Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 86 (1988)

Heft: 7: Prof. Rudolf Conzett in memoriam

Artikel: Betrachtungen zu singulären Ausgleichungsmodellen

Autor: Mierlo, J. van

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233774

Betrachtungen zu singulären Ausgleichungsmodellen

J. van Mierlo

Unter den Kriterien erwartungstreue und minimale Varianz werden die kleinsten Quadraten-Schätzer in singulären linearen Ausgleichungsmodellen entwickelt. Hierbei werden beim Gauss-Markoff-Modell sowohl eine singuläre Konfigurationsmatrix als auch eine singuläre Konvarianz zugelassen. Ebenso darf das funktionale und das stochastische Modell einer bedingten Ausgleichung Singularitäten aufweisen.
Bei den Formelableitungen wird die Komplementarität des G.M.-Modells und des Modells einer bedingten Ausgleichung berücksichtigt.

Dans des modèles de compensation linéaires et singuliers, on développe les estimateurs des moindres carrés en prenant comme critère la variance la plus probable et minimale. On admet aussi pour le modèle de Gauss-Markoff une matrice de configuration singulière, ainsi qu'une matrice de covariance singulière. De la même manière, le modèle fonctionnel et stochastique d'une compensation conditionnelle doit comporter des singularités.
Dans l'établissement des formules, on met en évidence la complémentarité du modèle Gauss-Markoff et de celui d'une compensation conditionnelle.

1. Einführung

In den letzten Jahrzehnten hat sich die Darstellungsform der Ausgleichungsrechnung beträchtlich gewandelt. Die in der mathematischen Statistik entwickelten Methoden der Parameterschätzung in linearen oder linearisierten Modellen kann man im Prinzip in das Modell einer vermittelnden oder bedingten Ausgleichung umformen. Die bedingte Ausgleichung ist in den letzten Jahren in Vergessenheit geraten. Der Grund hierfür ist, dass die direkte Aufstellung der Bedingungsgleichungen in der Praxis viel schwieriger ist als die Berechnung einer Designmatrix. Dazu kommt, dass die Überlegungen über die Dimension der zu invertierenden Matrix der Normalgleichungen zur Zeit keine Rolle mehr spielen.
Jedoch hat das Modell einer bedingten Ausgleichung seine Bedeutung noch nicht ganz verloren. Jetzt spricht man sogar vom komplementären Gauss-Markoff-Modell oder vom dualen Modell. Eliminiert man die Parameter des G.M.-Modells, dann erhält man das komplementäre Modell. Seit der Einführung der Projektionsoperatoren in die Ausgleichungsrechnung hat die geometrische Darstellung einer Ausgleichung an Bedeutung zugenommen und damit gleichzeitig auch wieder das komplementäre Modell.
Die entwickelten Methoden zum Testen von Hypothesen hängen grösstenteils von den aus der bedingten Ausgleichung bekannten Widersprüchen ab. Zum Verständnis der Testmethoden kann das komplementäre Modell sehr viel beitragen, ohne dass man eine bedingte Ausgleichung tatsächlich ausführen muss.

Nach einleitenden Definitionen der betrachteten Modelle werden die Methoden der Parameterschätzung und die Berechnung der verbesserten oder ausgeglichenen Beobachtungen für singuläre Ausgleichungsmodelle dargestellt. Sowohl das stochastische Modell als auch das funktionale Modell darf Singularitäten aufweisen. Im Falle eines G.M.-Modells sind dann die Spaltenvektoren der Designmatrix und im komplementären Modell die Zeilenvektoren der Bedingungsgleichungen abhängig.

2. Das G.M.-Modell und das komplementäre Modell

Mit $\tilde{\mathbf{l}}$ als $m \times 1$-Vektor der Erwartungswerte des Beobachtungsvektors $\mathbf{l}$, $\mathbf{x}$ als $n \times 1$-Vektor der Parameter mit $m > n$ und $\mathbf{A}$ als bekannte $m \times n$-Designmatrix lautet das Gauss-Markoff-Modell oder kurz G.M.-Modell

$$\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{D}\,(\mathbf{l}) = \sigma^2 \mathbf{Q}_l \qquad (2.1)$$

Hierin ist $\mathbf{D}\,(\mathbf{l})$ die $m \times m$-Dispersionsmatrix der Beobachtungen, σ^2 der Varianzfaktor und $\mathbf{Q}_l$ die Gewichtskoeffizientenmatrix der Beobachtungen.
Das komplementäre Modell entsteht nach Eliminierung der Parameter $\mathbf{x}$. Wenn $\mathbf{BA} = \mathbf{O}$, dann gilt folglich

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{O} \qquad (2.2)$$

worin $\mathbf{B}$ eine $b \times m$-Matrix darstellt mit $b < m$. In der geodätischen Literatur ist $\mathbf{B}$ bekannt als die Matrix der Bedingungsgleichungen. Das komplementäre Modell bezeichnet man weiter mit

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{l}) = \sigma^2 \mathbf{Q}_l \qquad (2.3)$$

Das G.M.-Modell und das komplementäre Modell (2.3) sind durch $\mathbf{BA} = \mathbf{O}$ miteinander verknüpft.

Definition 1

Das G.M.-Modell sei bezeichnet als:

1.1: reguläres G.M.-Modell, wenn
$r(\mathbf{A}) = n$ und $r(\mathbf{Q}_l) = m$
($r[\cdot]$ steht für Rang der in Klammern stehenden Matrix)

1.2: A-singuläres G.M.-Modell, wenn
$r(\mathbf{A}) = u < n$ und $r(\mathbf{Q}_l) = m$

1.3: Q-singuläres G.M.-Modell, wenn
$r(\mathbf{A}) = n$ und $r(\mathbf{Q}_l) = q < m$

1.4: allgemeines G.M.-Modell, wenn
$r(\mathbf{A}) = u < n$ und $r(\mathbf{Q}_l) = q < m$ gilt.

Diese spezifizierten Modelle stammen von Caspary [1984].
Ebenso kann man vier verschiedene Modelle für das komplementäre Modell einführen. Bezeichnet man das komplementäre Modell weiter als K-Modell, dann gilt

Definition 2

Das K-Modell sei bezeichnet als:

2.1: reguläres K-Modell, wenn
$r(\mathbf{B}) = b$ und $r(\mathbf{Q}_l) = m$

2.2: B-singuläres K-Modell, wenn
$r(\mathbf{B}) = r < b$ und $r(\mathbf{Q}_l) = m$

2.3: Q-singuläres K-Modell, wenn
$r(\mathbf{B}) = b$ und $r(\mathbf{Q}_l) = q < m$

2.4: allgemeines K-Modell, wenn
$r(\mathbf{B}) = r < b$ und $r(\mathbf{Q}_l) = q < m$ gilt.

Für alle definierten funktionalen Modelle ist immer $\mathbf{BA} = \mathbf{O}$ gültig. (2.4)

Mit einem Beobachtungsvektor $\mathbf{l}$ werden Schätzungen für $\tilde{\mathbf{l}}$ und $\mathbf{x}$ gesucht.
Es sei $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ eine Schätzung für $\mathbf{l}$, dann muss $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) erwartungstreu, d.h. $E\,(\mathbf{l}+\mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{l}}$ (2.5)

(ii) $\mathbf{B}(\mathbf{l}+\mathbf{e}) = \mathbf{O}$ (2.6)

Aus (2.6) folgt, dass die verbesserten Beobachtungen $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ die Bedingungsgleichungen erfüllen. Aus (2.6) ergibt sich mit (2.4)

$$\mathbf{l}+\mathbf{e} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \qquad (2.7)$$

Hierin ist $\hat{\mathbf{x}}$ eine Schätzung für $\mathbf{x}$. ($E[\cdot]$ steht für den Erwartungswert des in Klammern stehenden Arguments).

Es sei $\tilde{\Phi}$ eine willkürliche lineare Funktion der Erwartungswerte von $\tilde{\mathbf{l}}$:

$$\Phi = \mathbf{f}^T\tilde{\mathbf{l}} \tag{2.8}$$

Eine erwartungstreue Schätzung für $\tilde{\Phi}$ sei

$$\hat{\Phi} = \mathbf{f}^T(\mathbf{l}+\mathbf{e})$$

Die Schätzung $\hat{\Phi}$ sei als *best* bezeichnet, wenn sie minimale Varianz besitzt. Die «Verbesserungen» **e**, welche für *alle* **f** minimale Varianzen erzeugen, d.h.

$$\sigma^2_{\hat{\phi}} = \sigma^2 \mathbf{f}^T \mathbf{Q}_{l+e} \mathbf{f} \quad \text{minmum} \ \forall\, \mathbf{f}^T$$

bezeichnet man mit **v**. Es wird sich im folgenden zeigen, dass **v** die Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate darstellen. Die Berechnung von **v** und $\hat{\mathbf{x}}$ hängt von der Art der definierten Modelle ab.

3. Das reguläre G.M.- und K-Modell

Im Modell $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{O}$ oder $\mathbf{B}(\mathbf{l}+\mathbf{e}) = \mathbf{O}$ werden die Verbesserungen **e** berechnet als Lösung der konsistenten Gleichungen

$$\mathbf{Be} = -\mathbf{w} \tag{3.1}$$

worin **w** der Vektor der Widersprüche darstellt

$$\mathbf{w} = \mathbf{Bl} \tag{3.2}$$

Die Lösung **e** erhält man mit Hilfe einer Rechtsinversen von **B** Noble [1969]

$$\mathbf{B}^{-1}_R = \mathbf{HB}^T(\mathbf{BHB}^T)^{-1} \tag{3.3}$$

worin **H** eine willkürliche (reguläre) Matrix darstellt. Die Matrix $\mathbf{BHB}^T$ muss regulär sein! Es gilt

$$\mathbf{BB}^{-1}_R = \mathbf{I}_b$$

also folgt

$$\mathbf{l}+\mathbf{e} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{B}^{-1}_R\mathbf{B})\,\mathbf{l} \tag{3.4}$$

$\mathbf{l}+\mathbf{e}$ sind erwartungstreue Schätzungen und ausserdem gilt $\mathbf{B}(\mathbf{l}+\mathbf{e}) = \mathbf{O}$.

Die Matrix **H** ist so zu bestimmen, dass die Varianz einer willkürlichen Funktion von $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ minimal wird.

Mit $\tilde{\Phi} = \mathbf{f}^T\tilde{\mathbf{l}}$ sei $\hat{\Phi} = \mathbf{f}^T(\mathbf{l}+\mathbf{e})$ eine erwartungstreue Schätzung von $\tilde{\Phi}$. Es wird sich zeigen, dass für $\mathbf{Q}_l$ diese Minimierungsbedingung erfüllt ist und dass damit die kleinsten Quadrate Schätzungen erhalten sind:

(i) $-\mathbf{v} = \mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T(\mathbf{BQ}_l\mathbf{B}^T)^{-1}$

(ii) $E(\mathbf{l}+\mathbf{v}) = \mathbf{l}$ (3.5)

(iii) $\mathbf{B}(\mathbf{l}+\mathbf{v}) = \mathbf{O}$

Betrachtet man nun das reguläre G.M.-Modell. Für die verbesserten Beobachtungen gilt nun

$$\mathbf{l}+\mathbf{e}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' \tag{3.6}$$

mit

$\hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}^{-1}_L\mathbf{l}$ und

$$\mathbf{A}^{-1}_L = (\mathbf{A}^T\mathbf{MA})^{-1}\,\mathbf{A}^T\mathbf{M} \tag{3.7}$$

worin **M** eine reguläre willkürliche Matrix darstellt.

$\mathbf{A}^{-1}_L$ ist die Linksinverse von **A**. Wie man leicht zeigen kann, sind $\mathbf{l}+\mathbf{e}'$ erwartungstreue Schätzungen von $\tilde{\mathbf{l}}$. Im allgemeinen Fall gilt $\mathbf{e} \neq \mathbf{e}'$.

Aus (3.3) und (3.4) ergibt sich

$\mathbf{A}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{O}$ und

mit

$\mathbf{l}+\mathbf{e} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ gilt folglich

$(\mathbf{A}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{l}$ oder

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A})\,\mathbf{A}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{l} \tag{3.8}$$

Für den Fall, siehe (3.7) und (3.8),

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^{-1} \tag{3.9}$$

ergibt sich

(i) $\mathbf{e} = \mathbf{e}'$

(ii) $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}'$. (3.10)

Die Matrix **H** ist nicht unbedingt symmetrisch!

Mit (3.4) ergibt sich für die Varianz von $\hat{\Phi} = \mathbf{f}^T(\mathbf{l}+\mathbf{e})$:

$$\sigma^2_{\hat{\sigma}} = \sigma^2[\mathbf{f}^T\mathbf{Q}_l\mathbf{f} - \mathbf{k}^T\mathbf{BQ}_l\mathbf{f} - \mathbf{k}^T\mathbf{Q}_l\mathbf{f} - \mathbf{f}^T\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T\mathbf{k} + \mathbf{k}^T\mathbf{BQ}_l\mathbf{B}^T\mathbf{k}]$$

$$\text{mit } \mathbf{k}^T = \mathbf{f}^T\mathbf{B}^{-1}_R \tag{3.11}$$

Werden die Ableitungen von $\sigma^2_{\hat{\sigma}}$ nach **k** gleich null gesetzt, dann erhält man das konsistente Gleichungssystem

$$\mathbf{f}^T\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T = \mathbf{k}^T(\mathbf{BQ}_l\mathbf{B}^T)$$

und damit die Lösung

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{f}^T\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T(\mathbf{BQ}_l\mathbf{B}^T)^{-1} \tag{3.12}$$

Vergleicht man (3.11) mit (3.10), dann werden mit $\mathbf{H} = \mathbf{Q}_l$ die Schätzungen mit minimaler Varianz erzeugt. Bezeichnet man dann die entsprechenden Verbesserungen mit **v**, dann erhält man die kleinsten Quadrate Schätzungen $\mathbf{l}+\mathbf{v}$. Wählt man in (3.7) für $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^{-1}_l = \mathbf{P}$, dann erhält man nach (3.10) die bekannte

kleinste Quadrate Lösung:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Pl}. \tag{3.13}$$

Es gilt $\mathbf{A}^T\mathbf{Pv} = \mathbf{O}$, und dadurch kann man für (3.13) auch schreiben

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}(\mathbf{l}+\mathbf{v}) \tag{3.14}$$

Die Schätzungen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind lineare Funktionen von $\mathbf{l}+\mathbf{v}$ und besitzen nach (3.12) minimale Varianz.

4. Projektionsoperatoren

Der Beobachtungsvektor **l** sei ein m-dimensionaler Vektor im m-dimensionalen Vektorraum L. Diesen Vektorraum bezeichnet man als Stichproberaum. Der Stichproberaum kann in disjunkte Unterräume L_1 und L_2 zerlegt werden. Es gilt dann die direkte Summe

$$L = L_1 \oplus L_2 \,.$$

Jeder Vektor **l** ist eindeutig als Summe

$\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$ darstellbar, wobei

$\mathbf{l}_1 \in L_1$ und $\mathbf{l}_2 \in L_2$.

Die Norm eines Vektors im Stichproberaum L wird definiert durch

$$\|\mathbf{l}\| = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{l}^T\mathbf{Pl}} \tag{4.1}$$

Die Methode der kleinsten Quadrate minimiert das Quadrat der Norm des Verbesserungsvektors:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{v}^T\mathbf{Pv} \tag{4.2}$$

Der Winkel Θ zwischen zwei willkürlichen Vektoren ξ_1 und ξ_2 ergibt sich aus der geometrischen Definition des verallgemeinerten Skalarproduktes

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = \frac{1}{\sigma^2}\xi_1^T\mathbf{P}\,\xi_2 = \|\xi_1\|\ \|\xi_2\| \cos\theta \tag{4.3}$$

Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn

$$\xi_1^T\mathbf{P}\,\xi_2 = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

gilt.

Zuerst wird angenommen, $r(\mathbf{A}) = n$ und $r(\mathbf{B}) = b$. Die Spaltenvektoren der Designmatrix A (2.1) spannen einen n-dimensionalen Unterraum $R(\mathbf{A})$ von L auf. Die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T$ spannen einen b-dimensionalen Unterraum von L auf. Diese Spaltenvektoren stehen also alle senkrecht auf die Spaltenvektoren von **A**, d.h. nach (4.4) gilt

$(\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T)^T\,\mathbf{PA} = \mathbf{O}$ oder $\mathbf{BA} = \mathbf{O}$!

Der Vektorraum $R(\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T)$ wird dann auch als das orthogonale Komplement von $R(\mathbf{A})$ bezeichnet, weiter dargestellt mit $R(\mathbf{A})^\perp$.

$$L = R(\mathbf{A}) \oplus R(\mathbf{A})^\perp \tag{4.5}$$

Den Beobachtungsvektor **l** kann man in zwei Komponenten zerlegen

$\mathbf{l} = (\mathbf{l}+\mathbf{e}) + (-\mathbf{e})$

mit $\mathbf{l}+\mathbf{e} \in R(\mathbf{A})$ imf $-\mathbf{e} \in R(\mathbf{A})^\perp$.

Die Schreibweise $\mathbf{l}+\mathbf{e}\ \varepsilon\ R(\mathbf{A})$ bedeutet, dass $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ eine lineare Kombination der Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ darstellt, und $-\mathbf{e}\ \varepsilon\ R(\mathbf{A})^{\perp}$ bedeutet, dass $-\mathbf{e}$ eine lineare Kombination von $\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T$ darstellt. Also

$$\mathbf{l}+\mathbf{e} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$$

$$-\mathbf{e} = \mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T\mathbf{k} \qquad (4.6)$$

Die Vektoren $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ und $\mathbf{e}$ sind zueinander orthogonal, d.h.

$$(\mathbf{l}+\mathbf{e})^T\mathbf{P}\mathbf{e} = \mathbf{O}$$

Mit (3.6) und (3.7) erhält man

$$\mathbf{l}+\mathbf{e} = \mathbf{A}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{M}\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{l}$$

oder mit

$$\overset{*}{\Pi}_A = \mathbf{A}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M} \qquad (4.7)$$

$$\mathbf{l}+\mathbf{e} = \overset{*}{\Pi}_A\,\mathbf{l}$$

Diese Transformation des Beobachtungsvektors bezeichnet man als eine «Projektion» von $\mathbf{l}$ auf R(A). Π^*_A ist der Projektionsoperator, mit dem der Vektor $\mathbf{l}$ auf $R(\mathbf{A})$ projiziert wird. Projiziert man mit Π^*_A $\mathbf{l}+\mathbf{e}$ auf $R(\mathbf{A})$, dann ergibt sich wieder $\mathbf{l}+\mathbf{e}$, d.h. Π^*_A ist eine idempotente Matrix:

$$\Pi^*_A\,\Pi^*_A = \Pi^*_A\,.$$

Wird in (4.7) die willkürliche Matrix $\mathbf{M}$ ersetzt durch die Gewichtsmatrix $\mathbf{P}$, dann erhält man einen *orthogonalen* Projektionsoperator:

$$\Pi_A = \mathbf{A}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P} \qquad (4.8)$$

Nun gilt mit $\mathbf{v}$ statt $\mathbf{e}$

$$\mathbf{l}+\mathbf{v} = \Pi_A\,\mathbf{l} \qquad (4.9)$$

Diese Lösung ergab sich aus der Minimierung von $||\mathbf{e}||^2$, d.h. die «kürzeste Länge» zwischen $\mathbf{l}$ und seiner Projektion $\mathbf{l}+\mathbf{e}$. Hierdurch entstand die Bezeichnung orthogonaler Projektionsoperator. Ersetzt man in Π_A die Matrix $\mathbf{A}$ durch $\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T$, dann ergibt sich der orthogonale Projektionsoperator auf $R(\mathbf{A})^{\perp}$:

$$\overset{\perp}{\Pi}_A = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{P}$$

also $\overset{\perp}{\Pi}_A = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{B} \qquad (4.10)$

Es gilt, $-\mathbf{v}$ sei die Projektion von $\mathbf{l}$ auf $R(\mathbf{A})^{\perp}$

also gilt

$$-\mathbf{v} = \overset{\perp}{\Pi}_A\,\mathbf{l}$$

womit (3.5) erhalten wird.

Weiterhin gilt $\mathbf{l} = \Pi_A\,\mathbf{l} + \overset{\perp}{\Pi}_A\,\mathbf{l} \qquad (4.11)$

5. Schätzung in singulären funktionalen Modellen

Wir betrachten jetzt das A-singuläre G.M.-Modell zusammen mit dem B-singulären K-Modell. Zuerst sei zu bemerken, dass die Parameter im singulären G.M.-Modell nicht eindeutig sind, d.h. für $\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ kann man auch eine andere lineare Kombination wählen, z.B. $\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_1$ mit $\tilde{\mathbf{x}} \neq \tilde{\mathbf{x}}_1$.

Es sei $\mathbf{l}+\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \qquad r(\mathbf{A}) = u < n \qquad (5.1)$

$\mathbf{B}(\mathbf{l}+\mathbf{v}) = \mathbf{O} \qquad r(\mathbf{B}) = r < b \qquad (5.2)$

Die kleinsten Quadrate Schätzungen erhält man ebenso wie im regulären Modell als eine orthogonale Projektion von $\mathbf{l}$ auf $R(\mathbf{A})$ und den Verbesserungsvektor $\mathbf{v}$ als eine orthogonale Projektion von $-\mathbf{l}$ auf $R(\mathbf{A})^{\perp}$. Die zuständigen orthogonalen Projektionsoperationen sind, Rao [1973]:

$$\Pi_A = \mathbf{A}\,(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^T\mathbf{P} \qquad (5.3)$$

$$\overset{\perp}{\Pi}_A = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T)^{-}\mathbf{B} \qquad (5.4)$$

worin $(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}$ und $(\mathbf{B}\mathbf{Q}_l\mathbf{B})^{-}$ generalisierte Inverse darstellen.

Aus (5.3) und (5.4) ergibt sich

$$\Pi_A\,\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{und}$$

$$\overset{\perp}{\Pi}_A\,\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T$$

und schliesslich die bekannten Gleichungen

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}\,\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{A} \text{ und} \qquad (5.5)$$

$$(\mathbf{B}\,\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T)\,(\mathbf{B}\mathbf{Q}_l\mathbf{B}^T)^{-}\mathbf{B} = \mathbf{B} \qquad (5.6)$$

Mit (5.3) und (5.4) folgt

$$\mathbf{l}+\mathbf{v} = \Pi_A\,\mathbf{l} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} \quad \text{und} \qquad (5.7)$$

$$-\mathbf{v} = \overset{\perp}{\Pi}_A\,\mathbf{l} = \mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^T)^{-}\mathbf{B}\mathbf{l} \qquad (5.8)$$

Aus (5.7) ergibt sich

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}\,\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$$

und dann mit $\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$E(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\,\mathbf{x} \neq \mathbf{x}$$

d.h. $\hat{\mathbf{x}}$ ist keine erwartungstreue Schätzung von $\mathbf{x}$, aber von $\mathbf{N}^{-}\mathbf{N}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$.

Im regulären G.M.-Modell waren die Parameter wohl erwartungstreu schätzbar. Im singulären Modell sind die ausgeglichenen Beobachtungen

$$\mathbf{l}+\mathbf{v} = \Pi_A\mathbf{l}$$

erwartungstreue Schätzungen von $\tilde{\mathbf{l}}$ und selbstverständlich alle linearen Funktionen von $\mathbf{l}+\mathbf{v}$:

$$\tilde{\Phi} = \mathbf{f}^T\tilde{\mathbf{l}} \rightarrow \mathbf{f}^T(\mathbf{l}+\mathbf{v}) = \hat{\Phi}.$$

Ebenso wie im regulären Modell kann man beweisen, dass die Schätzungen minimale Varianz besitzen und dadurch auch $\hat{\mathbf{x}}$, da man mit $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{O}$ für $\hat{\mathbf{x}}$ schreiben kann, vergleiche (3.14)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{P}(\mathbf{l}+\mathbf{v})$$

Die Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ sind beste erwartungstreue Schätzungen *nicht* von $\mathbf{x}$, aber von $\mathbf{N}^{-}\mathbf{N}\mathbf{x}$.

6. Die Q-singulären Modelle

Der Rang der Gewichtskoeffizientenmatrix $\mathbf{Q}_l$ sei $q < m$. Durch Änderung der Reihenfolge der Beobachtungen kann man durch elementare Umformungen $\mathbf{Q}_l$ zerlegen in

$$\mathbf{E}\,\mathbf{Q}_1\mathbf{E}^T = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \qquad (6.1)$$

worin $\mathbf{E}$ eine reguläre Matrix darstellt [Noble 1969].

Es sei

$$\begin{vmatrix} \mathbf{l}^*_1 \\ \mathbf{l}^*_2 \end{vmatrix} = \mathbf{E} \begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{vmatrix} \qquad (6.2)$$

dann wird

$$\mathbf{Q}^*_1 = \mathbf{E}\,\mathbf{Q}_1\mathbf{E}^T = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \qquad (6.3)$$

woraus folgt, dass $\mathbf{l}^*_2$ Konstanten sind, d.h. $\mathbf{l}^*_2$ ist nicht stochastisch. Aus (6.2) folgt mit $\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{l}^*_1 \\ \mathbf{l}^*_2 \end{vmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{K}_{11}\mathbf{l}^*_1 + \mathbf{a}^o_1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}^o_1 = \mathbf{K}_{12}\mathbf{l}^*_2$$

$$\mathbf{l}_2 = \mathbf{K}_{21}\mathbf{l}^*_1 + \mathbf{a}^o_2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}^o_2 = \mathbf{K}_{22}\mathbf{l}^*_2$$

worin $\mathbf{a}^o_1$ und $\mathbf{a}^o_2$ Konstanten darstellen.

Die Lösung $\mathbf{l}^*_1 = \mathbf{K}^{-1}_{11}\,(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}^o_1)$ wird in $\mathbf{l}_2$ substituiert, woraus sich ergibt

$$\mathbf{l}_2 - \mathbf{a}^o_2 = \mathbf{F}(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}^o_1) \qquad (6.4)$$

mit $\mathbf{F} = \mathbf{K}_{21}\mathbf{K}^{-1}_{11}$

Mit (6.4) wird gezeigt, dass eine singuläre Gewichtskoeffizientenmatrix $\mathbf{Q}_l$ entsteht, wenn die Beobachtungen (oder nach Linearisierung) linear abhängig sind. Die Dimension des Stichproberaumes sei dann auch q und nicht m. Das Q-singuläre K-Modell sei nun

$$(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)\begin{vmatrix}\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \tilde{\mathbf{l}}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad (6.5)$$

Mit (6.4) ergibt sich dann schliesslich

$$\bar{\mathbf{B}}_1\,(\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0) = \mathbf{O} \qquad (6.6)$$

mit

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{F} \qquad (6.6a)$$

Mit $\bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{A}_1 = \mathbf{O}$ erhält man das entsprechende reguläre G.M.-Modell:

$$\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0 = \mathbf{A}_1\mathbf{x} \qquad (6.7)$$

Mit (6.4) kann man (6.7) transformieren in das Q-singuläre G.M.-Modell

$$\begin{vmatrix}\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \tilde{\mathbf{l}}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{F}\mathbf{A}_1\end{vmatrix}\mathbf{x} = \begin{vmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\end{vmatrix}\mathbf{x} \qquad (6.8)$$

Die Schätzungen $\hat{\mathbf{x}}$ folgen direkt aus (6.7). Es gilt

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_1^T\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1^T\mathbf{Q}_{11}^{-1}\,(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0)\ .$$

Die gleiche Lösung erhält man auch aus (6.8), das Q-singuläre G.M.-Modell, indem man für die Gewichtsmatrix die folgende Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix}\mathbf{Q}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{vmatrix} \qquad (6.9)$$

wählt.

$$\hat{\mathbf{x}} = \left[(\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_2^T)\begin{vmatrix}\mathbf{Q}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\end{vmatrix}\right]^{-1}(\mathbf{A}_1^T\mathbf{A}_2^T)\begin{vmatrix}\mathbf{Q}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \mathbf{l}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix}$$

Beim Q-singulären G.M.-Modell muss man also zuerst feststellen, welche Beobachtungen man als unabhängig betrachten kann, wonach man die Gewichtsmatrix nach (6.9) aufstellen kann.

Beim Q-singulären komplementären Modell spielt die Singularität *keine* wesentliche Rolle. Mit (6.4) ergibt sich für die Gewichtskoeffizientenmatrix der Beobachtungen

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{vmatrix}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{11}\mathbf{F}^T\\ \mathbf{F}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{F}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{F}^T\end{vmatrix} \qquad (6.10)$$

Die Widersprüche $\mathbf{w}$ sind definiert durch

$$(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)\begin{vmatrix}\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \mathbf{l}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_1\,(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0) = \mathbf{w} \qquad (6.11)$$

Die Verbesserungen $\mathbf{v}_1$ werden berechnet mit

$$-\mathbf{v}_1 = \mathbf{Q}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1^T\,\mathbf{Q}_w^{-1}\,\mathbf{w} \qquad (6.12)$$

mit $\mathbf{Q}_w = \bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{Q}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1^T$,

d.h. $\mathbf{Q}_w$ ist die Matrix der Gewichtskoeffizienten der Widersprüche. Aus (6.4) ergibt sich $\mathbf{v}_2 = \mathbf{F}\mathbf{v}_1$ oder mit (6.12)

$$-\mathbf{v}_2 = \mathbf{F}\mathbf{Q}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1^T\mathbf{Q}_w^{-1}\mathbf{w} \qquad (6.13)$$

Man kann leicht zeigen, dass mit (6.6a) und (6.10) die Verbesserungen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ direkt folgen aus:

$$\begin{vmatrix}-\mathbf{v}_1\\ -\mathbf{v}_2\end{vmatrix} = \mathbf{Q}_1\begin{vmatrix}\mathbf{B}_1^T\\ \mathbf{B}_2^T\end{vmatrix}\mathbf{Q}_w^{-1}\,\mathbf{w} \qquad (6.14)$$

Dies bedeutet, dass man im Q-singulären Fall einer bedingten Ausgleichung immer die richtige Lösung erhalten wird. Tienstra hat dies schon erwähnt bei der Ableitung der stufenweisen Ausgleichung, Tienstra [1956]. Die Verbesserungsquadratsumme Ω kann man bei einer bedingten Ausgleichung ($\mathbf{Q}_l$ singulär oder regulär) ohne die Gewichtsmatrix der Beobachtungen berechnen:

$$\Omega = \mathbf{w}^T\mathbf{Q}_w^{-1}\mathbf{w} \qquad (6.15)$$

Gemäss Modell (6.7) gilt $\Omega = \mathbf{v}_1^T\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{v}_1$ oder mit der Gewichtsmatrix (6.9)

$$\Omega = \begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{vmatrix}^T\begin{vmatrix}\mathbf{Q}_{11}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{v}_2\end{vmatrix} = \mathbf{v}_1^T\mathbf{Q}_{11}^{-1}\mathbf{v}_1 \qquad (6.16)$$

7. Das allgemeine G.M.- und K-Modell

Die abhängigen Bedingungsgleichungen kann man mit (6.4) ebenso transformieren in:

$$\bar{\mathbf{B}}_1\,(\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0) = \mathbf{O} \qquad (7.1)$$

mit

$$\bar{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{F} \qquad (7.2)$$

Der Rang von $\bar{\mathbf{B}}_1$ sei r mit r < b, b ist die Anzahl aller Bedingungsgleichungen. Das Modell (7.1) ist ein B-singuläres K-Modell, wofür die Lösung in § 5 beschrieben wurde. Es gilt folglich mit (5.8) und (6.4):

$$-\mathbf{v}_1 = \mathbf{Q}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1^T\,(\bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{Q}_{11}\bar{\mathbf{B}}_1^T)^{-1}\,\bar{\mathbf{B}}_1\,(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0) \qquad (7.3)$$

$$-\mathbf{v}_2 = -\mathbf{F}\mathbf{v}_1 \qquad (7.4)$$

Wie bei (6.14) folgen die Verbesserungen v_1 und v_2 direkt aus

$$\begin{vmatrix}-\mathbf{v}_1\\ -\mathbf{v}_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12}\\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{B}_1^T\\ \mathbf{B}_2^T\end{vmatrix}\mathbf{Q}_w^{-}\,\mathbf{w} \qquad (7.5)$$

mit $\mathbf{Q}_w^-$ eine generalisierte Inverse der Matrix der Gewichtskoeffizienten der Widersprüche.

Mit (7.5) ist gezeigt, dass man im allgemeinen K-Modell direkt die kleinste Quadrate Lösung berechnen kann, ohne dass man die Singularität von $\mathbf{Q}_l$ feststellen muss. Die Verbesserungsquadratsumme wird analog zu (6.15) berechnet.

Im allgemeinen G.M.-Modell ist Vorsicht geboten. Nach (7.1) erhält man zuerst ein singuläres G.M.-Modell:

$$\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0 = (\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2)\begin{vmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{vmatrix} \qquad (7.6)$$

worin die Spaltenvektoren $\mathbf{A}_2$ linear abhängig sind von den Spaltenvektoren $\mathbf{A}_1$. Ausserdem gilt:

$$\bar{\mathbf{B}}\,(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = \mathbf{O} \qquad (7.7)$$

Mit (6.4) kann man (7.6) ergänzen:

$$\begin{vmatrix}\tilde{\mathbf{l}}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \tilde{\mathbf{l}}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ \mathbf{F}\mathbf{A}_1 & \mathbf{F}\mathbf{A}_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{\mathbf{A}}_1\\ \bar{\mathbf{A}}_2\end{vmatrix}\mathbf{x} \qquad (7.8)$$

(7.8) ist die Darstellung des allgemeinen G.M.-Modells, $\mathbf{Q}_{ll}$ singulär, Designmatrix hat den Rang u_2, die Anzahl der Parameter $\mathbf{x}_2$. Das allgemeine G.M.-Modell ist aus (7.6) entstanden. Hieraus ergibt sich dann die Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{a}_1^0 = \Pi_{A1}\,(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0)$$

$$\mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{a}_1^0 = \bar{\mathbf{A}}_1\,(\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}_1\bar{\mathbf{A}}_1)^{-}\bar{\mathbf{A}}_1^T\mathbf{P}_1\,(\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0)$$
$$= \bar{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{x}} \qquad (7.9)$$

mit

$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_{11}^{-1}$ und

$$\mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{a}_2^0 = \mathbf{F}(\mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{a}_1^0) = \bar{\mathbf{A}}_2\mathbf{x} \qquad (7.10)$$

(7.9) und (7.10) kann man kombinieren:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{l}_1 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \mathbf{l}_2 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\bar{\mathbf{A}}_1\\ \bar{\mathbf{A}}_2\end{vmatrix}\left[(\bar{\mathbf{A}}_1^T\bar{\mathbf{A}}_2^T)\begin{vmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\bar{\mathbf{A}}_1\\ \bar{\mathbf{A}}_2\end{vmatrix}\right]^{-}(\bar{\mathbf{A}}_1^T\bar{\mathbf{A}}_2^T)\begin{vmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{l}_1 - \mathbf{a}_1^0\\ \mathbf{l}_2 - \mathbf{a}_2^0\end{vmatrix} \qquad (7.11)$$

Mit (7.11) wird gezeigt, dass man im allgemeinen G.M.-Modell zuerst die unabhängigen Beobachtungen festlegen muss, wonach man die Gewichtsmatrix (6.9) berechnen kann. Die Lösung des allgemeinen G.M.-Modells wird mit (7.11) gegeben. Andere Lösungen werden in Pringle/Rayner [1971] vorgeschlagen.

Literatur:

Caspary, W.: Parameterschätzung in linearen Modellen mit Hilfe von Projektoren. Schriftenreihe HSBw München, 10/1984, S. 25–47.

Noble, B.: Applied linear Algebra. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1969.

Pringle, R.M., Rayner, A.A.: Generalized Inverse Matrices with Applications to Statistics. Hafner Publishing Company, New York 1971.

Rao, C.: Linear Statistical Inference and Its Applications. John Wiley and Sons, New York 1973.

Tienstra, J.M.: Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observation. N.V. Vitgeverij Argus, Amsterdam 1956.

Adresse des Verfassers:
Prof. Dr. J. van Mierlo
Geodätisches Institut Universität Karlsruhe
Englerstrasse 7
D-7500 Karlsruhe

Integrierte Geodäsie und Anwendungen im GPS-Testnetz Turtmann

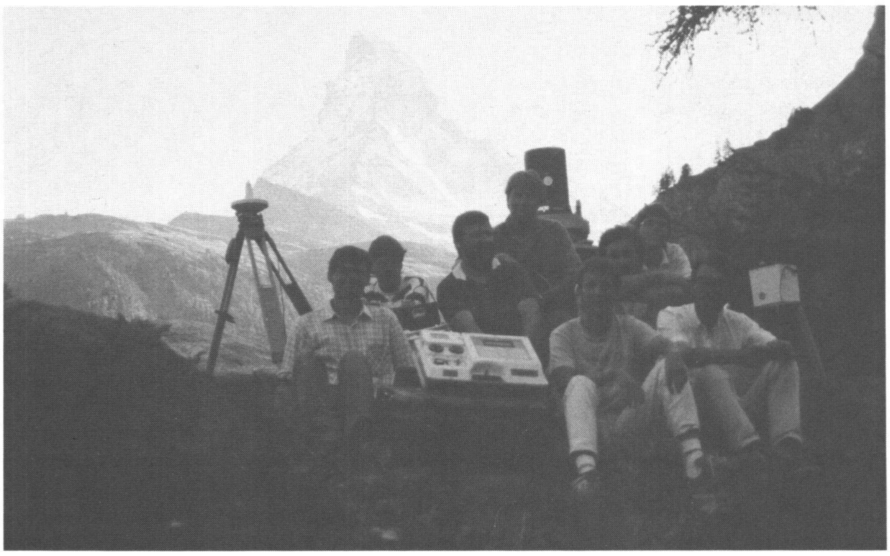
M.V. Müller, H.-G. Kahle

Zahlreiche geodätische Beobachtungsmethoden tragen zur Bestimmung dreidimensionaler Netze bei. Ein Modell zur Auswertung heterogener Daten in der Vermessung liefert die sogenannte «Integrierte Geodäsie». Der vorliegende Artikel berichtet über ihre Methoden und über Erfahrungen bei deren praktischen Anwendung im Schweizerischen GPS-Testnetz Turtmann (Kanton Wallis).

Comme de nombreuses méthodes d'observations contribuent à la détermination de réseaux tridimensionels, il est nécessaire d'avoir à sa disposition un modèle élaboré pour la compensation de cette multitude de données géodésiques hétérogènes. La géodésie integrée, dont les fondements théoriques et des expériences pratiques dans le réseau de Tourtemagne sont décrits dans cet article, remplit ces exigeances.

1. Einleitung

Die Geodäsie und Vermessungstechnik befindet sich in den letzten Jahren im Umbruch. Die Palette der geodätischen Beobachtungsinstrumente wurde in dieser Zeit um wichtige Messinstrumente erweitert. Man denke zum Beispiel an VLBI (Very Long Baseline Interferometry), SLR (Satellite Laser Ranging) und GPS (Global Positioning System). Speziell GPS wird in absehbarer Zeit bei vielen Vermessungsaufgaben nicht mehr wegzudenken sein. Einschränkende Bedingungen bei traditionellen Beobachtungsmethoden fallen bei GPS-Messungen weg: Weder braucht es eine direkte Sichtverbindung zwischen zwei Stationen, noch ist man auf schönes Wetter angewiesen. Dies erleichtert verschiedene Anwendungen. Man denke zum Beispiel an übergeordnete Grundlagenetze (Basislinien bis mehrere tausend Kilometer sind möglich [2]), an Tunnelnetze oder Deformationsmessungen. Damit kann die Geodäsie zu einem interessanten Datenlieferanten für geodynamische Fragestellungen werden. Anderseits sind geodätische Beobachtungen stark mit dem Schwerefeld der Erde korreliert (Lotabweichungen, Geoidundulationen). Damit erhebt sich die Frage, wie man alle heterogenen Daten, die zur Lösung geodätischer Aufgaben beitragen (nebst Richtungs-, Höhenwinkel-, Distanzbeobachtungen, astronomischen Messungen und nivellierten Höhenunterschieden also auch GPS-, VLBI-, SLR- und geophysikalische, zur Hauptsache gravimetrische Be-



«Integrierte Geodäsie» am Fusse des Matterhorns: Geodäsie-Studenten und -Assistenten mit GPS, Zenitkamera und Gravimeter im Diplomvermessungskurs der ETH Zürich, 1987.

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich, Separata Nr. 124.