Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 86 (1988)

Heft: 1

Artikel: Projektive Behandlung dreidimensionaler Netze der geometrischen Geodäsie

Autor: Gerber, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233742

Projektive Behandlung dreidimensionaler Netze der geometrischen Geodäsie

P. Gerber

Mit den globalen Punktbestimmungen durch Satelliten wird in naher Zukunft auch der lokale Bereich berührt. Die nachstehenden Ausführungen formulieren bestehende Zusammenhänge und bezwecken die gemeinsame Berechnung und Ausgleichung geometrischer Messdaten in einem örtlichen Projektionssystem. Die Rückführung ins globale System bleibt durch eindeutige Umkehrbarkeit gewahrt.

Les déterminations de points géodésiques par satellites toucheront le plan local dans un avenir proche. Ce traité fixe les relations mathématiques permettant le calcul et la compensation de toute mesure au caractère géométrique dans un système de projection cartésien. L'inversion aux systèmes géocentriques est assurée par réversibilité acquise.

1. Transformationen geozentrischer Koordinaten unter Einhaltung der Kongruenz

Im geozentrischen Erdsystem gelten folgende Konventionen:

- pos. X-Achse:
  Geozentrum – Meridian-Aequatorschnitt S-Greenwich
- pos. Y-Achse:
  Geozentrum – (90° E) Meridian-Aequatorschnitt
- pos. Z-Achse:
  Geozentrum – Nordpol (Abb. 1).

Geht man der Form halber zunächst davon aus, dass diese Koordinaten allenfalls durch translative Drehstreckung auf ein bereits vorgegebenes geodätisches Datum transformiert wurden, bestehen bekanntlich die Beziehungen

$$\begin{aligned} X &= (R+h)\cos L\cos B \\ Y &= (R+h)\sin L\cos B \\ Z &= (R+h)\sin B - R\,e^2\sin B \end{aligned} \tag{1}$$

Mit der grossen Halbachse a, der kleinen Halbachse c und für

$e^2 = (a^2 - c^2)\cdot a^{-2}$,

$e'^2 = (a^2 - c^2)\cdot c^{-2}$,

$p = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ sowie

$$\Theta = \operatorname{arctg}\frac{Z\cdot a}{p\cdot c}$$

ergibt sich die Umkehrung als

ellipsoidische Breite:

$$B = \operatorname{arctg}\frac{Z + (e')^2\cdot c\cdot\sin^3\Theta}{p - (e)^2\cdot a\cdot\cos^3\Theta}$$

ellipsoidische Länge:

$$L = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}$$

Normalenradius im 1. Vertikal: (2)

$$R = a\,(1 - e^2\sin^2 B)^{-1/2}$$

Höhe über dem Ellipsoid:

$$h = \frac{(X^2 + Y^2)^{1/2}}{\cos B} - R$$

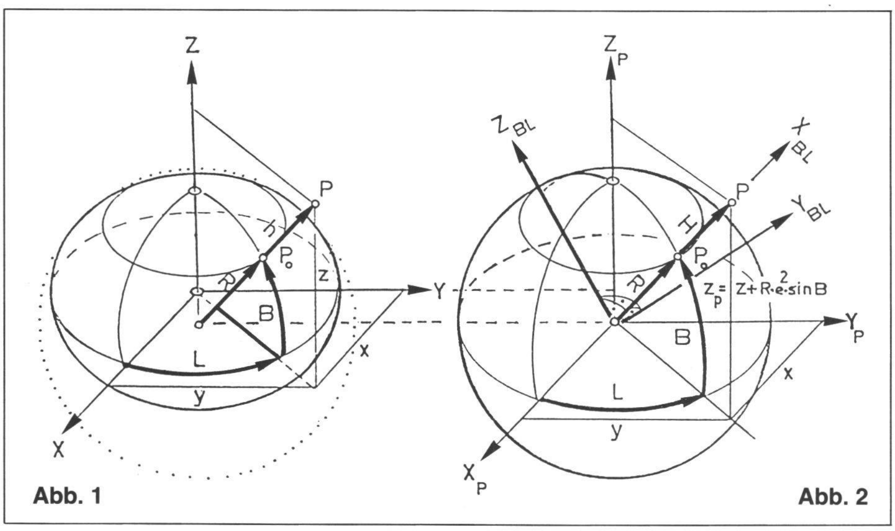

Abb. 1: Ellipsoid im globalen Erdsystem – (X, Y, Z) mit Berührungskugel (punktiert) im Parallel B

Abb. 2: Berührungskugel nach «Cassini-Soldner»: R = R_P, im parallel verschobenen Erdsystem – (X_P, Y_P, Z_P) und im gedrehten Horizontsystem – (X_{BL}, Y_{BL}, Z_{BL})

1.1 Translation auf das Kugelzentrum des Normalenradius

Wird im Projektionsursprung P_o (B, L, R) zur polaren Berechnung eine Kugel mit dem Normalenradius gemäss (2) angenommen, die das Ellipsoid längs B = konst. berührt, folgt eine Translation des Erdsystems entlang der Polachse Z, so dass

$$\begin{aligned} X_P &= X & X &= X_P \\ Y_P &= Y \quad , & Y &= Y_P \\ Z_P &= Z + R\,e^2\sin B & Z &= Z_P - R\,e^2\sin B \end{aligned} \tag{3}$$

(Beim Übergang auf Kugelkoordinaten ist zu beachten, dass B, R und H lediglich im Berührungskreis den ellipsoidischen Elementen entsprechen und dass die Kugelhöhen: $H = (X^2 + Y^2 + Z^2_{\ p})^{1/2} - R$ nur vom Kugelzentrum und dem Festradius R abhängen.)

Die Achsen bleiben parallel, die Aequatorebene X_P, Y_P ist um $R\,e^2\sin B$ versetzt (Abb. 1, 2).

1.2 Rotationen in den Horizont mit Anschmiegung

Die Transformation geozentrischer Erdkoordinaten in den Projektionshorizont P_o (B, L, R) ergibt sich als Rotation von X_P nach L um Z und um Y_{BL} mit B nach P_o (Abb. 2).

$$\begin{vmatrix} X_{BL} \\ Y_{BL} \\ Z_{BL} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos B & \cdot & \sin B \\ \cdot & 1 & \cdot \\ -\sin B & \cdot & \cos B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos L, & \sin L & \cdot \\ -\sin L, & \cos L & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z_P \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos B\cos L, & \cos B\sin L, & \sin B \\ -\sin L & , \cos L & , \cdot \\ -\sin B\cos L, & -\sin B\sin L, & \cos B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z_P \end{vmatrix} \tag{4}$$

und die Umkehrung wegen Orthogonalität durch Transponierung

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos B\cos L, & -\sin L, & -\sin B\cos L \\ \cos B\sin L, & \cos L, & -\sin B\sin L \\ \sin B & , \cdot & , \cos B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{BL} \\ Y_{BL} \\ Z_{BL} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Ist

dh Geoidundulation in P_o,

$R_P = R + dh - dx$ der lokalen Krümmung angepasste Projektionsradius und

$dx = R - R_P + dh$ die Verschiebung seines Angriffs in Richtung P_o,

folgen ferner die Translationen:

$X_{BLr} = X_{BL} - dx$ bezüglich (4) und

$X_{BL} = X_{BLr} + dx$ bezüglich (5).

Wenn R gemäss (2) und

$$M = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\ \sin^2 B)^{3/2}}$$

als Meridiankrümmungsradius gesetzt wird, dann gilt für den Radius der Gauss'schen Schmiegung:

$$R_P = \sqrt{MR}, \qquad dx = R - R_P.$$

Bei sehr langen Anlagen in Richtung α empfiehlt sich der Krümmungsangleich nach Euler:

$$R_P = \left(\frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{R}\right)^{-1}, \qquad dx = R - R_P.$$

Sind jedoch genügend orthometrische Höhen H_o bekannt, dann liefert die Bedingung:

v^TPv = Minimum mit den horizontbezogenen Fehlergleichungen

$$v_i = X_i(R_o+H_i)^{-1} \cdot dx - dh + (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)^{1/2} - R_o - H_{oi}$$

eine Annäherung des geometrischen Systems an die physikalischen Gegebenheiten, bei grösseren Operaten durch Minimalisierung der Geoidundulationen.

Bei $dh \neq 0$ resultiert eine Horizontversetzung.

Mit $dx = R - R_P + dh$ folgen aus (4) und (3) unter Einhaltung der Kongruenz die **direkten Transformationen in den Horizont P_o (B, L, R)**

$$\begin{aligned} X_{BLr} &= X \cos B \cos L + Y \cos B \sin L + (Z + R\,e^2 \sin B) \sin B - dx \\ Y_{BL} &= -X \sin L \qquad + Y \cos L \\ Z_{BL} &= -X \sin B \cos L - Y \sin B \sin L + (Z + R\,e^2 \sin B) \cos B \end{aligned} \tag{6}$$

Für deren Umkehrung aus (5) und (3) gilt entsprechend

$$\begin{aligned} X &= (X_{BLr} + dx) \cos B \cos L - Y_{BL} \sin L \quad - Z_{BL} \sin B \cos L \\ Y &= (X_{BLr} + dx) \cos B \sin L + Y_{BL} \cos L \quad - Z_{BL} \sin B \sin L \\ Z &= (X_{BLr} + dx) \sin B - R\,e^2 \sin B + Z_{BL} \cos B \end{aligned} \tag{7}$$

Im horizontbezogenen System liegen die pos. X_{BLr}-Achse:
Kugelzentrum – Projektionsursprung

pos. Y_{BL}-Achse:
Kugelzentrum – L + 90° parallel zum Aequator

pos. Z_{BL}-Achse:
Kugelzentrum – B + 90° im Meridian mit X_{BLr} (Abb. 2, 3).

1.3 Übergang auf projektionsbezogene Kugelkoordinaten

Bildet im Horizontsystem X_{BLr}, Y_{BL} die Pseudoäquatorebene und spannen Z_{BL}, X_{BL} die Ebene des Nullmeridians auf, gehen in Analogie zum geographischen Erdsystem aus

$$\begin{aligned} X_{BLr} &= (R_P + H) \cos b \cos l \\ Y_{BL} &= (R_P + H) \cos b \sin l \\ Z_{BL} &= (R_P + H) \sin b \end{aligned} \tag{8}$$

die Pseudolänge:

$$l = \text{arctg} \frac{Y_{BL}}{X_{BLr}}$$

die Pseudobreite:

$$b = \text{arctg} \frac{Z_{BL} \cdot \cos l}{X_{BLr}} \qquad \text{arctg} \frac{Z_{BL}}{(X^2_{BLr} + Y^2_{BL})^{1/2}} \tag{9}$$

und **die Kugelhöhe:**

$$H = (X^2_{BLr} + Y^2_{BL} + Z^2_{BL})^{1/2} - R_P = \frac{X_{BLr}}{\cos b \cos l} - R_P$$

als Kugelkoordinaten hervor. Dabei sei festgehalten, dass einzig der Nullmeridian die Erdpolachse enthält, während alle anderen Pseudomeridiane die Nordweisung verlieren. Die Elemente l, b, H, R_P stehen nur über (8) und (7) mit dem globalen Erdsystem und nur über (8), (7) und (2) mit dem Ellipsoid in Beziehung. Für $R_P \neq R$ wird das Ellipsoid nur noch in P_o berührt und mit $dh \neq 0$ höchstens noch geschnitten.

Damit wären die kongruenten Zusammenhänge zur Einführung lokaler und topozentrischer, rechtwinkliger Projektionskoordinaten gegeben. Dabei wurde die Kugel nicht nur der Einfachheit halber, sondern aus Konsequenz anderen Bezugsflächen vorgezogen.

2. Konforme Raumprojektion mit Mercatorebene

Im topozentrisch gelagerten Projektionssystem mit Ursprung in P_o liegen die Achsen parallel zum Horizontsystem, wobei die Umbenennung von X und Z geodätischer Konvention entspricht (Abb. 3).
Es gilt für die positiven Achsen

x: P_o – im Horizont, Richtung Erdachse
y: P_o – im Horizont, 90° E
z: P_o – Zenit

Dabei ist zu beachten, dass Parallelen zu x für $y \neq 0$ nicht im Meridian liegen und dass die Y-Achse den ellipsoidischen Parallelkreis in P_o lediglich tangiert.
Im folgenden wird der Radius R_P nicht mehr indiziert.
Eine konforme Abbildung des Raumes ergibt sich im topozentrischen System x y z, wenn der Grundriss winkeltreu ist und die Kugelnormalen darauf senkrecht stehen. Ist x, y eine Mercatorebene und werden die Kugelschalen R + H = konstant durch Integration über den ganzen Bereich reduziert, folgt

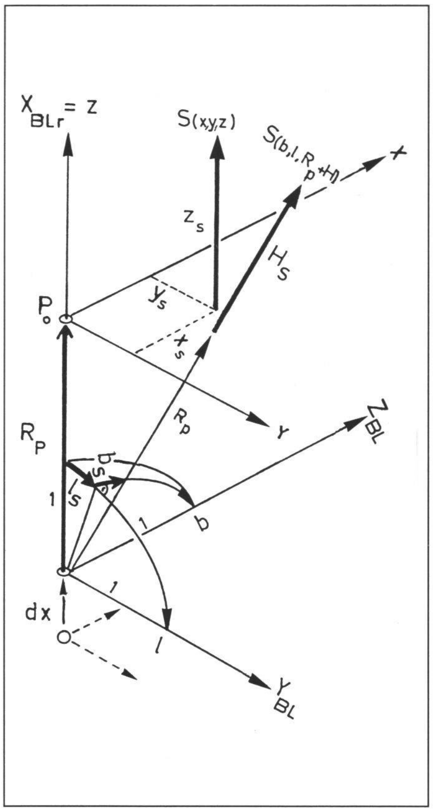

Abb. 3: Topozentrisches Projektionssystem – (x, y, z) im Horizontsystem – (X_{BLr}, Y_{BL}, Z_{BL}): $R_P = R + dh - dx$, mit projektionsbezogenen Kugelkoordinaten – (b, l, R_P + H)

resultiert die Umkehrung.
Für eine transversale Mercator-Projektion mit streckentreuer Abbildung entlang des Meridians, sind in (8) die Ausdrücke für Y und Z, in (9) Y mit Z, in (10) und (11) x mit y zu vertauschen.
Während die Konformität der Mercatorebene hinreichend bekannt ist, geht sie im Raum aus der nachstehenden Abb. 4 unmittelbar hervor.

$$\begin{aligned} x &= R\int_o^b \frac{1}{\cos b}\, db = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \sin b}{1 - \sin b} = R \cdot b \left(1 + \frac{b^2}{6} + \frac{b^4}{24} + \ldots\right) \\ y &= R\int_o^l dl = R \cdot l \\ z &= R\int_o^H \frac{1}{R+H}\, dH = R \ln \frac{R+H}{R} = H - \frac{H^2}{2R} + \frac{H^3}{3R^2} - \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

wobei die Reihenentwicklungen der Einhaltung numerischer Rechenschärfe dienen. Aus den inversen Funktionen

$$\begin{aligned} b &= \arcsin \frac{e^{2xR^{-1}} - 1}{e^{2xR^{-1}} + 1} \\ &= x R^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{6R^2} + \frac{x^4}{24R^4} - \ldots\right) \\ l &= y R^{-1} \\ H &= R\, e^{z R^{-1}} - R = z + \frac{z^2}{2R} + \frac{z^3}{6R^2} + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Sektoriell gekrümmte Abschnitte des polaren Systems werden im projektiven Raum als Rechtecke abgebildet. Diese Erweiterung auf die dritte Dimension ist mit obigen Reduktionen der Vertikalen auch auf andere Projektionen der Kugel anwendbar.
Die elementaren Reduktionen gemessener Richtungen, Winkel, Distanzen, Koordinatendifferenzen – mit ihren Umkehrungen – wurden unter Anlehnung an [2] in [1] hergeleitet, und die Reduktion geozentrischer Satellitenbestimmungen sind mit (6), (9) und (10) gegeben.

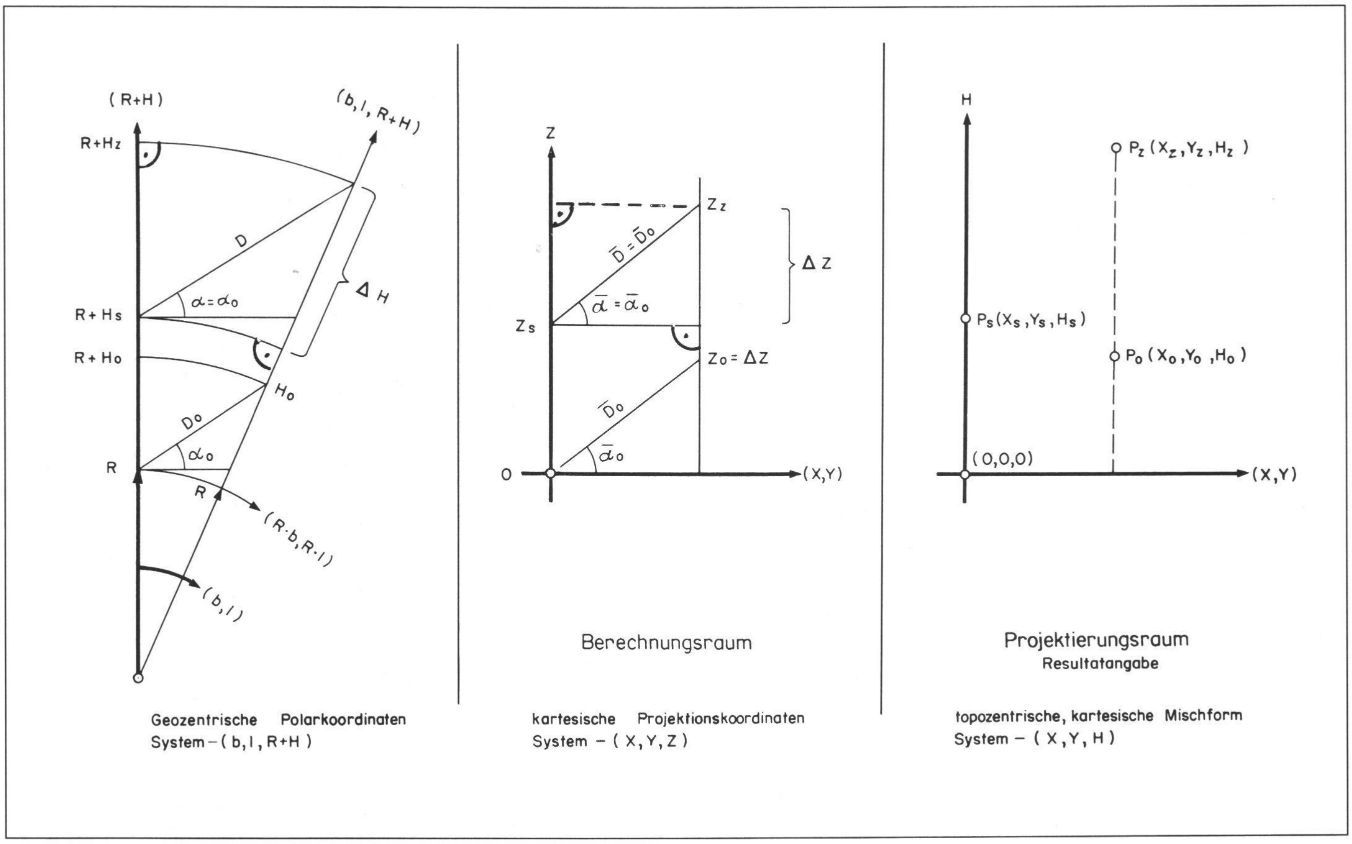

Abb. 4: Koordinatensysteme im Aufriss

3. Beobachtungssysteme und Fehlergleichungen

Wird in einer Netzberechnung für jede Station S zu den Zielen Z ein eigenes System $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ angenommen, dessen Achsen durch das Schwerefeld und die Nordrichtung genähert orientiert wurden (Abb. 5), gestattet der projektive Raum den nachstehenden Übergang auf elementare kartesische Behandlung. Durch Berücksichtigung jeweiliger Orientierungs- und Dehnungsparameter entfällt die eingangs und nur der Form halber erwähnte affine Transformation geozentrisch bezogener Bestimmungen auf ein vorgegebenes geodätisches Datum, wenn für Satellitenortungen **Koordinatendifferenzen** in Rechnung stehen, (s. Tabelle).

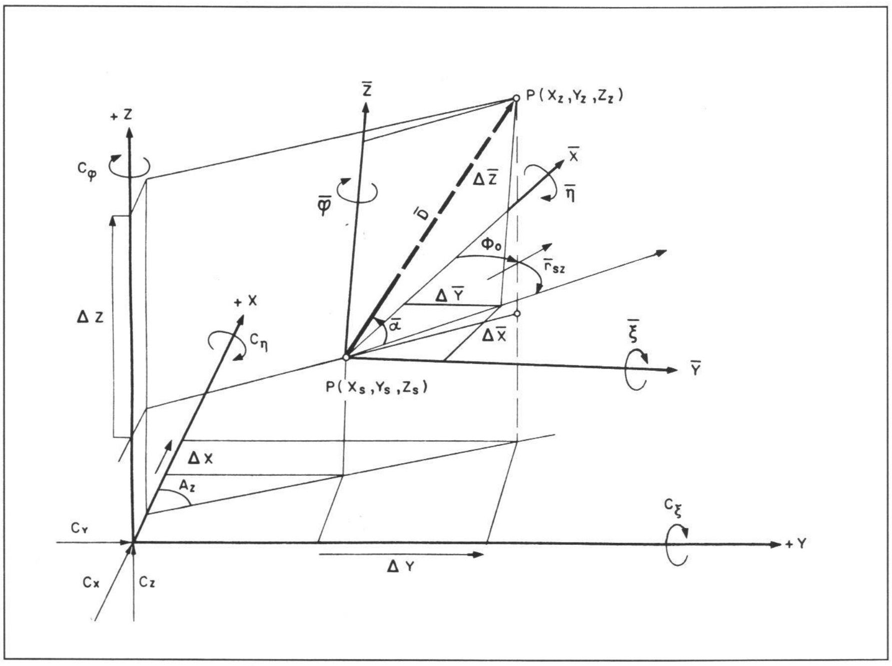

Abb. 5: Orthogonales Messystem – ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) der Station S zum Ziel Z im kartesischen Projektionsraum – (x, y, z)

4. Einschränkung und Kritik des projektiven Vorgehens

4.1 Beschränkungen wegen Verzerrungen

Setzt man die Gewähr für Verbesserungen ausgeglichener Messdaten mit 3 Stellen bewusst höher an als erforderlich, dann schränken die Projektionsgleichungen (10) und (11) die Anwendbarkeit mit $6 \cdot 10^{-4}$ wegen veränderter Geometrie in $\dot{X}$ auf ± 220 km und in H auf 8000 m.ü.M ein.

4.2 Höhenklaffung infolge veränderter Bezugsfläche

In den Randzonen betragen die Unterschiede zum Ellipsoidhorizont:
bei Gauss'scher Schmiegung

Operatsausdehnung:	Klaffung:
100 km x 100 km	0.3 m
200 km x 200 km	1.3 m
400 km x 400 km	5 m

bei Krümmungsangleich nach Euler

Operatsausdehnung:	Klaffung:
300 km x 50 km	0.165 m
500 km x 100 km	0.7 m
800 km x 200 km	2.6 m

wobei der Projektionsursprung im Zentrum vorausgesetzt wurde. Diese Betrach-

Partie rédactionnelle

TABELLE : Koeffizienten vollständiger Fehlergleichungssysteme im kartesischen Projektionsraum

Bildvektor X^T =	x_Z	y_Z	z_Z	x_S	y_S	z_S	η_Z	ξ_Z	φ_Z	η_S	ξ_S	φ_S	$\bar{\eta}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\varphi}$	m_D	$\bar{m}$
$F(X_0)$:	für Horizontalrichtungen : $\bar{r}_{SZ}$																
$k \cdot \operatorname{arctg} \frac{\Delta Y_0}{\Delta X_0} - \Phi_0$	$-k\frac{\Delta Y}{L^2}$	$k\frac{\Delta X}{L^2}$	·	$k\frac{\Delta Y}{L^2}$	$-k\frac{\Delta X}{L^2}$	·	·	·	·	$\boxed{\frac{\Delta X \cdot \Delta Z}{L^2}}$	$\boxed{\frac{\Delta Y \cdot \Delta Z}{L^2}}$	−1	·	·	·	·	·
	für Höhenwinkel : $\bar{\alpha}_{SZ}$																
$k \cdot \operatorname{arctg} \frac{\Delta Z_0^*}{\sqrt{\Delta X_0^2 \; \Delta Y_0^2}}$	$\boxed{-k\frac{\Delta X \Delta Z}{L \cdot D^2}}$	$\boxed{-k\frac{\Delta Y \Delta Z}{L \cdot D^2}}$	$k\frac{L}{D^2}$	$\boxed{k\frac{\Delta X \Delta Z}{L \cdot D^2}}$	$\boxed{k\frac{\Delta Y \Delta Z}{L \cdot D^2}}$	$-k\frac{L}{D^2}$	·	·	·	$\frac{\Delta Y}{L}$	$\frac{\Delta X}{L}$	·	·	·	·	·	·
	für Projektionsdistanzen : $\bar{D}_{SZ}$																
$\sqrt{\Delta X_0^2 + \Delta Y_0^2 + \Delta Z_0^{2*}}$	$\frac{\Delta X}{D}$	$\frac{\Delta Y}{D}$	$\boxed{\frac{\Delta Z}{D}}$	$-\frac{\Delta X}{D}$	$-\frac{\Delta Y}{D}$	$\boxed{-\frac{\Delta Z}{D}}$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$-b^{-1} \cdot D$	·
	für Koordinatendifferenzen von S nach Z : $\overline{\Delta X}$, $\overline{\Delta Y}$, $\overline{\Delta Z}$																
$\Delta X_0 = X_{0Z} - X_{0S}$	1	·	·	−1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	$\boxed{-k^{-1}\Delta Z}$	$k^{-1}\Delta Y$	·	$-b^{-1}\Delta X$
$\Delta Y_0 = Y_{0Z} - Y_{0S}$	·	1	·	·	−1	·	·	·	·	·	·	·	$\boxed{-k^{-1}\Delta Z}$	·	$-k^{-1}\Delta X$	·	$-b^{-1}\Delta Y$
$\Delta Z_0 = Z_{0Z} - Z_{0S}$	·	·	1	·	·	−1	·	·	·	·	·	·	$k^{-1}\Delta Y$	$k^{-1}\Delta X$	·	·	$\boxed{-b^{-1}\Delta Z}$
	für Lotorientierungsdifferenzen : $\Delta\eta$, $\Delta\xi$, $\Delta_{(\eta,\xi)}$ in Richtung SZ																
$\Delta\eta_0 = \eta_{0Z} - \eta_{0S} = 0$	·	·	·	·	·	·	1	·	·	−1	·	·	·	·	·	·	·
$\Delta\xi_0 = \xi_{0Z} - \xi_{0S} = 0$	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	−1	·	·	·	·	·	·
$\Delta_{(\eta,\xi)_0} = 0$	·	·	·	·	·	·	$-\frac{\Delta Y}{L}$	$-\frac{\Delta X}{L}$	·	$\frac{\Delta Y}{L}$	$\frac{\Delta X}{L}$	·	·	·	·	·	·
	für Orientierungsunterschiede : $\Delta\varphi$																
$\Delta\varphi_0 = \varphi_{0Z} - \varphi_{0S} = 0$	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	−1	·	·	·	·	·
	für Massstabsdifferenzen : Δm																
$\Delta m = m_D - \bar{m} = 0$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	−1

Darin bedeutet : $D = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$, $L = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$, b: Bezugseinheit, k: Winkelmasskonstante, $\Delta Z_0^* = Z_{0Z} - Z_{0S} + \imath_Z - \imath_S$ (sofern unterschiedliche Signal-u. Instrumentenhöhen $\imath_Z$, $\imath_S$ zu berücksichtigen sind).

Stark umrandete Koeffizienten verschwinden bei flachen Netzen wegen $\Delta Z = 0$

tung ist jedoch relativ und als Beschränkung von untergeordneter Bedeutung; denn ellipsoidische Höhen sind ebenfalls geometrischer Art, wobei Geoidundulationen im 10 m-Bereich hingenommen werden müssen.

4.3 Vorteile bezüglich den globalen Ansätzen

Bei Operaten innerhalb 200–300 km vom Projektionszentrum bietet die projektive Behandlung jedoch wesentliche und entscheidende Vorzüge:

- Gerechnet wird in einem generalisierten Horizontsystem. Der Grundriss entspricht einer Landkarte im Massstab 1:1. Die kartesische Berechnung wie die Resultatangabe wird somit transparent und ist dem Laien zugänglich.
- Reduktionen beziehen sich auf Kugelbögen und bedürfen weder geodätischer Linien noch windschiefer Normalen.
- Die Fehlergleichungen sind von bestechend einfacher Form, ohne Einbusse an geometrischer Strenge.
- Näherungskoordinaten können bestehenden Vermessungswerken unmittelbar entnommen werden.
- Resultate lassen sich dank ein und derselben Koeffizientenmatrix ins globale Erdsystem elementar zurückführen und danach beliebig umbilden.
- Bei sehr flacher Netzkonfiguration, wenn $\Delta z \sim 0$, ist eine unkorrelierte Trennung in Lage- und Höhenrechnung möglich.
- **Wird mit «freiem Netz» operiert, lässt dieses Vorgehen eine Annäherung ans örtliche Geoid zu und steht weder unter Servitut überholter noch ständig veränderter geodätischer Grunddaten.**

Literatur:

[1] Gerber D.E. Peter: Diss. Nr. 5722, ETH, Zürich 76/77, Korrigenda 7.79.

[2] Grossmann W.: «Geod. Berechnungen und Abbildungen», Konrad Wittwer-Verlag, Stuttgart 1964.

Adresse des Verfassers:
Peter Gerber
Stockstrasse 9, CH-9444 Diepoldsau