**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 86 (1988)

**Heft:** 11

**Artikel:** Zur Erstellung des stochastischen Modells bei trigonometrischen Höhennetzen

**Autor:** Fröhlich, H. / Grimm-Pitzinger, A. / Hanke, K.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-233796

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 08.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Friess, P. (1987): The NAVSTAR Global Positioning System for Aerial Triangulation. Proc. 41st Photogram. Week, Stuttgart, 14–19 Sept, 1987, pp. 33–45.

Friess, P. (1988): Empirical Accuracy of Positions Computed from Airborne GPS Data. Paper submitted to Comm. III, 16th ISPRS Congress, Kyoto, 1988.

Hartl, Ph., Schoeller, W. (1986): Application of GPS-Receivers for Earth Observations. In: Progress in Imaging Sensors, Proc. ISPRS Symposium, Stuttgart, 1–5 Sept 1986 (ESA SP–252, Nov 1986), pp.207–214.

Hein, G.W., Landau, H., Baustert, H. (1988): Terrestrial and Aircraft Differential Kinematic GPS Positioning. Paper presented at International GPS Workshop, Darmstadt, 10–13 April 1988.

Krabill, W.B., Martin, C.F. (1987): Aircraft Positioning Using Global Positioning System Carrier Phase Data, Navigation, Vol. 34, No. 2, Spring 1987, pp. 1–21.

Kupfer, G. (1988): Geometrical System Calibration of Metric Cameras. In: Progress in Imaging Sensors, Proc. ISPRS Symposium, Stuttgart, 1–5 Sept 1986 (ESA SP–252, Nov. 1986), pp. 55–62.

Lucas, J.R., Mader, G. (1987): Successful Demonstration of Aerotriangulation without Ground Control. Manuscript, NOAA/NGS, 11 p.

Mader, G. (1988): Decimeter Level Aircraft Positioning Using GPS Carrier Phase Measurements. In: Proc. Fourth Intern. Geodetic Symp. on Satellite Positioning, April 28–May 2, 1986, Austin, Texas, Vol. 2, pp. 1311–1325.

Scherrer, R., Fricker, P. (1986): GPS – Das Vermessungs-System der Zukunft. Wild Reporter, Nr. 24, pp. 3–7.

Schödlbauer, A. (1984): Bezugssysteme der Landesvermessung unter Berücksichtigung terrestrischer und satelliten-geodätischer Mess- und Auswerteverfahren. In: Satelliten-Doppler-Messungen. Beiträge zum Geodätischen Seminar 14./25. Sept. 1984, pp. 63–153. Schriftenreihe des Wiss. Stud. Gang Vermessungswesen, HSBW München, Heft 15, Dez. 1984.

Wester-Ebbinghaus, W. (1985): Bündeltriangulation mit gemeinsamer Ausgleichung photogrammetrischer und geodätischer Beobachtungen. ZfV 110 (1985) 3, pp. 101–111.

Adresse des Verfassers:
Prof. Dr.-Ing. Egon Dorrer
Universität der Bundeswehr München
Werner-Heisenberg-Weg 39
D-8014 Neubiberg

# Zur Erstellung des stochastischen Modells bei trigonometrischen Höhennetzen

*H. Fröhlich, A. Grimm-Pitzinger, K. Hanke*

**Zur Erstellung des stochastischen Modells eines trigonometrischen Höhennetzes werden die Varianzen der Beobachtungen in einen konstanten und einen entfernungsabhängigen Teil zerlegt. Mit Hilfe der Varianzkomponentenschätzung gelingt es, die Relation der beiden Komponenten aus dem Datenmaterial zu schätzen und dadurch das Ergebnis der Ausgleichung zu verbessern.**

***Pour élever un modèle stochastique d'un réseau trigonométrique d'altitude, les variances des observations sont divisées en un part constant et un part dépendant des distances.***
***A l'aide de l'estimation des composantes des variances il réussit à préciser la relation de les deux composantes à la base des données. Il en résulte une précision supérieure lors des résultats de l'ajustement.***

## 1. Einleitung

Die trigonometrische Höhenmessung hat sich als zweites Höhenmessverfahren neben dem geometrischen Nivellement etabliert. Setzt man die weitgehende Elimination des Refraktionseinflusses durch die Beobachtung von gleichzeitig-gegenseitigen Zenitdistanzen voraus, werden damit schon in ebener Topographie mit weniger Aufwand einem technischen geometrischen Nivellement gleichwertige Resultate erzielt. Im Hochgebirge ist das geometrische Nivellement nicht praktikabel und die trigonometrische Höhenmessung verbleibt als einzige Präzisionsmethode zur Bestimmung von Höhendifferenzen. Die Verknüpfung solcher Messelemente zu Höhennetzen steigert die Genauigkeit der errechneten Punkthöhen und bewirkt Zuverlässigkeit ihrer Bestimmung.

Ein zentrales Problem bei der Auswertung solcher Netze ist das Erstellen des stochastischen Modells, etwa für eine Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Diese a-priori Annahme soll die Genauigkeitsverhältnisse der unterschiedlich langen und steilen Visuren richtig beschreiben. Die Angabe einer solchen, allgemein gültigen Gewichtsformel für derartige Messungen im steilen Gelände ist wegen der Vielzahl der die Beobachtungen beeinflussenden Fehlerkomponenten wie Refraktionsreste und Lotstörungseffekte nur schwer möglich.
Die Erstellung des stochastischen Modells kann jedoch, dies soll in diesem Artikel gezeigt werden, durch Anwendung der Varianzkomponentenschätzung der konkreten Situation angepasst werden. Grundlage ist die gedankliche Aufteilung der Beobachtungsvarianzen in zwei Komponenten, etwa in einen konstanten und einen mit dem Quadrat der Zielweite anwachsenden Anteil. Ausgehend von einem solchen Ansatz, werden iterativ Faktoren geschätzt, welche die wahrscheinlichste Relation zwischen den beiden Komponenten festlegen. Es ist mit Hilfe der Varianzkomponentenschätzung möglich, aus dem jeweiligen, von groben Datenfehlern bereinigten Datensatz eine für diesen gültige Gewichtsformel zu berechnen. Dies führt zu einer besseren Ausnützung des Informationsgehalts der Messungen und in weiterer Folge zu einer Verbesserung der Ausgleichungsergebnisse.

## 2. Lösungsansatz

Die Erstellung des stochastischen Modells ist gleichbedeutend mit der Annahme der Kovarianzmatrix D(**y**) des Beobachtungsvektors **y**:

$$D(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \qquad (1)$$

Die Hauptdiagonale besteht aus den Varianzen der Beobachtungen, die ausserhalb davon stehenden Kovarianzen sind ein Mass für die Korrelation zwischen den Messungen. Sie kann als Produkt der Varianz der Gewichtseinheit $\sigma^2$ und der Inversen der positiv definiten Gewichtsmatrix der Beobachtungen dargestellt werden. Letztere wird meist als Diagonalmatrix angenommen, was die Vermutung von unkorrelierten Messungen bedeutet. Sie spiegelt die Genauigkeitsverhältnisse zwischen den Messungen wieder. Die Varianz der Gewichtseinheit wird oft anschaulich als Varianzniveau bezeichnet. Sie wird aposteriori aus dem Datensatz geschätzt. Diese Schätzung ist jedoch abhängig von der Gestalt der Gewichtsmatrix. Sind in ihr die Genauigkeitsrelationen nur ungenügend beschrieben, so verursacht dies eine mangelhafte Schätzung des Varianzniveaus.

Die Erstellung der Genauigkeitsrelation kann durch eine Erweiterung des stochastischen Modells unterstützt werden. Der einfachste Fall eines für das gesamte Modell geltenden Varianzniveaus (1) wird durch die Einführung von mehreren, meist zwei, Faktoren verfeinert.

$$\sigma^2 \rightarrow \sigma_1^2, \sigma_2^2 \qquad (2)$$

So ist es zum Beispiel sinnvoll, in Netzen mit heterogenen Messdaten jeder Beobachtungsgruppe einen Varianzfaktor $\sigma_i^2$ zuzuordnen [Grimm-Pitzinger, Hanke].

Im vorliegenden trigonometrischen Höhennetz wurden als Messgrössen Höhenunterschiede benutzt, die aus gleichzeitig-gegenseitig gemessenen Zenitdistanzen und einer Lageausgleichung entnommenen horizontalen Seiten gerechnet worden waren. Es liegt daher nur eine Gruppe von gleichartigen Beobachtungen vor. In diesem Fall kann die Modellverfeinerung auf Grund einer Zerlegung der Varianzen der Beobachtungen in zwei Komponenten:

$$D(\mathbf{y}) = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2 \qquad (3)$$

vorgenommen werden. Als Beispiel sei die hier praktizierte Aufteilung in einen konstanten und einen entfernungsabhängigen Teil erwähnt.

Durch die getrennte Schätzung der Varianzniveaus der beiden Fehlerkomponenten wird die gewichtsmässige Abstimmung zwischen Messungen mit verschieden langen Visuren verbessert. Mit Hilfe der Varianzkomponentenschätzung werden die beiden Kofaktorenmatrizen $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ (3) solange verändert, bis die beiden Varianzniveaus übereinstimmen.

## 3. Modell der Varianzkomponentenschätzung

Zwischen den u' Punkten eine Höhennetzes seien die n Höhenunterschiede $h_{ij}$ trigonometrisch beobachtet. Als Unbekannte des Netzes werden die u (u = u'−1) Höhen H der einzelnen Messpunkte eingeführt. Das Festhalten der Höhe eines Punktes dient der Einfachheit halber zur Behebung des Rangdefektes (d = 1), hat aber in den nachfolgenden Berechnungen keinen Einfluss auf die Genauigkeit der Beobachtungen.

Zerlegt man, um mit kleineren Grössen rechnen zu können, die Höhen H in einen Näherungswert $H_o$ und einen Zuschlag dH ($H = H_o + dH$), so ergeben sich die Fehlergleichungen ohne Linearisieren zu:

$$\upsilon_{h_{ij}} = -dH_i + dH_j + (H_j - H_i - h_{ij}) \qquad (4)$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\mathbf{AH} = \mathbf{h} + \mathbf{v} \qquad (5)$$

worin **A** die n×u Modellmatrix, **H** der u×1 Vektor der Unbekannten, **h** der n×1 Beobachtungsvektor und **v** der n×1 Fehlervektor bedeuten. Der Fehlervektor **v** setze sich nun aus den beiden n×1 unbekannten und Messungen nicht zugänglichen Fehlervektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zusammen; $\mathbf{v}_1$ repräsentiert den konstanten und $\mathbf{v}_2$ den entfernungsabhängigen Fehler. Die zugehörigen Kovarianzmatrizen D($\mathbf{v}_1$) und D($\mathbf{v}_2$) lassen sich in der Form:

$$D(v_1) = \sigma_1^2 \alpha_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \sigma_1^2 V_1 \qquad (5a)$$

$$D(v_2) = \sigma_2^2 \alpha_2^2 \begin{pmatrix} r_1^{2\gamma} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r_2^{2\gamma} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & r_3^{2\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \sigma_2^2 V_2 \qquad (5b)$$

darstellen, $\sigma_1^2$ und $\sigma_2^2$ als unbekannte Faktoren und $\alpha_1^2$ und $\alpha_2^2$ ihren bekannten Näherungswerten, z.B. Erfahrungswerte; r bedeutet die Streckenlänge zwischen den Messungen i und j. Um das Modell möglichst flexibel zu gestalten, wird noch der Exponent $\gamma$ eingeführt, der vom Anwender vorzugeben ist.

Zur Berechnung der Varianzkomponenten (Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen) benutzt Koch [Koch, 1980] eine lokal beste quadratische invariante erwartungstreue Schätzung.

Bezeichnen D(**h**) = $\Sigma = \sigma_1^2 \mathbf{V}_1 + \sigma_2^2 \mathbf{V}_2$ die Kovarianzen von **h**, $\Sigma_0$ ihre Näherung, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ die Schätzwerte von **H**, $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$, so ergeben sich im Falle det($\mathbf{A}'\Sigma_0\mathbf{A}$) $\neq 0$ und det $\mathbf{S} \neq 0$ die geschätzten Varianzkomponenten zu:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q} \qquad (6)$$

mit:

$$\hat{\sigma} = [\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2]' \qquad (7)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Spur}(\mathbf{WV_iWV_j})),\ \mathbf{q} = (\mathbf{h'WV_iWh}),\ i,j = 1,2 \qquad (8)$$

$$\mathbf{W} = \Sigma_0^{-1} - \Sigma_0^{-1}\ \mathbf{A}(\mathbf{A}'\Sigma_0^{-1}\ \mathbf{A})^{-1}\ \mathbf{A}'\Sigma_0^{-1},\ \Sigma_0 = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{V}_i \qquad (9)$$

Um die Schätzwerte unabhängig von den gewählten Näherungen zu erhalten, werden sukzessive die Schätzwerte so oft als Näherungswerte eingeführt, bis die zuletzt eingeführten Näherungswerte sich als Schätzwerte ergeben.

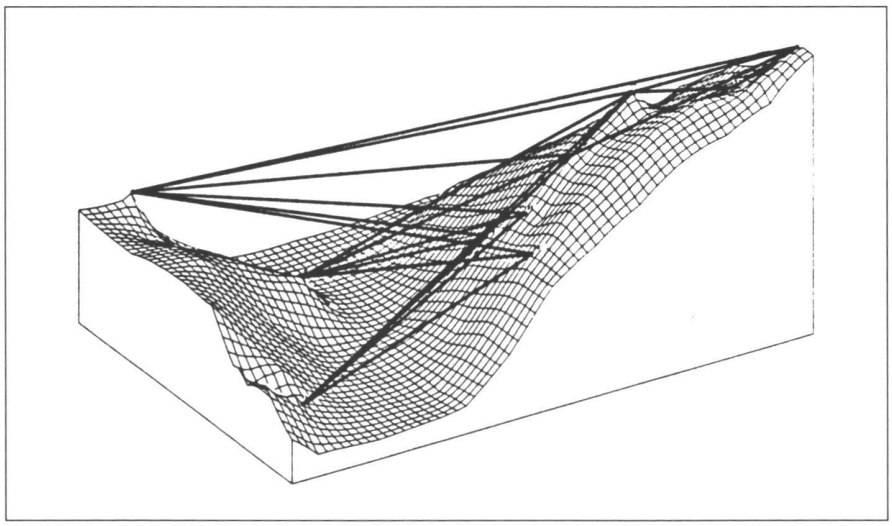
Für die Varianz der Schätzwerte gilt:

$$\mathbf{V}(\hat{\sigma}_1^2) = 2s_{11},\ \mathbf{V}(\hat{\sigma}_2^2) = 2s_{22},\ \text{mit: } \mathbf{S}^{-1} = (s_{ij}). \qquad (10)$$

Das Verfahren der Varianzkomponentenschätzung beansprucht bei der Anwendung in umfangreichen geodätischen Netzen einen erheblichen Speicherplatz und Rechenzeitbedarf. Durch Ausnutzen bestimmter Matrizeneigenschaften, wie Diagonalstrukturen, Symmetrien sowie der Elimination überflüssiger Nullwertspeicherungen und Nulloperationen lässt sich das Verfahren auch auf datenintensive Projekte anwenden [Fröhlich, Salzborn].

## 4. Varianzkomponentenschätzung im Höhennetz Kample

Beim Kraftwerk Kaunertal wurde zur periodischen Überwachung des im Bereich des Druckschachtes liegenden Steilhangs ein trigonometrisches Höhennetz angelegt. Es besteht aus zehn Punkten, die sich über einen Höhenbereich von 870 m erstrecken. Der grösste der 21 gemessenen



**Höhennetz Kample, Überhöhungsfaktor 1.5**

Höhenunterschiede beträgt 680 m, die steilste Zenitdistanz 64gon und die längste Visur 3,3 km.

Zur Ermittlung der in die Ausgleichung eingehenden Höhenunterschiede wurden gleichzeitig gemessene Zenitdistanzen und aus einem Lageausgleich entnommene horizontale Seiten verwendet.

Nach der Bereinigung von groben und systematischen Fehlern wurden die fünf vorliegenden Epochen zu einem Gesamtmodell mit 92 Messungen und 45 Unbekannten vereinigt und zwangsfrei ausgeglichen. Zur Erstellung des stochastischen Modells wurde die in Kapitel 2 beschriebene Modellverfeinerung angewendet und die Varianzkomponenten nach Formel 3 abgeschätzt. Die Aufteilung der Kovarianzmatrix der Beobachtungen erfolgte in einen konstanten und in einen streckenabhängigen Anteil. Dieser Ansatz subsummiert im ersten Teil alle konstanten (d.h. strecken- und höhenunterschiedsunabhängigen) Anteile der Beobachtungsvarianzen und im zweiten Teil streckenabhängige Komponenten wie z.B. Refraktionsreste trotz gleichzeitig gegenseitig gemessener Zenitdistanzen.

Mit den Näherungswerten:

$\alpha_1^2 = 50$ und $\alpha_2^2 = 5$

wurden Berechnungen mit verschiedenen Werten für den Exponenten $\gamma$ durchgeführt. Für

$\gamma = 2$,

d.h. für den Ansatz einer vom Quadrat der Strecke abhängigen Komponente, resultierte nach zwei Iterationsschritten folgendes Ergebnis:

$\hat{\sigma}_1^2 = 34.7$, Varianz$(\hat{\sigma}_1^2) = 14.3$

$\hat{\sigma}_2^2 = 5.1$, Varianz$(\hat{\sigma}_2^2) = 2.7$

Der Vergleich der geschätzten Varianzkomponenten $\hat{\sigma}_1^2$ und $\hat{\sigma}_2^2$ mit ihren Standardabweichungen (Quadratwurzel aus der Varianz) zeigt ihre Signifikanz und bestätigt die Richtigkeit des Ansatzes. Alle Versuche mit anderen Annahmen für $\gamma$ brachten nichtsignifikante bzw. nicht konvergierende Ergebnisse.

Die Varianzkomponentenschätzung verbessert das Ergebnis der Ausgleichung. Im folgenden werden die Resultate mit vorausgegangener Varianzkomponentenschätzung denen einer konventionellen Ausgleichung mit nur einem Varianzfaktor (1) und dem Gewichtsansatz:

$$\rho_i = \frac{c}{s_i^2}$$

gegenübergestellt. Nachstehend sind die Spur der geschätzten Kovarianzmatrix der unbekannten Punkthöhen und die durchschnittliche geschätzte Standardabweichung der Punkthöhen gegenübergestellt. Die Varianzkomponentenschätzung bewirkt ein Absinken der durchschnittlichen Standardabweichung auf 75 % des Wertes aus dem konventionellen Ausgleich.

| mit VK-Schätzung: | ohne VK-Schätzung |
|---|---|
| spurD$(\hat{\mathbf{H}}) = 1562$ mm$^2$ | spurD$(\hat{\mathbf{H}}) = 2788$ mm$^2$ |
| $\hat{\sigma}_{H,m} = 5{,}9$ mm | $\hat{\sigma}_{H,m} = 7{,}9$ mm |

$\hat{\sigma}_{H,m}$ ...gemittelte Standardabweichung der geschätzten Punkthöhen

Die geschätzten Punkthöhen unterscheiden sich im Durchschnitt um 2 mm, maximal um 6 mm.

## Dank

Die Verfasser danken der Vermessungsabteilung der Tiroler Wasserkraftwerke (TIWAG) für die Überlassung der Messdaten.

*Literatur:*

Fröhlich H.: Varianzkomponentenschätzung für elektrooptische Distanzmessung auf Eichlinien. AVN 10/1982.

Fröhlich H., Salzborn B.: Zur Effizienzsteigerung bei der Varianzkomponentenschätzung in geodätischen Netzen. ZfV 1987, S. 115–121.

Grimm-Pitzinger A., Hanke K.: Bedeutung der Varianzkomponentenschätzung für die geodätische Praxis. Öst. Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie 2/1986.

Koch K.-R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn 1980.

Adressen der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. Hans Fröhlich
Fachbereich Vermessungswesen
Praktische Geodäsie
Universität Gesamthochschule Essen
Henri-Dunant-Strasse 65
D-4300 Essen 1

Dipl. Ing. Dr. Albert Grimm-Pitzinger
Dipl. Ing. Dr. Klaus Hanke
Institut für Geodäsie
Universität Innsbruck
Technikerstrasse 13
A-6020 Innsbruck