalten des Rotationsvektors beeinflussen, wenn sie mit Massenbewegungen oder Drehmomenten zwischen verschiedenen Teilen der Erde verbunden sind; erwähnt seien Massenbewegungen in der Atmosphäre und der Hydrosphäre sowie Kopplungsmomente zwischen Erdmantel und flüssigem Kern.
Die Variationen des Rotationsvektors der Erde lassen sich in einem mit der Erde rotierenden Koordinatensystem oder einem Inertialsystem darstellen. Im mitrotierenden Koordinatensystem dominieren die durch geophysikalische Prozesse hervorgerufenen Variationen, während im Inertialsystem äussere Momente den Hauptanteil der Variationen hervorrufen (siehe z.B. [9]). Zur Untersuchung geophysikalischer Erregungen des Rotationsvektors ist daher besonders sein Verhalten im mitrotierenden System geeignet, wofür im folgenden die theoretischen Grundlagen dargestellt werden.
Die nachfolgend dargestellten Methoden sind für die Interpretation periodischer Prozesse geeignet, deren Periode wesentlich länger als ein Tag ist.

1. Das Modell des Rotationsverhaltens der Erde

Den folgenden Untersuchungen liegt ein vereinfachtes Kern-Mantel-Modell zugrunde, in dem die Wirkung äusserer Momente nicht beachtet wird. Nach dem Drehimpulssatz ergeben sich in einem mit dem Mantel rotierenden Koordinatensystem, dessen x_3-Achse mit der mittleren Lage der Figurenachse zusammenfällt, folgende Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}) = 0$$
$$\frac{d\mathbf{H}_c}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_c) = \mathbf{N}_c + \mathbf{L}_c \quad . \tag{1}$$

In vorstehenden Gleichungen sind $\mathbf{H}$ und $\mathbf{H}_c$ die Drehimpulse von Erde und Kern. ω ist die Winkelgeschwindigkeit des Mantels und $\mathbf{N}_c$ das Trägheitskopplungsmoment zwischen flüssigem Kern und Mantel. $\mathbf{L}_c$ ist ein Kopplungsmoment zwischen Kern und Mantel, das z.B. durch elektromagnetische oder topographische Kopplung erzeugt wird (siehe [12]). Nimmt man nach POINCARÉ [11] eine einfache Rotation des flüssigen Kerns an, so ergibt sich aus der Trägheitsbewegung des Kerns

$$\mathbf{N}_c = (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{H}_c) \quad , \tag{2}$$

worin ω_c die Winkelgeschwindigkeit des Kerns ist. Mit (2) und

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

ergibt sich aus (1)

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}) = 0$$
$$\frac{d\mathbf{H}_c}{dt} - (\Delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_c) = \mathbf{L}_c \quad . \tag{4}$$

Die Drehimpulse in (4) sind durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_M \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega}_c + \mathbf{h} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_c \Delta\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}$$
$$\mathbf{H}_c = \mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega}_c + \mathbf{h}_c = \mathbf{I}_c (\boldsymbol{\omega} + \Delta\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{h}_c \tag{5}$$

worin

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A+c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & A+c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C+c_{33} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

und

$$\mathbf{I}_c = \begin{bmatrix} A_c+c^c_{11} & c^c_{12} & c^c_{13} \\ c^c_{12} & A_c+c^c_{22} & c^c_{23} \\ c^c_{13} & c^c_{23} & C_c+c^c_{33} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

die Trägheitstensoren der Erde und des flüssigen Kerns sind.

$$\mathbf{I}_M = \mathbf{I} - \mathbf{I}_c$$

ist der Trägheitstensor des Erdmantels. In (6) und (7) sind A,C und A_c, C_c die Hauptträgheitsmomente der Erde und des flüssigen Kerns. c_{ij} und c^c_{ij} sind kleine zeitliche Variationen der Deviationsmomente und für i = j der Hauptträgheitsmomente, die die Änderung der Massengeometrie infolge von Massenbewegungen am Erdkörper beschreiben. Die dynamische Wirkung dieser Bewegungen ruft die relativen Drehimpulse **h** und $\mathbf{h}_c$ hervor. c_{ij}, c^c_{ij}, **h** und $\mathbf{h}_c$ werden im folgenden als kleine Grössen behandelt, deren Quadrate und Produkte vernachlässigbar sind. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, da sich die Massengeometrie der Erde infolge von geophysikalischen Prozessen und Rückkopplungseffekten, hervorgerufen durch Polbewegung und Rotationsschwankung, nur wenig ändert.
Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Verhalten des Rotationsvektors und geophysikalischen Prozessen müssen Beziehungen zwischen den Parametern des geophysikalischen Prozesses und den Grössen hergestellt werden, die das Verhalten des Rotationsvektors im mitrotierenden Koordinatensystem beschreiben. Hierzu wurden in (4) und (5) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= m_1\,\omega_0 & & \Delta\omega_1 = n_1\,\omega_0 \\ \omega_2 &= m_2\,\omega_0 & \text{und} \quad & \Delta\omega_2 = n_2\,\omega_0 \\ \omega_3 &= (1+m_3)\,\omega_0 & & \Delta\omega_3 = n_3\,\omega_0 \end{aligned} \qquad (8)$$

eingeführt.

In (8) sind m_1 und m_2 die beiden Komponenten der Polbewegung und

$$m_3 = -\frac{\Delta\text{Tageslänge}}{\text{Tageslänge}} \qquad (9)$$

ist der negative Wert der relativen Änderung der Tageslänge. ω_o ist die mittlere Rotationsgeschwindigkeit. m_1, m_2 und m_3 sind aus astronomischen Beobachtungen, Satellitenbeobachtungen oder der Basisinterferometrie nach astronomischen Radioquellen (VLBI) ableitbar. n_1, n_2 und n_3 beschreiben die Bewegung des Kerns relativ zum Mantel. Sie sind keine messbaren Grössen und können nur in Ausnahmefällen – unter Verwendung plausibler Hypothesen – aus der Säkularvariation des geomagnetischen Feldes abgeleitet werden.
Die durch Massenbewegungen hervorgerufenen Deviationsmomente der Trägheitstensoren (6) und (7) ergeben sich nach folgender Formel:

$$c_{ij} = -\int_M x_i x_j \, dm(t) \quad . \qquad (10)$$

Die Variation des axialen Hauptträgheitsmomentes infolge von Massenbewegungen wird nach

$$c_{33} = \int_M (x_1^2 + x_2^2)\, dm(t) - C \qquad (11)$$

erhalten, worin C das mittlere axiale Hauptträgheitsmoment ist. In ähnlicher Form ergeben sich die zeitlich variablen Anteile der beiden äquatorialen Hauptträgheitsmomente c_{11} und c_{22}. Die relativen Drehimpulse erhält man nach der Formel

$$\mathbf{h} = \int_M (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, dm \quad . \qquad (12)$$

Bildet man folgende komplexe Ausdrücke:

$$m = m_1 + i\,m_2 \;, \quad n = n_1 + i\,n_2 \;, \quad c = c_{13} + i\,c_{23}$$
$$h = h_1 + i\,h_2 \;, \quad h_c = h^c_1 + i\,h^c_2 \;, \quad L_c = L^c_1 + i\,L^c_2$$

so ergeben sich aus (4), unter Berücksichtigung von (5), (6) und (7), die Differentialgleichungen zur Beschreibung von Variationen des Rotationsvektors,

$$\begin{aligned} &\dot m - i\,\frac{C-A}{A}\,\omega_0 m + \frac{A_c}{A}(\dot n + i\,\omega_0 n) = -\frac{\dot c}{A} - i\,\omega_0\frac{c}{A} - i\frac{h}{A} - \frac{\dot h}{A\omega_0} \\ &\dot m + \dot n + i\,\frac{C_c}{A_c}\,\omega_0 n = -\frac{\dot c_c}{A_c} - \frac{\dot h_c}{A_c\,\omega_0} + \frac{L_c}{A_c\,\omega_0} \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} &\dot m_3 + \frac{C_c}{C}\dot n_3 = -\frac{\dot c_{33}}{C} - \frac{\dot h_3}{C\omega_0} \\ &\dot m_3 + \dot n_3 = -\frac{\dot c^c_{33}}{C} - \frac{\dot h^c_3}{C\omega_0} + \frac{L^c_3}{C\omega_0} \quad . \end{aligned} \qquad (14)$$

Das Differentialgleichungssystem (13) beschreibt die Polbewegung und (14) die Variation der Tageslänge. Beide Gleichungssysteme sind mathematisch voneinander unabhängig, so dass im allgemeinen Polbewegung und Variation der Tageslänge getrennt behandelt werden können.
Nimmt man an, dass die zu untersuchenden geophysikalischen Prozesse am Erdmantel stattfinden und die charakteristischen Frequenzen dieser Prozesse

$$\sigma << \omega_0$$

sind, so erhält man aus (13) und (14), indem man die rechten Seiten der jeweils zweiten Gleichungen verschwinden lässt

$$\dot m - i\,\frac{C-A}{A_M}\,\omega_0 m = -\frac{\dot c}{A_M} - i\omega_0\frac{c}{A_M} - i\,\frac{h}{A_M} + \frac{\dot h}{A_M\omega_0} \qquad (15)$$

$$m_3 = -\frac{c_{33}}{C_M} - \frac{h_3}{C_M\omega_0} + K_0 \quad . \qquad (16)$$

$A_M = A - A_c$ und $C_M = C - C_c$ sind die Hauptträgheitsmomente des Mantels.
Mit (15) und (16) wurden zwei Gleichungen gewonnen, die die Beziehung zwischen Polbewegung, Tageslänge und den das Rotationsverhalten beeinflussenden Eigenschaften geophysikalischer Prozesse herstellen. K_o ist ein Integrationskonstante, die durch Anfangswertbetrachtungen bestimmt werden kann.
Durch Lösung der homogenen Differentialgleichung ergibt sich aus (15) die Kreisfrequenz der freien Polbewegung

$$\sigma_0 = \frac{C-A}{A_M}\,\omega_0 \quad . \qquad (17)$$

(17) ist die Eigenfrequenz eines aus starrem Mantel und flüssigem Kern bestehenden Erdmodell. Sie ist grösser als die EULER'sche Kreisfrequenz der starren Erde

$$\sigma_{EU} = \frac{C-A}{A}\,\omega_0 \quad . \qquad (18)$$

Hätte man die Eigenwerte auf Grund der Gleichung (13) berechnet, so hätte sich zusätzlich eine nahezu tägliche Frequenz ergeben, die jedoch für die weiteren Betrachtungen keine Bedeutung hat. Wegen der vollständigen Darstellung des Eigenwertproblems sei auf [9] verwiesen. (17) stellt natürlich noch nicht die Eigenfrequenz der realen Erde dar. Diese wird noch durch Änderungen der Massengeometrie infolge der durch die Polbewegung hervorgerufenen Fliehkraftänderungen beeinflusst. Diese bewirken Deformationen des Erdmantels und Polgezeiten des

Ozeans, die beide die Grösse der Kreisfrequenz der freien Polbewegung beeinflussen (genauere Darstellungen findet man in [8] und [10]). Der plausibelste Wert dieser Kreisfrequenz wird durch Analyse der Polbewegung erhalten. Er beträgt, wenn man als Zeiteinheit das Jahr benutzt,

$$\sigma_0 = \sigma_{CH} + i\alpha \tag{19}$$

worin

$$\sigma_{CH} = \frac{2\pi}{1{,}19}\frac{1}{a} \text{ und } \alpha = 0{,}05\frac{1}{a}$$

sind.
Die CHANDLER-Frequenz σ_{CH} stimmt hinreichend mit dem theoretisch für ein Erdmodell mit flüssigem Kern, elastischem Mantel und auf Polgezeiten reagierendem Ozean berechneten Wert überein. α ist ein Dämpfungsfaktor, der durch die Viskosität des Mantels verursacht wird. Mit (19) ergibt sich folgende Differentialgleichung der Polbewegung:

$$\dot{m} + \alpha\, m = i\sigma_{CH}\,(m - \psi) \tag{20}$$

worin

$$\psi = \chi - \frac{i}{\omega_0}\dot{\chi} \tag{21}$$

die Erregerfunktion ist, die aus den Deviationsmomenten und relativen Drehimpulsen nach

$$\chi = \frac{c}{C - A} - \frac{h}{(C - A)\omega_0} \tag{22}$$

berechnet wird.
Die Gleichung (20) ist für Erregerfunktionen gültig, die die Erde belasten und eine elastische Deformation der Erdoberfläche bewirken. Erregerfunktionen, die die Erde nicht belasten, müssen mit dem Faktor σ_{EU}/σ_{CH} multipliziert werden.
Die Änderung der relativen Tageslänge wird durch die Beziehung

$$m_3 = \psi_3 \tag{23}$$

mit

$$\psi_3 = -\frac{c_{33}}{C_M} - \frac{h_3}{C_M\omega_0} \tag{24}$$

beschrieben.

2. Berechnung der Erregerfunktionen

Die Erregerfunktionen χ und ψ_3 erhält man durch Berechnung der Integrale (10), (11) und (12), deren zeitliche Variation als zeitliche Variation der Dichte ρ und der Horizontalkomponenten der Bewegungsgeschwindigkeit (v_φ süd-nördlich, v_λ west-östlich) dargestellt wird.
Führt man an Stelle des kartesischen Koordinatensystems das geographische ein, so erhält man folgende Erregerfunktionen in sphärischer Approximation:

$$\begin{aligned}\chi = &-\frac{1}{C - A}\int_V (\rho\,(\varphi,\lambda,r,t) \\ &- \rho_0\,(\varphi,\lambda,r))\, r^2 \sin\varphi \cos\varphi \exp(i\lambda)\, dV \\ &+ \frac{1}{(C - A)\omega_0}\int_V r\,\rho\,(\varphi,\lambda,r)\,(v_\lambda \sin\varphi \\ &- i v_\varphi)\exp(i\lambda)\, dV\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\psi_3 = &-\frac{1}{C_M}\int_V (\rho\,(\varphi,\lambda,r,t) \\ &- \rho_0\,(\varphi,\lambda,r))\, r^2 \cos^2\varphi\, dV \\ &- \frac{1}{C_M\omega_0}\int_V r\,\rho\,(\varphi,\lambda,r)\, v_\lambda \cos\varphi\, dV\ .\end{aligned} \tag{26}$$

Die ersten Integrale von (25) und (26) stellen die Variation der Massengeometrie dar, während in den zweiten die dynamische Wirkung der Massenbewegungen zum Ausdruck kommt. Bei der Ermittlung der lokalen Dichtevariationen muss man beachten, dass die Gesamtmasse der Erde erhalten bleibt, d.h. die Dichtevariationen müssen gegebenenfalls um einen Wert $\delta\rho$ korrigiert werden, der folgende Beziehung befriedigen muss:

$$\int_V (\rho\,(\varphi,\lambda,r,t) - \rho_0(\varphi,\lambda,r)\, dV + V\,\delta\rho = 0\ . \tag{27}$$

Die Integration vorstehender Integrale muss über das Volumen der Erde ausgeführt werden.

2.1 Die Bestimmung der Dichtevariationen und Bewegungsgeschwindigkeiten

Zur Bestimmung der örtlich und zeitlich variablen Dichten und Bewegungsgeschwindigkeiten müssen Beziehungen zwischen diesen und messbaren Grössen des geophysikalischen Prozesses ermittelt werden.
Diese Beziehungen folgen den Gesetzen der Kontinuumsmechanik, die für das Kontinuum der Erde gelten, in dem der geophysikalische Prozess vor sich geht. Man kann z.B. das Bewegungsgesetz der Kontinuumsmechanik nach LAGRANGE

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{f} + \operatorname{div}\Sigma \tag{28}$$

ansetzen und die Beziehungen zwischen dem Spannungstensor und dem Dehnungstensor nach dem für das betreffende Kontinuum der Erde gültigen rheologischen Gesetz berechnen und erhält mit der Kontinuumsgleichung

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{29}$$

und gegebenenfalls der Zustandsgleichung

$$f\,(p,\rho,T) = 0 \tag{30}$$

(p = Druck, T = absolute Temperatur) ein System partieller Differentialgleichungen, aus dem man die Beziehungen zwischen Dichte, Temperatur, Bewegungsgeschwindigkeit und Deformation ermitteln kann, vorausgesetzt, die Volumenkräfte **f** sind bekannt. Es geht über das Ziel dieses Aufsatzes hinaus, die komplizierten Beziehungen für einen allgemeinen Deformationsfall darzustellen. Wir wollen uns im folgenden auf die EULER'sche Bewegungsgleichung für ideale Flüssigkeiten

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{31}$$

beschränken, die für die Konstruktion von Erregerfunktionen wichtig ist, die durch Bewegungen in der Atmosphäre und Hydrosphäre verursacht werden.

2.2 Die atmosphärische Erregerfunktion

Die Dynamik der Atmosphäre ist infolge weltweiter meteorologischer Beobachtungen der am besten bekannte globale geophysikalische Prozess. An den meteorologischen Stationen werden Luftdruck, Temperatur, Windgeschwindigkeit und Luftfeuchte gemessen, so dass es mittels Gleichung (31) möglich ist, Beziehungen zur Dichte ρ herzustellen. Gleichung (31) wird in einem mit der Erde rotierendem Koordinatensystem

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{v}} + (\omega \times \mathbf{r}) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \\ &+ 2\,(\omega \times \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\end{aligned} \tag{32}$$

Die Volumenkraft **f** ist im vorliegenden Fall die Schwerkraft. In einem lokalen Koordinatensystem, dessen eine Achse nach dem Zenit zeigt, während die beiden anderen Achsen Tangenten an den Meridianen

(positiv südwärts) und Parallelkreisen (positiv ostwärts) sind, erhalten wir aus (32) für eine stationäre Atmosphäre ($\mathbf{v} = O$)

$$\rho v_\lambda = -\frac{1}{2a\omega_0 \sin\varphi}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{33a}$$

$$\rho v_\varphi = -\frac{1}{2a\omega_0 \sin\varphi \cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \tag{33b}$$

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad , \tag{33c}$$

worin a der mittlere Erdradius ist. Gleichung (33c), in der die Corioliskraft gegenüber dem dominierenden Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt wurde, ist die Gleichung für eine statische Atmosphäre. Neben den Gleichungen (33) benötigt man zur Lösung des vorliegenden Problems noch die Zustandsgleichung der Atmosphäre. Ganz allgemein kann man annehmen, dass die Dichte eine Funktion der Höhe ist,

$$\rho = \rho\,(r-a) = \rho\,(h) \quad . \tag{34}$$

Wird (34) in (33c) eingesetzt, so erhält man

$$p_0 = g\int_0^h \rho\,(r)dr \quad . \tag{35}$$

h ist die effektive Höhe der Atmosphäre und p_o der am Boden gemessene Luftdruck. Mit Hilfe von (35) bekommt man nach [1] eine einfache Beziehung zwischen meteorologischer Erregerfunktion und Luftdruck, wenn man annimmt, dass die effektive Höhe der Atmosphäre

$$h << a$$

ist. Führt man in (25)

$$dV = r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi\, d\lambda$$

ein und berücksichtigt (35), so erhält man folgende massengeometrische Anteile der Erregerfunktion:

$$\chi_M = \frac{a^4}{(C-A)\,g}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} p_0\,(\varphi,\lambda)\,\sin\varphi\cos^2\varphi\,\exp(i\lambda)d\varphi\, d\lambda \tag{36a}$$

$$\psi_{3M} = -\frac{a^4}{C_M g}\,0{,}7\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} p_0\,(\varphi,\lambda)\cos^3\varphi\, d\varphi\, d\lambda \quad . \tag{36b}$$

Der Faktor 0,7 in (36b) berücksichtigt die Deformation der festen Erde infolge des Luftdrucks. In (36a) braucht ein derartiger Faktor nicht eingeführt zu werden, da die Polbewegungsgleichung (20) die Deformation der Erde infolge von Laständerungen bereits in Rechnung stellt.
Berücksichtigt man die Zustandsgleichung der Atmosphäre

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad , \tag{37}$$

worin R die Gaskonstante ist, so erhält man nach einigen elementaren Rechnungen (siehe [4]) folgende Werte für die massengeometrischen Anteile der Erregerfunktion:

$$\chi_M = \frac{(a+h_m)^4}{(C-A)\,g}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} \Delta p_0\,(\varphi,\lambda,t)\,\sin\varphi\cos^2\varphi\,\exp(i\lambda)d\varphi\, d\lambda \tag{38a}$$

$$\psi_{3M} = -0{,}7\,\frac{(a+h_m)^4}{C_M g}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} \Delta p_0\,(\varphi,\lambda,t)\cos^3\varphi\, d\varphi\, d\lambda \quad . \tag{38b}$$

$$\chi_D = \frac{1{,}43}{(C-A)\,\omega_0}\int_{r=a}^{a+h}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} r^3\rho\,(\varphi,\lambda,r)\,(v_\lambda \sin\varphi - i v_\varphi)\,\cdot$$
$$\cdot\ \exp(i\lambda)\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda\, dr \tag{39a}$$

$$\psi_{3D} = -0{,}7\,\frac{1}{C_M\omega_0}\int_{r=a}^{a+h}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} r^3\rho\,(\varphi,\lambda,r)\,v_\lambda\cos^2\varphi\, d\varphi\, d\lambda\delta\rho \quad , \tag{39b}$$

h_m ist die effektive Höhe der Atmosphäre, die vom gewählten Atmosphärenmodell abhängt. Berücksichtigt man in (37) die Änderung von g und T mit der Höhe, so erhält man

$$h_m = 7000\text{m} \quad .$$

Für eine isotherme Atmosphäre ergibt sich

$$h_m = 6800\text{m} \quad .$$

Die Differenz beider Werte zeigt, dass das Atmosphärenmodell nur einen geringen Einfluss auf die Berechnung der Erregerfunktion hat. Die Luftdruckdifferenzen in (38) müssen gegenüber lokalen langzeitigen Mitteln des Luftdrucks gebildet werden.
Zur Bestimmung der dynamischen Anteile der atmosphärischen Erregerfunktion verwendet man in verschiedenen Höhen gemessene Werte der Windgeschwindigkeiten. Der Faktor 1,43 ist in (39a) eingeführt worden, da durch χ_D die Erdoberfläche keine Auflaständerung erfährt.

3. Geophysikalischer Prozess und Lösung der Gleichungen von Polbewegung und Rotationsschwankung

Für die Lösung der Gleichungen (20) und (23) wird angenommen, die aus geophysikalischen Prozessen abgeleiteten Erreger-

funktionen seien durch eine Folge von periodischen Anteilen

$$\psi(t) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} \psi_f \exp(i2\pi ft) \qquad (40a)$$

$$\psi_3(t) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} \psi_{3f} \exp(i2\pi ft) \qquad (40b)$$

gegeben, die durch eine Fouriertransformation aus den in der Regel numerisch gegebenen Erregerfunktionen abgeleitet werden können. Wird (40a) in (20) eingesetzt, so erhalten wir folgende Lösung der Differentialgleichung (20):

$$m(t) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} I(f)\, \psi_f \exp(i2\pi ft)$$

$$+ \psi_{f_0} \exp(i(\sigma_{CH} + i\alpha)t)$$

$$= \sum_{f=-\infty}^{\infty} I(f)\, \psi(f,t) + m(f_0,t)\,. \qquad (41)$$

In (41) ist

$$I(f) = \frac{\left(1 - \frac{f}{f_0} - i\frac{1}{2Q}\right)}{\left(1 - \frac{f}{f_0}\right)^2 + \frac{1}{4Q^2}} \qquad (42)$$

die frequenzabhängige Übertragungsfunktion mit der CHANDLER-Frequenz

$$f_0 = \frac{\sigma_{CH}}{2\pi} = 0{,}840 \text{ z.p.a}$$

und dem Dämpfungsmass (quality factor)

$$Q = \frac{\pi f_0}{\alpha} = 50\,.$$

$m(f_0,t)$ ist der freie Bewegungsanteil der Polbewegung. f und f_0 werden in Zyklen pro Jahr angegeben.
Der Einfluss von $\psi_3(t)$ auf die relative Tageslänge $m_3(t)$ ergibt sich nach (23) zu

$$m_3(t) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} \psi_{3f} \exp(i2\pi ft)$$

$$= \sum_{f=-\infty}^{\infty} \psi_{3f}(f,t)\,. \qquad (43)$$

Ist der geophysikalische Prozess so gut bekannt, dass die periodischen Anteile seiner Erregerfunktion berechnet werden können, so ist es auf Grund von (41) und (43) möglich, die zugehörigen von Polbewegung und relativer Tageslänge zu ermitteln. Nun ist die zur Verfügung stehende Information für die verschiedenen geophysikalischen Prozesse sehr unterschiedlich.
Die Dynamik der Atmosphäre ist infolge meteorologischer Beobachtungen sehr gut bekannt. Über das Verhalten der Hydrosphäre weiss man weniger, da längere Beobachtungsreihen über Meeresspiegelschwankungen nur an den Küstenlinien zur Verfügung stehen und Beobachtungsstationen des Grundwasserspiegels nur sporadisch verteilt sind. Aus den Beobachtungen des geomagnetischen Oberflächenfeldes erhält man Aussagen zur Variation der elektromagnetischen Kern-Mantel-Kopplungsmomente. Da die Variationen des geomagnetischen Feldes nur das zeitliche Verhalten des poloidalen Kernfeldes widerspiegeln, benötigen wir zusätzliche Hypothesen um etwas den Einfluss des toroidalen Feldes auf die Kern-Mantel-Kopplung aussagen zu können. Wegen der unterschiedlichen Kenntnis über die verschiedenen geophysikalischen Prozesse ist es zweckmässig, verschiedene aus der Mathematik bekannte Lösungsverfahren anzuwenden. Da in der Regel spezielle periodische Anteile der Polbewegung und Rotationsschwankung untersucht werden, reduzieren sich die Gleichungen (41) und (43) auf folgende Form:

$$m(f,t) = I(f)\, \psi(f,t)$$
$$m_3(f,t) = \psi_3(f,t)\,. \qquad (44)$$

(44) ist die direkte Lösung, die auf Prozesse anwendbar ist, über die man relativ gut informiert ist. Ist die Kenntnis über einen globalen geophysikalischen Prozess unvollständig, so empfiehlt es sich, die durch die Gleichungen

$$\psi(f,t) = I^{-1}(f)\, m(f,t)$$
$$\psi_3(f,t) = m_3(f,t) \qquad (45)$$

gegebene inverse Lösung anzuwenden.
Liegt ein wohldefinierter periodischer Anteil der Polbewegung und die zugehörige Erregerfunktion vor, so kann man eine spezielle Form der inversen Aufgabe – die Eingangs-Ausgangs-Analyse – anwenden, mit deren Hilfe es möglich ist, die Übertragungsfunktion nach

$$I(f) = m(f,t)\, \psi(f,t)^{-1}$$
$$I^{-1}(f) = \psi(f,t)\, m(f,t)^{-1} \qquad (46)$$

zu ermitteln. Man kann nachweisen, dass die Formeln (46) der Schätzung der Übertragungsfunktion I(f) nach der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen. Da die Übertragungsfunktion von der Struktur der Differentialgleichung der Polbewegung abhängt, ist es möglich, bei ihrer Kenntnis die Parameter der Differentialgleichung σ_{CH} und α zu bestimmen, die von der geometrischen Struktur und Rheologie der Erde abhängen, womit man eine Aussage über globale geophysikalische Eigenschaften der Erde erhält.
Die Berechnung der erregten periodischen Anteile der Polbewegung und der relativen Tageslänge ist auf Grund von (44) ohne Schwierigkeiten möglich, wenn man die Erregerfunktion des untersuchten geophysikalischen Prozesses kennt. Durch Vergleich mit den vom Internationalen Breitendienst (ILS) gegebenen Daten und den Werten der Tageslänge des Bureau de l'heure kann man sich von der Richtigkeit der Beziehung überzeugen.
Auf Grund von (45) ist es möglich, die zu einem periodischen Anteil der Polbewegung und der Variation der Tageslänge gehörenden Erregerfunktionen zu berechnen. Damit wurde jedoch noch keine Aussage zum geophysikalischen Prozess gewonnen, der diese Erregerfunktion verursacht. Hierzu müssen wir die – die Erregerfunktion erzeugenden – Integrale (25) und (26) untersuchen. In der Regel führt die in-

$$I^{-1}(f)\, m(f,t) = -\frac{a^4}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} D(\varphi,\lambda,t) \sin\varphi \cos^2\varphi \exp(i\lambda)\, d\varphi\, d\lambda$$

$$m_3(f,t) = -\frac{a^4}{C_M} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} D(\varphi,\lambda,t) \cos^3\varphi\, d\varphi\, d\lambda \qquad (47)$$

mit

$$D(\varphi,\lambda,t) = \frac{1}{a^4} \int_{r=R}^{R+h} r^4 (\rho(\varphi,\lambda,t) - r_0(\varphi,\lambda,t)\, dr\,. \qquad (48)$$

verse Aufgabe auf ein System von Integralgleichungen, dessen Lösungsfunktion zu bestimmen ist. Wir wollen dieses Problem im folgenden für eine häufig vorkommende Aufgabenstellung diskutieren.

3.1 Die inverse Lösung

Bei der nachfolgend dargestellten Lösung wird vorausgesetzt, dass der geophysikalische Prozess langperiodische Konstituenten (≧ 1 Jahr) der Erregerfunktion erzeugt, so dass man sich auf die Untersuchung der massengeometrischen Anteile von $\psi(f,t)$ und $\psi_3(f,t)$ beschränken kann. Der Prozess soll fernerhin in einer Schicht der Höhe h stattfinden. Zu diesen Prozessen gehören z.B. die in der Atmosphäre und Hydrosphäre stattfindenden Massenbewegungen.
Nach (45) erhält man mit (25) und (26) für diese spezielle Aufgabenstellung folgende Integralgleichungen:

Die linken Seiten von (47) sind durch Analyse der Polkoordinaten oder der Tageslängenvariationen bekannt. Für einen bestimmten periodischen Anteil, der mit der Frequenz f variiert, erhält man sie in der Form

$$\begin{aligned} I^{-1}(f)\, m(f,t) &= A_{11} \cos 2\pi ft + A_{12} \sin 2\pi ft \\ &\quad + i\,(A_{21} \cos 2\pi ft + A_{22} \sin 2\pi ft) \\ \psi_3(f,t) &= A_{31} \cos 2\pi ft + A_{33} \sin 2\pi ft \quad . \end{aligned} \tag{49}$$

Im Falle der inversen Lösung ist $D(\varphi,\lambda, t)$ die zu bestimmende Lösungsfunktion, die entsprechend (49) die Form

$$\begin{aligned} D(\varphi,\lambda,t) &= D(\varphi,\lambda)_0 \sin(2\pi ft + \gamma(\varphi,\lambda)) \\ &= D(\varphi,\lambda)_{01} \cos 2\pi ft \\ &\quad + D(\varphi,\lambda)_{02} \sin 2\pi ft \end{aligned} \tag{50}$$

haben muss. Führt man (49) und (50) in (47) ein, so erhält man ein System von sechs Integralgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $D(\varphi,\lambda)_{01}$ und $D(\varphi,\lambda)_{02}$. Aus der Theorie der Integralgleichungen ist bekannt, dass es für dieses Problem eine Anzahl äquivalenter Lösungen gibt, die durch Informationen über den zu untersuchenden geophysikalischen Prozess eingeschränkt werden müssen. Eine weitere Möglichkeit zur Einschränkung dieser Lösungsvielfalt ergibt sich aus der Interpretierbarkeit von $\psi(f,t)$ als Bewegung des Trägheitspoles (Figurenachse) der Erde. Allgemein kann jeder periodische Anteil der Erregerfunktion $\psi(f,t)$ als elliptische Bewegung des Trägheitspoles dargestellt werden (siehe z.B. [8]). In speziellen Fällen, die besonders häufig aus den Amplitudenspektren der Polbewegung abzuleiten sind, artet die elliptische Bewegung in eine lineare aus. Die Koeffizienten von (49) müssen dann die Beziehung

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

erfüllen. Für eine Erregerfunktion, die durch eine lineare Bewegung des Trägheitspoles repräsentiert ist, kann eine Lösungsfunktion angesetzt werden, deren Phase unabhängig von den geographischen Koordinaten φ und λ ist,

$$D(\varphi,\lambda) = D_0(\varphi,\lambda) \sin(2\pi ft + \gamma) \tag{51}$$

Da man in diesem Fall nur die Amplitudenfunktion $D_0(\varphi,\lambda)$ zu bestimmen braucht, reduziert sich (47) auf ein System von drei Integralgleichungen

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{a^4}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} D_0(\varphi,\lambda) \sin\varphi \cos^2\varphi \cos\lambda\, d\varphi\, d\lambda \\ A_2 &= -\frac{a^4}{C-A} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} D_0(\varphi,\lambda) \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\lambda\, d\varphi\, d\lambda \\ A_3 &= -\frac{a^4}{C_M} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} D_0(\varphi,\lambda) \cos^3\varphi\, d\varphi\, d\lambda \quad , \end{aligned} \tag{52}$$

worin

$$A_1 = (A_{11}^2 + A_{12}^2)^{1/2}$$
$$A_2 = (A_{21}^2 + A_{22}^2)^{1/2}$$
$$A_3 = (A_{31}^2 + A_{32}^2)^{1/2}$$

ist. Da näherungsweise angenommen werden kann, dass $D_0(\varphi,\lambda)$ eine Werteverteilung auf einer Kugelfläche darstellt, kann es durch eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen approximiert werden,

$$D_0(\varphi,\lambda) = k\, F(\varphi,\lambda) \tag{53}$$

mit

$$F(\varphi,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{mn} \cos m\lambda + b_{mn} \sin m\lambda)\, P_{mn}(\sin\varphi) \quad . \tag{54}$$

(54) muss auf Grund angenommener oder bekannter durch den geophysikalischen Prozess hervorgerufener Dichtevariationen in der betreffenden Schicht der Erde geschätzt werden. Setzt man (53) in (52) ein, so erhält man durch Integration drei Werte der Konstanten k,

k_1, k_2 und k_3,

die bei richtig angenommener Funktion $F(\varphi,\lambda)$ gleich sein müssen.
Ist $k_1 \neq k_2$, so sind die tesseralen Glieder von (50) fehlerhaft. $k_1 = k_2 \neq k_3$ bedeutet, dass die zonalen Glieder falsch geschätzt sind. Um Übereinstimmung zu erzielen, muss die für die Berechnung von (54) angenommene Werteverteilung geändert werden. Es sei bemerkt, dass die Entwicklung von $F(\varphi,\lambda)$ nach Kugelflächenfunktionen umgangen werden kann, wenn man die Integrale (52) numerisch berechnet.

Bei der Wahl von $F(\varphi,\lambda)$ muss berücksichtigt werden, dass die Erregerfunktion $\psi(f,t)$ durch eine Massenbewegung zwischen Nord- und Südhalbkugel hervorgerufen wird.
Zur Untersuchung des Einflusses von Meeresspiegelschwankungen auf das Rotationsverhalten der Erde kann man z.B. folgenden Ansatz machen:

$$\begin{aligned} F(\varphi,\lambda) &= 0 \text{ auf den Kontinenten} \\ F(\varphi,\lambda) &= \text{sign}(\varphi)\ 1 \text{ auf den Ozeanen} \end{aligned} \tag{55}$$

Bei diesem Ansatz ist für kleine Meeresspiegelschwankungen das Gesetz der Massenerhaltung hinreichend erfüllt.
Aus (48) ergibt sich dann folgende Beziehung zwischen der Lösungsfunktion und den Meeresspiegelschwankungen:

Sind die Amplituden A_1, A_2 und A_3 in (52) auf Grund zweckmässiger Fouriertransformationen der Zeitreihen von Polbewegung und Tageslänge ermittelt worden und

$$D(\varphi,\lambda,t) = \frac{\rho_W}{a^4}\int_{r=a}^{a+\Delta h(\varphi,\lambda,t)} r^4\,dr \approx \rho_W \Delta h(\varphi,\lambda,t) \qquad (56)$$

wurde aus den Integralgleichungen (52) mit (53) und (55) eine hinreichende Übereinstimmung der Werte k nachgewiesen, so ist es nach (56) möglich, die Meeresspiegelschwankungen zu ermitteln, durch die die Erregerfunktionen erzeugt worden sind.

4. Beispiele der geophysikalischen Erregung von Variationen des Rotationsvektors

Nach vorstehendem Überblick über die Methoden der Interpretation geophysikalischer Einflüsse auf das Verhalten des Rotationsvektors der Erde, werden im folgenden Beziehungen einiger geophysikalischer Prozesse zur Rotation der Erde untersucht, wobei direkte und inverse Lösungsmethoden angewandt werden.

4.1 Die atmosphärische Erregung

4.1.1 Der Einfluss atmosphärischer Massenbewegungen auf die Polbewegung

Mit den aus meteorologischen Messungen bekannten Luftdruckwerten und Windgeschwindigkeiten kann die Berechnung der atmosphärischen Erregerfunktion der Polbewegung nach (36) oder (38a) und (39a) durchgeführt werden. Bei der Berechnung des massengeometrischen Anteils der Erregerfunktion muss man beachten, dass die Meeresoberfläche auf schwankenden Luftdruck reagiert. Für langsame Druckänderungen kann man annehmen, dass die Luftmassenbewegungen über den Ozeanen durch entsprechende Wassermassenbewegungen kompensiert werden (inverses Barometerprinzip). Dies erfordert zwar eine zusätzliche Korrektur der Luftdruckschwankungen, hat jedoch den Vorteil, dass man unter Berücksichtigung der Massenerhaltung die massengeometrischen Anteile der Erregerfunktion aus Luftdruckwerten ermitteln kann, die auf dem Festland gemessen worden sind. Die erforderliche Korrektur der in (38a) eingehenden Luftdruckdifferenzen kann nach der Formel

$$\Delta p_s(t) = -\frac{g_{45}}{S_M}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\lambda=0}^{2\pi} C'(\varphi,\lambda)\,\frac{\Delta p_s(\varphi,\lambda,t)}{g(\varphi)}\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda \qquad (57)$$

ermittelt werden, in der $C'(\varphi,\lambda)$ die Kontinentfunktion ist, die auf dem Festland die Werte Eins annimmt und auf dem Meer verschwindet. S_M ist die Gesamtfläche der Ozeane.

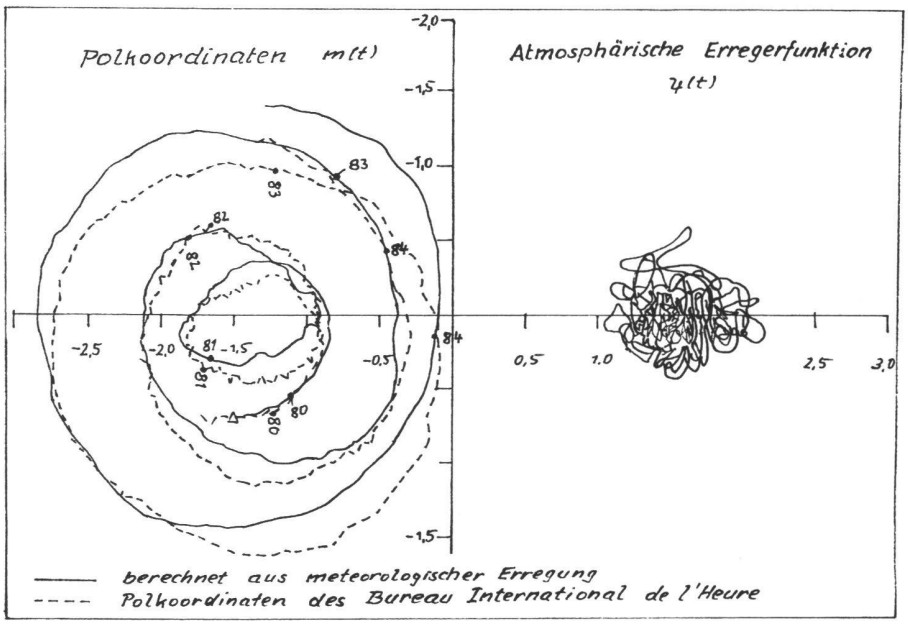

Abb. 1: Polbewegung und atmosphärische Erregerfunktion nach Hide [3].

f	=	3	2	1	0,84	0,7	0,5	0,2	0,1	z.p.a
|I(f)|	=	0,1	0,5	26,8	1000	37,8	6,1	1,7	1,3	

Tab. 1: Die Übertragungsfunktion I(f)

Eines der neuesten Ergebnisse zur Untersuchung des Einflusses atmosphärischer Erregerfunktionen auf die Polbewegung ist in [3] veröffentlicht. Es ist in Abb. 1 dargestellt. Abb. 1 enthält die Erregerfunktion und die aus ihr durch numerische Integration der Gleichung (20) abgeleitete Polbewegung. Man erkennt, dass aus einer irregulären Erregerfunktion eine ziemlich reguläre Polbewegung folgt. Dies wird durch das Resonanzverhalten der Polbewegung bewirkt, das durch die Übertragungsfunktion beschrieben wird, für die einige Werte in folgender Tabelle angegeben sind.

Aus der Tabelle folgt, dass die Übertragungsfunktion bei Frequenzen über 1 z.p.a besonders klein wird, wodurch der in Abb. 1 zu erkennende Glättungseffekt erzeugt wird. Nach dieser Darstellung scheint in der Nähe der Resonanzfrequenz (f_o = 0,840 1/a) die im wesentlichen aus einem jahresperiodischen Anteil und der 1,19-jährigen CHANDLER-Bewegung zusammengesetzte Polbewegung nahezu vollständig durch atmosphärische Einflüsse gestützt zu werden.

Durch harmonische Analyse der atmosphärischen Erregerfunktion lässt sich nachweisen, dass sie im wesentlichen aus einem jahresperiodischen Anteil besteht, der über Jahrzehnte hinsichtlich Amplitude und Phase persistent ist und durch eine geradlinige Bewegung des Trägheitspoles dargestellt wird. Abb. 2 zeigt die Erregerfunktion und den durch sie hervorgerufenen elliptischen Bewegungsanteil der Polbewegung. Nach Abb. 1 sind neben dieser streng periodischen Erregung in

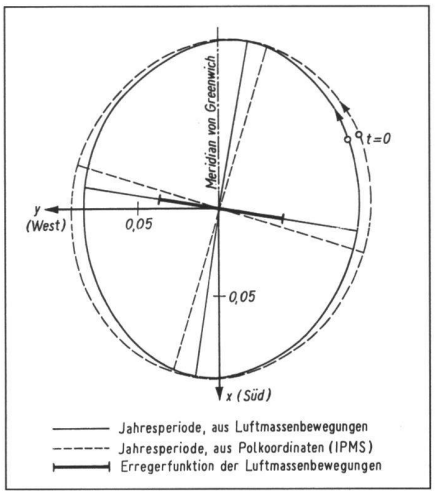

Abb. 2: Der atmosphärische Anteil der Polbewegung.

der atmosphärischen Erregerfunktion noch ausreichend stochastische Anteile enthalten, die die Stützung der Amplitude des freien Bewegungsanteils (CHANDLER-Bewegung) bewirken, die sonst infolge des gedämpften Prozesses der Polbewegung verschwunden sein müsste.
Die vollständige Stützung der Amplitude der CHANDLER-Bewegung konnte bei der Untersuchung 30jähriger Zeitreihen von Polbewegung und Erregerfunktion nicht nachgewiesen werden (siehe [4]). Möglicherweise ist die in [3] untersuchte Zeitreihe der Polbewegung zu kurz, um eine endgültige Aussage zu diesem Problem zu machen.

4.1.2 Ein Beispiel zur Anwendung der Eingangs-Ausgangs-Analyse

Wie Abb. 2 zeigt, besteht eine wohldefinierte Beziehung zwischen den astronomisch und meteorologisch bestimmten Jahresperioden der Polbewegung, so dass es naheliegend ist, diesen Bewegungsanteil zur Durchführung einer Eingangs-Ausgangs-Analyse zu verwenden.
Da diese Analyse sehr empfindlich gegen Fehler der Eingangs- und Ausgangsdaten ist, ist zu untersuchen, ob die atmosphärischen Massenbewegungen die einzigen wesentlichen Beiträge zur Jahresperiode der Erregerfunktion liefern, da anzunehmen ist, dass speziell diese Periode noch in anderen Prozessen enthalten ist, die in irgendeiner Form meteorologische Ursachen haben. Von allen in Betracht kommenden Prozessen liefert nur die jahreszeitliche Grundwasserschwankung einen wesentlichen Beitrag zur Jahresperiode der Erregerfunktion (siehe [13]).
Da bei den bekannten Verfahren der Fouriertransformation die Phasen der periodischen Anteile von Polbewegung und Erregerfunktion für den vorliegenden Anwendungszweck zu ungenau erhalten werden, empfiehlt es sich, durch eine Modifikation der Formel (46) den Einfluss der Phasenfehler zu eliminieren. Mit den konjugiert komplexen Ausdrücken m′ und ψ′ erhält man folgende Beziehung zur Bestimmung der Übertragungsfunktion:

$$|I^{-1}(f)|^2 = \frac{\psi(f,t)\,\psi'(f,t)}{m(f,t)\,m'(f,t)}\,, \qquad (58)$$

aus der man nach

$$T_0 = 1 + |I^{-1}(f)| = \frac{1}{f_0} \qquad (59)$$

die Länge der CHANDLER-Periode erhält.
Für Mittelwerte der Jahresperioden von Polbewegung und Erregerfunktion, die aus 30jährigen Zeitreihen abgeleitet wurden, ergab sich

$$T_0 = 1{,}189 \pm 0{,}002\ a\ .$$

Das Dämpfungsmass Q kann wegen der bereits erwähnten Phasenfehler auf diesem Wege nicht genau genug bestimmt werden. In [5] wird gezeigt, dass das Dämpfungsmass aus einem Vergleich der Energiespektren von Polbewegung und Erregerfunktion ermittelt werden kann.

4.1.3 Die atmosphärische Erregung der Tageslänge

Die atmosphärische Erregung der Tageslänge erfolgt im wesentlichen im Periodenbereich unter einem Jahr. Nach Gleichung (43) entspricht die Erregerfunktion praktisch der relativen Tageslänge, und es besteht keine frequenzabhängige Übertragung zwischen beiden Grössen.
In Abb. 3 wird die Erregerfunktion $\psi_3(t)$ mit der wegen des Gezeiteneinflusses korrigierten relativen Tageslänge verglichen. Die gute Übereinstimmung zwischen beiden Kurven spricht für sich. Im wesentlichen erzeugt die atmosphärische Erregung Jahresperioden und Halbjahresperioden der Tageslänge, die von einigen kürzeren Perioden überlagert sind.

4.2 Die Bestimmung globaler Meeresspiegelschwankungen durch inverse Lösung

Auf Grund der Berechnung von Amplitudenspektren der Polbewegung wurde die Existenz einer 4jährigen Periode festgestellt, für die die bereits erwähnte Beziehung

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0$$

erfüllt war, d.h. die Erregerfunktion wird durch eine geradlinige Bewegung des Trägheitspoles repräsentiert. Damit ist es gestattet, zur Lösung der inversen Aufgabe den Ansatz (53) mit der Voraussetzung (55) zu machen, wodurch nach 3.1 eine nordsüdliche Massenbewegung auf den Ozeanen modelliert wird. Mit diesem Ansatz wurden aus den ersten beiden Gleichungen (52) zwei Werte k berechnet, die hinreichend übereinstimmten.

$$D_0(\varphi,\lambda) = kF(\varphi,\lambda)$$

wurde in die dritte Integralgleichung von (52) eingesetzt, um zu überprüfen, ob das Amplitudenspektrum der Tageslänge mit der aus der Polbewegung folgenden Lösungsfunktion verträglich ist. Dieser Test bestätigte die Hypothese einer nordsüdlichen Meeresspiegelschwankung.
Ein Beweis dieser Hypothese ist jedoch erst erbracht, wenn die aus der Polbewegung abgeleiteten Meeresspiegelschwankungen hinsichtlich Amplitude und Periode mit den aus Pegelbeobachtungen erhaltenen übereinstimmen. In Tabelle 2 sind die aus den Variationen des Rotationsvektors und aus Pegelbeobachtungen gewonnenen Ergebnisse zusammengestellt.
Die unterschiedlichen Ergebnisse Δh_n und Δh_s für die Nord- und Südhalbkugel folgen aus dem Gesetz der Massenerhaltung, da die Wasserflächen beider Halbkugeln unterschiedlich sind. Von den dargestellten Ergebnissen aus Pegelbeobachtungen sind die an der Westküste Amerikas die zuverlässigsten, da sie an der Grenze der grössten freien Meeresfläche liegen. Jeder Wert ist aus den Beobachtungen einer grösseren Anzahl von Pegelstationen ermittelt worden. Unter Berücksichtigung der angegebenen Standardabweichungen erkennt man eine hinreichende Übereinstimmung zwischen den aus Pegelbeobachtungen und den aus Variationen des Rotationsvektors abgeleiteten Meeresspiegelschwankungen.

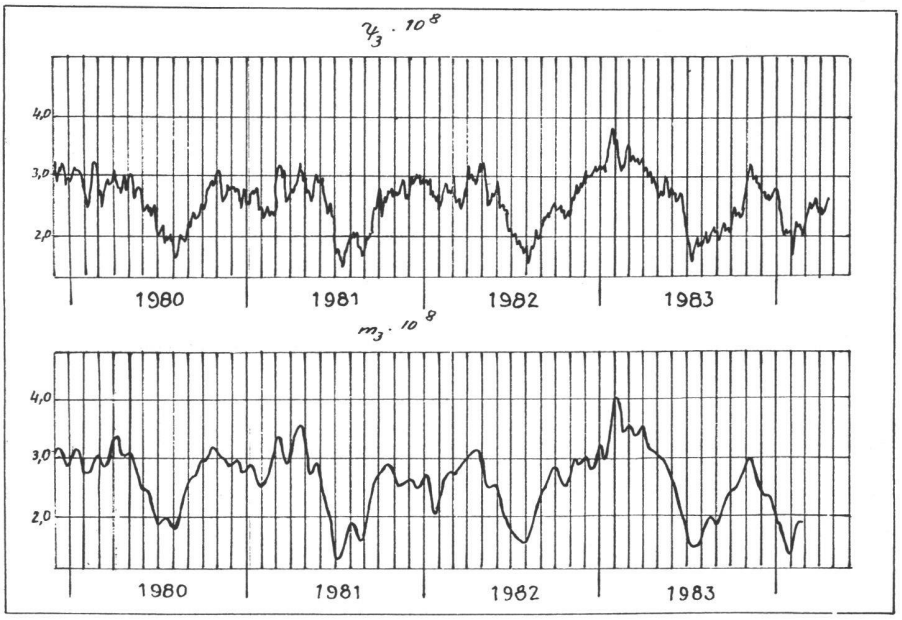

Abb. 3: Relative Tageslängen und atmosphärische Erregerfunktion nach Hide [3].

Herkunft der Resultate	Δ h /cm/	Periode /a/
Variationen des Rotationsvektors	$\Delta h_n = 2{,}0 \pm 0{,}5$ $\Delta h_s = 1{,}6 \pm 0{,}5$	$4{,}0 \pm 0{,}2$
Pegelbeobachtungen		
1. Westküste Nordamerika	$1{,}6 \pm 0{,}6$	$5{,}2 \pm 0{,}5$
2. Westküste Mittel- und Südamerika	$1{,}1 \pm 0{,}8$	$5{,}0 \pm 0{,}8$
3. Ostküste Amerika	$0{,}7 \pm 0{,}6$	$4{,}8 \pm 0{,}9$

Tab. 2: Meeresspiegelschwankungen mit 4–5-jähriger Periode

An den übrigen Küsten, die in vorstehender Tabelle nicht aufgenommen wurden, stimmen die erhaltenen Meeresspiegelschwankungen nicht so gut mit den angegebenen Werten überein, jedoch sind dort die Ergebnisse durch vorgelagerte Inseln und unregelmässige Küstenform gestört. Durch die vorstehend beschriebene inverse Lösung konnten regional beobachtete Meeresspiegelschwankungen als globale identifiziert werden.

4.3 Die Ermittlung von Kopplungsmomenten des toroidalen geomagnetischen Feldes

Nachem die bisherigen Betrachtungen im wesentlichen Problemen gewidmet waren, die mit Mitteln der klassischen Mechanik und der Hydromechanik zu lösen sind, sollen einige Ausführungen zu Beziehungen zwischen dem Magnetfeld der Erde und der Erdrotation gemacht werden. Die Ursache dekadischer Fluktuationen der Erdrotation wird Variationen des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze zugeschrieben, die im leitfähigen Teil des unteren Mantels Lorentzkräfte erzeugen, die die Ursache elektromagnetischer Kopplungsmomente zwischen Kern und Mantel sind, die nach (13) und (14) die Polbewegung und die relative Tageslänge beeinflussen. Diese Kopplungsmomente ergeben sich nach der Formel

$$\mathbf{L} = \int_M \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\, dV \quad . \tag{60}$$

In (60) sind **B** die magnetische Flussdichte und **j** die Stromdichte im leitfähigen Mantel. **B** und **j** können aus dem geomagnetischen Oberflächenfeld mit Hilfe der Induktionsgleichung

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right) = -\dot{\mathbf{B}} \quad , \tag{61}$$

des Ohmschen Gesetzes

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{62}$$

und der Beziehung

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \tag{63}$$

abgeleitet werden. In vorstehenden Gleichungen ist **E** die elektrische Feldstärke und **u** die Relativgeschwindigkeit des leitfähigen Kernmantels gegenüber dem Mantel.
μ ist die Permeabilität und σ die Leitfähigkeit. Zur Lösung der Induktionsgleichung benötigt man eine Beziehung zur Darstellung der Leitfähigkeit im Erdmantel. Nach [13] wird im allgemeinen hierfür folgende Beziehung angesetzt

$$\sigma(r) = \sigma_c \left(\frac{r}{c}\right)^{-\alpha} \quad , \tag{64}$$

worin c der Radius des Erdkerns ist und $\sigma_c = 3 \cdot 10^3 \Omega^{-1} m^{-1}$ die Leitfähigkeit an der Kern-Mantel-Grenze. Ferner wird in der Regel $\alpha = 30$ gewählt. Die schrittweise Lösung der Induktionsgleichung ist im einzelnen in [2] und [13] dargestellt. Anfangswerte der Lösung sind die Kugelfunktionsentwicklungen des geomagnetischen Oberflächenfeldes und seiner Säkularvariation. Nachdem die Werte **B** und **j** berechnet worden sind, können nach (60) die zeitlich variablen Kopplungsmomente berechnet werden, die in die Differentialgleichungen (13) und (14) eingeführt werden müssen.
Aus den bisher durchgeführten Untersuchungen zu diesem Problem geht hervor, dass nur die Variation der Tageslänge von elektromagnetischen Kern-Mantel-Kopplungsmomenten messbar beeinflusst wird. Bei der Interpretation der Ergebnisse dieses Erregermechanismus muss man berücksichtigen, dass nach der Dynamotheorie des Magnetfeldes der Erde nur das poloidale Kernfeld an der Erdoberfläche wirksam wird, wodurch nur dessen Beitrag zum elektromagnetischen Kopplungsmoment berechnet werden kann. In der Variation der Tageslänge sind jedoch die Einflüsse des poloidalen und des toroidalen Kernfeldes enthalten. Deshalb muss es möglich sein, Kenntnis über das vom toroidalen Feld erzeugte Kopplungsmoment durch Anwendung der inversen Lösung zu erhalten.
Auf Grund der durch die Formeln (60)–(64) in groben Zügen dargestellten Berechnungsmethode erhält man nach (60) die durch das poloidale Feld hervorgerufenen Kopplungsmomente L_{p3}. In [7] wird nachgewiesen, dass das poloidale Kopplungsmoment die Relativbewegung zwischen Kern und Mantel verzögert.
Man kann daher den Kopplungsfaktor

$$k = 1{,}46 \cdot 10^{24}\ \mathrm{Nm}$$

berechnen, der mit n_3 multipliziert das bei relativer Rotation zwischen Kern und Mantel entstehende verzögernde Kopplungsmoment ergibt. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass die Relativbewegung zwischen Kern und Mantel mit der Relativbewegung zwischen Mantel und poloidalem magnetischen Feld übereinstimmt. Diese Bedingung ist nach der Magnetohydrodynamik erfüllt, wenn der Kern eine sehr hohe Leitfähigkeit hat (frozen-field theory), was nach den bisherigen Erkenntnissen zutrifft. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich nach (14) folgende Beziehung:

$$\dot{m}_3 + \frac{C_c}{C}\dot{n}_3 = 0$$

$$\dot{m}_3 + \dot{n}_3 = -\frac{kn_3}{C_c\omega_0} + \frac{L_3^c}{C_c\omega_0} \quad , \tag{65}$$

worin L_3^c der vom toroidalen Feld erzeugte Anteil des elektromagnetischen Kopplungsmomentes ist.
Aus (65) ergibt sich nach Elimination von $\dot{n}_3$

$$C_M\,\omega_0\,\dot{m}_3 = kn_3 - L_3^c \quad . \tag{66}$$

Um Unsicherheiten auszuschalten, die sich aus der Gleichsetzung der Relativbewegungen von Mantel und Kern und Mantel und poloidalem Magnetfeld ergeben, setzen wir

$$kn_3 - L_3^c = L_p + L_{tor}$$

und erhalten aus (66)

$$C_M\omega_0\dot{m}_3 - L_p = C_M\omega_0\Delta\dot{m}_3 = L_{tor} \quad . \tag{67}$$

Aus einer Fouriertransformation von

$$\Delta m_3 = m_3 - \frac{1}{C_M\omega_0}\int_{t_0}^{t} L_p(\tau)\, d\tau \tag{68}$$

ergeben sich für verschiedene periodische Anteile die Amplituden Δm_T, mit denen man nach

$$L_{T_{tor}} = \frac{2\pi}{T} C_M\omega_0\Delta m_T \tag{69}$$

den entsprechenden periodischen Anteil des toroidalen elektromagnetischen Kopp-

lungsmomentes berechnen kann. In vorstehenden Formeln ist T die Länge der Periode.
Nach dem dargestellten Verfahren konnte für eine 30jährige Periode der Rotationsschwankung durch Vergleich mit dem entsprechenden poloidalen Moment L_p folgende Amplitude des toroidalen Momentes ermittelt werden:

$$L_T = 4 \cdot 10^{17} \text{ Nm} \quad .$$

5. Die Bedeutung der Erforschung der Wechselwirkung zwischen geophysikalischen Prozessen und der Rotation der Erde

Vorstehende Ausführungen zeigten, dass die Variationen von Tageslänge und Polbewegung als Hilfsmittel zur Erforschung globaler geophysikalischer Prozesse dienen können. Die im Überblick dargestellte Theorie lässt sich auf verschiedene Lösungsvarianten anwenden. Eine erfolgreiche Anwendung der direkten Lösung wurde für die atmosphärische Erregung von Polbewegung und Tageslänge nachgewiesen. Mit Hilfe der gut bekannten Jahresperioden von Polbewegung und atmosphärischer Erregerfunktion ist es möglich, die Parameter der Differentialgleichung der Polbewegung zu bestimmen, die in Beziehung zum inneren Aufbau der Erde und ihrer Rheologie stehen.
Die inverse Lösung kann zur Untersuchung globaler Eigenschaften geophysikalischer Prozesse verwendet werden, wenn über den Prozess nur sporadisch über die Erde verteilte Informationen vorliegen, wie am Beispiel globaler Meeresspiegelschwankungen gezeigt wurde.
Die Bedeutung der Untersuchung des Rotationsverhaltens der Erde für die Erforschung globaler geophysikalischer Prozesse geht aus diesen Beispielen hervor. Die durch die Entwicklung moderner kosmisch-geodätischer Verfahren erzielte Genauigkeitssteigerung in der Bestimmung der Polkoordinaten und der Tageslänge wird die Bedeutung der dargestellten Verfahren für die Erforschung globaler geophysikalischer Prozesse in Zukunft noch steigern, so dass es angezeigt ist, sich auch in Zukunft mit der Theorie der Erdrotation und ihrer Beziehung zu geophysikalischen Prozessen zu befassen.

Literatur:

[1] Barnes, R.; Hide, R.; White, A.; Wilson, C.: Atmospheric angular momentum fluctuations correlated with length of day changes and polar motion. Proc. R. Soc. London, Ser. A387, No. 1792, 1983, S. 31–73.

[2] Greiner-Mai, H.: The influence of the electromagnetic coremantle coupling torques on Earth's rotation. Astr. Nachr. 308 (1987) 3, S. 217–226.

[3] Hide, R.: Update from European center analysis. IUGG/IAG S.S.G 5.98 Bulletin No.1 (1984) S. 13–18.

[4] Jochmann, H.: Der Einfluss von Luftmassenbewegungen in der Atmosphäre auf die Polbewegung. Veröff. Zentralinst. f. Physik der Erde Nr. 35, Potsdam 1976.

[5] Jochmann, H.: Die Analyse der Polbewegung mit Hilfe meteorologischer Erregerfunktionen. Veröff. Zentralinst. f. Physik der Erde Nr. 67, Potsdam 1981.

[6] Jochmann, H.: The detection of global sea level changes by inverse solution of the equations of variations of the vector of rotation. Gerlands Beitr. Geophysik 96 (1987) 3/4 S. 222–229.

[7] Kautzleben, H.; Greiner-Mai, H.; Jochmann, H.: An interpretation of the 30 years period in fluctuations of the geomagnetic field. Pres. paper IUGG-General Assembly, Vancouver 1987.

[8] Lambeck, K.: The Earth's variable rotation. Cambridge Univ. Press 1980.

[9] Moritz, H.: Theory of nutation and polar motion. Ohio State Univ. Reports of the Dept. of Geod. Sciences. Rep. No. 309 (1980), 318 (1981), 342 (1982).

[10] Munk, W.; MacDonald, G.: The rotation of the Earth. Cambridge Univ. Press. 1960.

[11] Poincaré, H.: Sur la précession des corps déformables. Bull. Astron 27 (1910) S. 312–356.

[12] Rochester, M.G.: Core mantle interactions: Geophysical and astronomical consequences. In Mansinha, Smylie an Beck (Hrsg.): Earthquake displacement fields and the rotation of the Earth. D. Reidel, Dordrecht 1970.

[13] Stix, M.; Roberts, P.H.: Time dependent electromagnetic core mantle coupling. Phys. of the Earth and Planetary Interiors, 36 (1984) S. 49–60.

Mitteilungen des Zentralinstituts für Physik der Erde Nr. 1650.

Adresse des Verfassers:
Dr.-Ing. habil Horst Jochmann
Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für Physik der Erde
Telegrafenberg, DDR-1561 Potsdam