Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 84 (1986)

Heft: 3

Artikel: Computergestützte Möglichkeiten für die Ausgleichung überschüssiger Information, einschliesslich des Problems der Lagerung des freien Netzes durch Anfelderung

Autor: Schmid, H.H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233030

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Computergestützte Möglichkeiten für die Ausgleichung überschüssiger Information, einschliesslich des Problems der Lagerung des freien Netzes durch Anfelderung

H.H. Schmid

Für die statistische Behandlung von überschüssiger Information wird ein universell anwendbares Konzept vorgeführt, dessen praktische Anwendung allerdings vom Einsatz der heute vorhandenen elektronischen Rechenkapazität abhängt. Die Einbeziehung von zusätzlichen Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten wird verallgemeinert, indem deren Aussagen wie Zufallsvariable behandelt werden. Bei genügend universeller Interpretierung des angegebenen Algorithmus wird damit die Verschmelzung von verschiedenen Messanordnungen und die Einbeziehung von Pseudobeobachtungen ermöglicht. Besondere Beachtung findet die überbestimmte Defektbeseitigung. Schliesslich wird die für die Bildmessung besonders wichtige Methode der Anfelderung des freien Netzes im Zusammenhang mit den Prinzipien der klassischen Ausgleichung erörtert.

En vue du traitement statistique d'informations surabondantes, l'auteur décrit une méthode universelle dont l'emploi pratique suppose toutefois la mise en oeuvre de la capacité de calcul électronique disponible actuellement. L'intégration d'équations de condition supplémentaires entre les inconnues est généralisée, en ce sens que leurs données sont traitées comme variables aléatoires. Par une interprétation suffisamment universelle de l'algorithme spécifié, la fusion de dispositions de mesurage différentes et la prise en compte de pseudo-observations sont rendues possible. Une attention particulière est accordée à l'élimination surdéterminée de conditions en défaut. Finalement l'auteur traite la méthode d'ajustement par zones du canevas libre, méthode particulièrement importante en photogrammétrie, en liaison avec les principes de la compensation classique.

In VPK 2/86 wurde aufgrund des mathematischen Modells einer Messanordnung die eindeutige Lösung diskutiert. Hier soll nun die Verarbeitung von überschüssiger Information betrachtet werden. Zunächst sollen einige Bemerkungen zur Bedeutung zusätzlicher Daten gemacht werden.

Im mathematischen Modell (siehe vorherigen Artikel = s.v.A.) wurden funktionale Beziehungen zwischen mathematischen Parametern aufgestellt. Diese Parameter bezeichnen dabei idealisierte Grössen der physikalischen Wirklichkeit, gekennzeichnet durch die Tatsache, dass sie die aufgestellten Funktionen widerspruchslos erfüllen. Die Anpassung des mathematischen Modells an die physikalische Wirklichkeit, d.h. der Übergang vom mathematischen zum stochastischen Modell wird grundsätzlich nötig, weil die im mathematischen Modell auftretenden idealisierten, d.h. fehlerfreien Grössen L durch Messungen ersetzt werden, die immer zumindest mit unregelmässigen Fehlern behaftet sind. D.h. die Messdaten ℓ sind Zufallsvariable, gekennzeichnet durch spezifische Qualitätsangaben, wie sie durch eine entsprechende Varianz-Kovarianz-Matrix σ_ℓ bzw. in einfachen Fällen mit einer nur diagonal besetzten Gewichtsmatrix P_ℓ ausgedrückt werden. Dabei gilt: $\sigma_\ell^{-1} = P_\ell$. Da die zu bestimmenden Parameter, die U - Grössen im mathematischen Modell, als Funktionen der Messgrössen aufgefasst werden können, werden sie als Zufallsvariable berechnet. Diese Situation erfährt auch keine grundsätzliche Änderung, wenn sich die Beseitigung eines Defektes als nötig erweist, da die dazu einzuführende zusätzliche Information, von wenigen meist theoretischen Fällen abgesehen, den Charakter von Zufallsvariablen hat. Aufgrund der heutzutage vorhandenen Rechenkapazitäten mit der Verwendung von elektronischen Rechnern kann die bis jetzt in ihren Grundzügen angegebene statistische Datenverarbeitung ökonomisch zum Einsatz kommen.

Insoweit, als die Messungen nur von zufälligem normalverteiltem Rauschen behaftet sind und mit dem entsprechenden stochastischen Modell keine zusätzlichen Widersprüche eingeführt werden, erhält man mit der klassischen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ein Werkzeug, dessen Anwendung im Einklang mit gewissen statistischen Annahmen ist. Gerade das nunmehr zur Verfügung stehende Rechenpotential hat jedoch zu einer Erweiterung der Problemstellung der statistischen Auswertung Anlass gegeben.

Das dabei eingeführte Konzept geht von der Annahme aus, dass die im stochastischen Modell auftretenden Widersprüche neben den aus dem Linearisierungsprozess hervorgehenden Anteilen nicht nur das normalverteilte Rauschen der Messungen enthalten, sondern auch von vorhandenen Unstimmigkeiten im mathematischen Modell einer spezifischen Messanordnung herrühren. Es handelt sich dabei um den Einfluss sog. systematischer Fehler, die z.B. auch unter der Gültigkeit der Annahme von fehlerfreien Messgrössen $\tilde{L}$ im mathematischen Modell zu Widerspruchsanteilen führen. Diese Systematik einer inkorrekten Simulierung der Messanordnung kann durch einen jeden der im y -Vektor vorkommenden – oder eben auch nicht vorkommenden – Parameter entstehen. Die Situation ist nicht mit dem Einfluss grober Messfehler zu erklären, obwohl vor allem beim Vorhandensein von relativ vielen kleinen, aber dennoch groben Messfehlern deren Auswirkung im Vektor der Widersprüche durchaus ähnlich sein kann. Auch dieses für die Praxis wichtige Problem wurde dank des heute zur Verfügung stehenden Rechenpotentials von verschiedenen Autoren z.T. erfolgreich aufgegriffen. Das erste Problem, systematischer Fehler betreffend, läuft auf die notwendige Verbesserung des mathematischen Modells hinaus. Aufgrund der Komplexität einer physikalisch signifikanten Lösung versucht man zuweilen das Ziel mit «Zusatzparametern» zu erreichen. Dabei wird angestrebt, die $v_\ell^T \sigma_\ell^{-1} v_\ell$ zu verringern. Oft wird der Tatsache wenig Beachtung geschenkt, dass das Ziel einer korrekten Datenauswertung nicht in der

---

Das Zeichen ~ signalisiert eine Zufallsvariable und wird gebraucht, wenn seine Anwendung der Erklärung förderlich ist.
Die Bezifferung der Formeln ist fortlaufend vom Artikel im vorigen Heft.

Produktion von möglichst kleinen Verbesserungen $\mathbf{v}_\ell$ zu sehen ist, sondern in der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der freien Variablen $\mathbf{U}$ mit realistischen mittleren Fehlern. Diese werden bei einer bestimmten Anzahl überschüssiger Informationsbits bekanntlich durch das Produkt aus dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit m_o – einer Funktion der v_ℓ - Werte – und der Inversen des entsprechenden Normalgleichungssystems, also der Q_{uu} - Matrix berechnet. Stellt m_o auf der Eingangsseite des Messystems eine von physikalischen Gegebenheiten abhängige Grösse dar, so ist die Q_{uu} -Matrix ein Ausdruck, der die Propagation des mit m_o charakterisierten Rauschens in der Messanordnung angibt. Gelegentlich wird die Verkleinerung des m_o -Wertes als Folge von Zusatzparametern im mathematischen Modell zu einer Verschlechterung der Fehlerfortpflanzung führen, die in der entsprechenden Q_{uu} - Matrix zum Ausdruck kommt. Somit muss das Produkt der beiden unter Betracht stehenden Grössen und damit die mittleren Fehler der zu bestimmenden Unbekannten nicht nötigerweise günstig beeinflusst werden. Die Bildtriangulation liefert dazu ein Beispiel. Durch Untersuchungen am eindeutigen Modell (s.v.A.) kann man nachweisen, dass die geometrische Strenge der räumlichen Bildtriangulation aufgrund der Schnittbedingung homologer Strahlen im allgemeinen eher schwach ist. Durch ungeeignete, mehr oder weniger willkürlich gewählte Zusatzparameter, die sehr wohl den $v_\ell^T \sigma_\ell^{-1} v_\ell$ -Betrag verringern können, kann sich vor allem die sich auf die Objektkoordinaten beziehende Q_{xx} verschlechtern, wodurch sich eine grossräumige Modelldeformation ergeben kann. Die Aussage, dass die eben erwähnte Auswertetechnik um so bessere Resultate liefert, je geringer die Anzahl der unabhängig eingeführten Passpunkte ist, deutet m.M.n. auf eine derartige unerwünschte Reaktion gewisser Auswertealgorithmen hin. Es ist also Vorsicht geboten bei der Anwendung unorthodoxer statistischer Methoden. Sie können unter Umständen lediglich eine sensationell erscheinende Optimierung der erzielten Genauigkeit vortäuschen. Verallgemeinert und etwas plump ausgedrückt, muss man sich als Messingenieur immer darüber im klaren sein, dass man aufgrund von statistisch-mathematischen Manipulationen aus «Dreck kein Gold» machen kann.

Für die klassische Ausgleichung bietet sich zunächst ein einfach abzuleitender Algorithmus an.

Ausgehend von der linearisierten Form des mathematischen Modells:

$$F(L^\circ, U^\circ) + \left[\frac{\delta F(y)}{\delta L}\right]_{L^\circ} \Delta L + \left[\frac{\delta F(y)}{\delta U}\right]_{U^\circ} \Delta U = 0$$

(s.v.A. Formel 2)

erhält man mit der Substitution: $\tilde{L} = \ell + \mathbf{v}_\ell$ das linearisierte stochastische Modell:

$$F(\ell\ U^\circ) + \left[\frac{\delta F(y)}{\delta L}\right]_{\ell} \mathbf{v}_\ell + \left[\frac{\delta F(y)}{\delta U}\right]_{U^\circ} \Delta U = 0 \quad (5)$$

Mit offensichtlichen Bezeichnungen ergeben sich die sog. Beobachtungsgleichungen:

$$\mathbf{A}_\ell \mathbf{v}_\ell + \mathbf{B}\ \Delta U = \mathbf{w}_\ell \quad (6)$$

Den Gleichungen (6) ist eine σ_ℓ^{-1} -Matrix zugeordnet.

Da die Anzahl der zu bestimmenden Grössen immer grösser als die Anzahl der Beobachtungsgleichungen ist, muss, um zu einer Lösung zu gelangen, eine Nebenbedingung eingeführt werden. Bei normalverteiltem Rauschen verwendet man bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate:

$$\mathbf{v}_\ell^T \sigma_\ell^{-1} \mathbf{v}_\ell = \text{Min.} \quad (7)$$

Im Einklang damit ist die Laplace Funktion:

$$\Phi = \mathbf{v}_\ell^T \sigma_\ell^{-1} \mathbf{v}_\ell - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{A}_\ell \mathbf{v}_\ell + \mathbf{B}\ \Delta U - \mathbf{w}_\ell) \quad (8)$$

Die Differenzierung von (8) nach $\mathbf{v}_\ell$ u. ΔU ergibt, wenn jede Gleichung aufgrund der Minimumbedingung gleich Null gesetzt wird:

$$-\sigma_\ell^{-1} \mathbf{v}_\ell + \mathbf{A}_\ell^T \mathbf{k}_\ell = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{k}_\ell = 0 \quad (10)$$

Aus (6), (9) und (10) ergibt sich das System:

$$\begin{array}{l} \text{aus (9)} \\ \text{aus (6)} \\ \text{aus (10)} \end{array} \begin{bmatrix} -\sigma_\ell^{-1} & \mathbf{A}_\ell^T & \\ \mathbf{A}_\ell & & \mathbf{B} \\ & \mathbf{B}^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\ell \\ \mathbf{k}_\ell \\ \Delta U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_\ell \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Die Koeffizienten-Matrix in (11) hat das Format (n + r + u) x (n + r + u), wobei n = Anzahl der Beobachtungen ℓ und somit der $\mathbf{v}_\ell$, r = Anzahl der Beobachtungsgleichungen und damit der Korrelaten $\mathbf{k}_\ell$ und ΔU = Anzahl der Unbekannten $\mathbf{U}$ bzw. deren Verbesserungen ΔU ist.

Rein formell wird mit der Invertierung der quadratischen Koeffizienten-Matrix die Lösung für die $\mathbf{v}_\ell$, $\mathbf{k}_\ell$ und ΔU -Grössen erhalten. Die invertierte Matrix hat dabei die Bedeutung einer $\mathbf{Q}$-Matrix für alle berechneten Grössen.

Ferner ergibt sich der Gewichtseinheitfehler nach der Ausgleichung zu:

$$m_o = \left[\frac{\mathbf{v}_\ell^T \sigma_\ell^{-1} \mathbf{v}_\ell}{n-u}\right]^{1/2} \quad (12)$$

Rechentechnische Vereinfachungen in bezug auf das Format des zu invertierenden Systems ergeben sich mit der Eliminierung des $\mathbf{v}_\ell$-Vektors zu:

$$\text{aus (11)} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\ell \sigma_\ell \mathbf{A}_\ell^T & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_\ell \\ \Delta U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_\ell \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

und nach weiterer Eliminierung von $\mathbf{k}_\ell$ erhält man:

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{A}_\ell \sigma_\ell \mathbf{A}_\ell^T)^{-1} \mathbf{B}\ \Delta U = \mathbf{B}^T (\mathbf{A}_\ell \sigma_\ell \mathbf{A}_\ell^T)^{-1} \mathbf{w}_\ell = \mathbf{w}_\ell^* \quad (14)$$

Mit üblichen Bezeichnungen erhält man mit (14) das sog. Normalgleichungssystem der vermittelnden Ausgleichung.

$$N_\ell\ \Delta U = \mathbf{w}_\ell^* \quad (15)$$

$$\text{oder } \Delta U = N_\ell^{-1} \mathbf{w}_\ell^* = Q_{uu}\ \mathbf{w}_\ell^* \quad (16)$$

Der grundsätzliche Algorithmus des klassischen Ausgleichsproblems ist damit vorgeführt.

Nun ergab sich (im v.A) bei der Betrachtung der eindeutigen Lösung aufgrund des mathematischen Modells eine für die Praxis wichtige Folgerung. Beim Vorhandensein eines Defektes im System (6) sind die abgeleiteten Systeme (11), (13) oder (15) singular, unabhängig von der Anzahl r der vorhandenen Beobachtungsgleichungen. Man kann in einem solchen Fall für dieses singulare Gleichungssystem die Bezeichnung «Freies Netz» einführen. Die Lösung, die man dann als die Lagerung des freien Netzes ansehen kann und die bei eindeutiger Lagerung gleichbedeutend ist mit der eindeutigen Defektbeseitigung, wird durch die Einführung von zusätzlicher Information von aussen her erreicht. Liegen im ursprünglichen Modell der Messanordnung ausschliesslich unorientierte räumliche Richtungen vor – wie bei der Bildmessung –, ist der Rang des Defektes bekanntlich gleich sieben. Natürlich können auch mehr Informa-

tionsbids, als zur eindeutigen Defektbeseitigung nötig sind, zur Verfügung stehen. Damit wird das Problem der Defektbeseitigung, also die Lagerung des freien Netzes, zu einer zusätzlichen Ausgleichsaufgabe, die im Zusammenhang mit dem bereits vorgeführten Algorithmus gelöst werden muss.

Dieses Problem kann unter der Annahme behandelt werden, dass zusätzlich zu den Beobachtungsgleichungen (6) gewisse als Bedingungsgleichungen bezeichnete Ausdrücke in bezug auf die zu bestimmenden Unbekannten vorhanden sind. Entsprechend wird als allgemeines Problem der Ausgleichsrechnung oft die «vermittelnde Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten» genannt. Hier soll die damit angesprochene Problematik verallgemeinert werden mit der Annahme, dass die Aussage erwähnter Bedingungsgleichungen im Einklang mit einer entsprechenden σ-Matrix als verbesserungswürdig betrachtet werden soll.

Solche Bedingungsgleichungen können mit $G(U) = h$ (17)

eingeführt werden, wobei sich die Bezeichnung U zumindest auf einen Teil der Unbekannten des freien Netzes bezieht.

Wiederum mit Taylorreihenlinearisierung erhält man aus (17)

$$G(U^\circ) + \left[\frac{\delta G(U)}{\delta U}\right]_{U^\circ} \Delta U = h \qquad (18)$$

und mit $\left[\frac{\delta G(U)}{\delta U}\right]_{U^\circ} = C$ sowie $h - G(U^\circ) = w_c$ (19)

erhält man die linearisierte (20)

Form: $C\,\Delta U = w_c$

Gibt die Aussage w_c zu Verbesserungen Anlass, z.B. wenn h ein Vektor gemessener Grössen ist, denen eine entsprechende $\sigma_{\tilde{k}}$ zukommt, so erhält man einen Ausdruck, der formal den Beobachtungsgleichungen (6) entspricht:

$$C\,\Delta U = w_c + v_c \quad \text{mit} \quad \sigma_{\tilde{k}} = \sigma_c \qquad (21)$$

σ_c muss natürlich eine normalisierte Varianz-Kovarianz-Matrix sein.

Die zu erfüllende Nebenbedingung

$$(v_\ell^T \sigma_\ell^{-1} v_\ell + v_c^T \sigma_c^{-1} v_c) = \text{Min.} \qquad (22)$$

ist mit der erweiterten Laplace Funktion Φ verträglich.

$$\Phi = v_\ell^T \sigma_\ell^{-1} v_\ell + v_c^T \sigma_c^{-1} v_c - 2\,k_\ell^T (A_\ell v_\ell + B\,\Delta U - w_\ell) - 2\,k_c^T (A_c v_c + C\,\Delta U - w_c) \qquad (23)$$

Mit der Differentation von (23) nach v_ℓ, v_c und ΔU sowie der Gleichsetzung dieser Ausdrücke zu Null, erhält man:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta v_\ell} = -\sigma_\ell^{-1} v_\ell + A_\ell^T k_\ell = 0 \qquad (24)$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta v_c} = -\sigma_c^{-1} v_c + A_c^T k_c = 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \Delta U} = B^T k + C^T k = 0 \qquad (26)$$

Zusammen mit den ursprünglichen Beobachtungsgleichungen (6) und den in allgemeiner Form als

$$A_c v_c + C\,\Delta U = w_c \qquad (27)$$

angeschriebenen Bedingungsgleichungen (21) ergibt sich das System:

$$\begin{array}{l} \text{aus (24)} \\ \text{aus (6)} \\ \text{aus (26)} \\ \text{aus (27)} \\ \text{aus (25)} \end{array} \begin{bmatrix} -\sigma_\ell^{-1} & A_\ell^T & & & & v_\ell \\ A_\ell & & B & & & k_\ell \\ & B^T & & C^T & & \Delta U \\ & & C & & A_c & k_c \\ & & & A_c^T & -\sigma_c^{-1} & v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_\ell \\ 0 \\ w_c \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

oder nach Eliminierung von v_ℓ, k_ℓ und v_c erhält man unter Berücksichtigung von (14):

$$\begin{bmatrix} -B^T(A_\ell \sigma_\ell A_\ell^T)^{-1} B & C^T \\ C & A_c \sigma_c A_c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_\ell^* \\ w_c \end{bmatrix} \qquad (29)$$

und mit der in (15) eingeführten Bezeichnung:

$$\begin{bmatrix} N_{FN} & C^T \\ C & -A_c \sigma_c A_c^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ -k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_\ell^* \\ w_c \end{bmatrix} \qquad (30)$$

FN bedeutet: Freies Netz

Aus der Gleichung (21) folgt, dass in dem unter Betracht stehenden Fall $A_c = -I$ ist. Damit wird (30) zu:

$$\begin{bmatrix} N_{FN} & C^T \\ C & -\sigma_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ -k_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_\ell^* \\ w_c \end{bmatrix} \qquad (31)$$

Die Zusatzinformation im Sinne von (17) bzw. (21) wird also eingeführt, indem man das Normalgleichungssystem des freien Netzes (15) mit den Bedingungsgleichungen (20) rändert und den noch freibleibenden Diagonalraum mit der σ_c-Matrix gemäss Form (31) besetzt.

Nach Elimination des k_c-Vektors ergibt sich:

$$(N_{FN} + C^T \sigma_c^{-1} C)\,\Delta U = (w_\ell^* + C^T \sigma_c^{-1} w_c) \qquad (32)$$

Der Ausdruck (32) kann auch mit offensichtlicher Bezeichnung geschrieben werden als $\bar{N}\,\Delta U = \bar{w}$ (33)

wobei $\bar{N}^{-1} = Q_{uu}$ ist.

Interpretiert man die Gleichungen (21) als Beobachtungsgleichungen und fügt sie von vornherein den Beobachtungsgleichungen (6) hinzu, kann man $\bar{N}$ und $\bar{w}$, d.h. das Gleichungssystem (33) auch mit dem konventionellen Ausgleichsalgorithmus direkt erhalten.

Sind im h-Vektor [vgl. (17)] keine direkt gemessene Grössen vorhanden, sondern bezieht sich die Zusatzinformation auf vorgegebene $\tilde{U}$-Werte, so wird h nach (17) bzw. w_c nach (19) berechnet. Zweckmässig verwendet man dabei als Annäherungswerte $U^\circ = \tilde{U}$

Mit $G(U^\circ) = G(\tilde{U}) = h$ (34)

wird nach (19) $w_c = 0$ (35)

Mit (35) wird auf der rechten Seite in (32) (zumindest in der ersten Iterationsschleife) der Vektor der Absolutglieder zu w_ℓ^*.

Bei solchen Bedingungsgleichungen ist die Matrix σ_c im Einklang mit dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu berechnen mit

$$\sigma_c = C\,\sigma_{\tilde{u}}\,C^T \qquad (36)$$

Beziehen sich die zusätzlichen Bedingungsgleichungen (21) ausschliesslich auf vorgegebene $\tilde{U}$-Werte, so ist $C = I$

Aus (36) folgt dann

$$\sigma_c = \sigma_{\tilde{u}} \qquad (37)$$

Man erhält dann für (32) die einfache und für die Praxis besonders geeignete Form:

$$(N_{FN} + \sigma_{\tilde{u}}^{-1})\,\Delta U = w_\ell^* \qquad (38)$$

Für die mit $\tilde{U}$ gestützten U-Parameter nimmt bei der Auflösung des Systems (38) der entsprechende ΔU-Vektoranteil die Bedeutung eines v_u-Vektors an. Der soweit vorgeführte Algorithmus entspricht einer Ein-Schritt-Lösung nach den Gesichtspunkten der strengen Ausgleichung aufgrund der Nebenbedingung (22).

Der Formelaufbau ist in Übereinstimmung mit der z.B. in Mitteilungen IGP (Institut für Geodäsie und Photogrammetrie) Nr. 22 (1978) aufgeführten Lösung für die Verschmelzung der Normalgleichungssysteme mehrerer Messanordnungen bzw. dem Inhalt des in Bildmessung und Luftbildwesen Nrn. 3 und 4 1965 veröffentlichten Beitrags für die Auswertung von hybriden Messanordnungen durch strenge Ausgleichung. Die Lösung gehört zu dem Problemkreis, der heute als kombinierte Ausgleichung – auch in der Bildmessung – Beachtung findet.

Die Anordnung (31) bietet sich als Basis für eine allgemeine Lösung an, vorausgesetzt, ihre Anwendungsmöglichkeit wird vielseitig genug interpretiert.

Wie bereits erklärt, führen die sich auf

die Messungen ℓ beziehenden Beobachtungsgleichungen zu dem Normalgleichungssystem $\mathbf{N}_\ell$ [vgl. (15)]. Im Falle, dass andere Typen von Messgrössen $\mathbf{m}$ zur Verfügung stehen, die über eine entsprechendes mathematisches Modell zu der Bestimmung von zumindest einem oder einigen der $\mathbf{U}$-Parameter der ersten Messanordnung beitragen, ist dann das entsprechende Normalgleichungssystem $\mathbf{N}$. Das endgültige Normalgleichungssystem $\mathbf{N}_m$ ergibt sich mit:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_\ell + \mathbf{N}_m \qquad (39)$$

wobei der entsprechende Absolutglied-Vektor berechnet wird mit:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_\ell^* + \mathbf{w}_m^* \qquad (40)$$

Allgemein kann man schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i \, \Delta \mathbf{U} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i^* \qquad (41)$$

Alle $\Delta\mathbf{U}$-Werte, die in einer spezifischen Messanordnung nicht vorhanden sind, müssen natürlich mit Null-Werten an den entsprechenden Stellen des Teilsystems besetzt werden. Ferner müssen die einzelnen σ_i-Matrizen, die den Gruppen der spezifischen Beobachtungsgleichungen zugehören, als normalisierte Varianz-Kovarianz-Matrizen eingeführt werden, d.h. sie müssen sich auf eine a priori als Gewichtseinheit angenommene m_o-Grösse beziehen. An dieser Stelle der Betrachtungen soll betont werden, dass in dem Vorgang der Normalisierung der einzelnen σ Varianz-Kovarianz-Matrizen die eigentliche Schwierigkeit in der gemeinsamen Behandlung von verschiedenartigen Messgrössen bzw. die Einbeziehung von «Pseudobeobachtungen» in einen gemeinsamen Auswertealgorithmus zu sehen ist.

Bei den hier besonders interessierenden Messverfahren ist auch bei der Berücksichtigung verschiedener Typen von Messgrössen das resultierende Gesamtsystem der Normalgleichungen singular. Es ist von einem Defekt behaftet, dessen Rang von den geometrischen Eigenschaften der vorkommenden Messgrössen abhängig ist. Die im endgültigen Normalgleichungssystem zum Ausdruck kommende Geometrie bezieht sich weiterhin auf die innere Geometrie des zu vermessenden Objektes, d.h. auf eine Figuration im Nullraum, die nicht zu einem spezifischen Bezugssystem in Verbindung steht und hier die Bezeichnung «Freies Netz» trägt. Für die somit nötig werdende Defektbeseitigung ist die Verwendung des Systems (31) aufgrund seiner vorerwähnten Anpassungsfähigkeit gut geeignet. So werden von diesem Algorithmus Probleme statistisch korrekt bedient, wie sie mit der Bereitstellung von Passpunktinformation praktisch immer auftreten. Es können auch Funktionen von $\mathbf{U}_s$-Werten als Stützinformation vorgegeben sein. Logischerweise können auch Bedingungen zwischen den zu bestimmenden Unbekannten in dieser Art und Weise berücksichtigt werden, wie z.B. solche, welche die gewichtete Gleichsetzung von Höhen gewisser Punkte zum Ziel haben, oder es kann sich auch um die funktionelle Zuordnung von gewissen zu bestimmenden Punkten zu Geraden oder anderen geometrischen Strukturen handeln. Wichtig dabei ist, dass die Aussagen dieser zusätzlichen Bedingungsgleichungen als Zufallsvariable behandelt werden können, deren Qualität durch entsprechende, natürlich auch wieder zu normalisierende Varianz-Kovarianz-Matrizen zum Ausdruck gebracht wird.

Auch hier, wie im Fall der eindeutigen Lösung (s.v.A.), kann die Eliminierung von gewissen Gruppen der Unbekannten z.B. aus rechen-ökonomischen Gründen praktisch sein, um das Format der zu invertierenden Matrix möglichst klein zu halten. Ein solcher Schritt darf aber nur *nach* der Einführung der Bedingungsgleichungen vorgenommen werden, um den Prozess der Einführung der Stützinformation nicht durch zu frühe Eliminierung von Unbekannten in seiner Universalität zu beschränken.

Die vorgeführte Lösung hat den Zweck, geometrisch ausgedrückt, das freie Netz in bezug auf seine Form und Orientierung zu einem vorgegebenen Koordinatensystem zu lagern und eventuell eine Massstabsanpassung vorzunehmen. Die Lösung wird in Übereinstimmung mit dem Prinzip der Methode der kleinsten Quadrate, d.h. unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (22) erhalten. Die vor allem zur überbestimmten Defektbeseitigung von aussen eingeführte Stützinformation, die sich meistens auf $\mathbf{U}_s$-Werte bezieht, wird als Pseudobeobachtungen den eigentlichen Messgrössen zur Seite gestellt. Eine solche Lösung erscheint gerechtfertigt, solange das Rauschen der Beobachtungen als auch das Rauschen der Pseudomessungen normal verteilt ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man als Resultat die wahrscheinlichsten Werte der berechneten Parameter und deren mittlere Fehler.

In der Praxis ist die Berechtigung der Anwendung dieser Methode – vor allem in der Bildmessung – unglücklicherweise oft fraglich. Der Grund liegt in der Tatsache, dass die einzelnen Informationspakete, die zu der kombinierten Lösung führen, unter sich nicht genügend übereinstimmen. Vor allem sind in solchen Fällen systematische Fehler in den spezifischen mathematischen Modellen zu vermuten, die in einer gemeinsamen Lösung zu Spannungen führen und als Folge zu unannehmbar grossen Verbesserungen Anlass geben.

Um unter diesen Umständen zu einem Lösungskonzept zu gelangen, soll hier zunächst eine Mehr-Schritt-Ausgleichslösung zum vorher behandelten Problem einer strengen Ausgleichung angeführt werden. Als erster Auswerteschritt wird eine eindeutige Lagerung des freien Netzes vorgenommen. Die grundsätzlich willkürliche Lösung $\mathbf{U}^*$ ist vom Ausgleichsprinzip her übereinstimmend mit einer bedingten Ausgleichung. Dieser Auswerteschritt führt also «nur» zur Ausgleichung des Rauschens der normal verteilten Fehler der ursprünglichen Beobachtungen und beeinflusst somit nur die innere Geometrie des zu vermessenden Objekts. Das erhaltene Resultat muss daraufhin zu der zusätzlich vorhandenen Stützinformation in Beziehung gesetzt werden. Ausser der Berechnung eines vom Prinzip her einer klassischen Ausgleichung entsprechenden Resultats soll dabei eine Nebenlösung erhalten werden, welche die innere Geometrie der im ersten Lösungsschritt erhaltenen Figuration nicht verändert. Das Resultat einer solchen Nebenlösung wird allgemein als Anfelderung bezeichnet.

Grundsätzlich geht es darum, das willkürliche Bezugssystem, das im ersten Lösungsschritt bei der eindeutigen Lagerung eingeführt wurde, auf den Bezugsrahmen der Stützinformation zu transformieren. Insoweit die bestehende Anordnung der $\mathbf{U}^*$-Parameter unter sich nicht verändert werden soll, darf es sich nur um eine Transformation handeln, die sich ausschliesslich auf drei Rotationen, drei Translationen und *einen* Massstabsfaktor beschränkt. Das mathematische Modell dieser Transformation ist für eine Parametereinheit $\mathbf{U}_i^*$:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{I}\,s\,\mathbf{U}_i^* + \Delta\mathbf{t} - \mathbf{U}_{s_i} = \mathbf{0} \qquad (42)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{D}$ eine sich auf drei Rotationen beziehende Drehmatrix, $\Delta\mathbf{t}$ einen räumlichen Translationsvektor und s einen Massstabsfaktor. Das entsprechende stochastische Modell ist wiederum für eine $\mathbf{U}_i^*$-Einheit:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{I}\,s\,(\mathbf{U}_i^* + \mathbf{v}_{u_i^*}) + \Delta\mathbf{t} - (\mathbf{U}_{s_i} + \mathbf{v}_{u_{s_i}}) = \mathbf{0} \qquad (43)$$

Die Bezeichnung U_S wird für die Stützwerte gebraucht. Im allgemeinen Fall geht es also darum, sich für sieben Transformationsparameter zu entscheiden. Offensichtlich gibt es dafür eine praktisch unbegrenzte Vielheit möglicher Transformationsgrössen. Deshalb ist es unumgänglich, eine Nebenbedingung einzuführen, um eine eindeutige quantitative Festlegung der sieben Transformationsparameter $\mathbf{p}$ zu erreichen. Die Wahl der Form dieser Bedingung ist grundsätzlich willkürlich. Diese Feststellung ist für die statistische Interpretation des Resultates von Bedeutung.

Ist die Annahme gerechtfertigt, dass in der zur Auswertung anstehenden Messanordnung nur normalverteiltes Rauschen vorkommt, ausgedrückt mit den Varianz-Kovarianz-Matrizen $\sigma_{\tilde{u}^*}$ und $\sigma_{\tilde{u}_S}$, ist die zu erfüllende Nebenbedingung:

$$\mathbf{v}_{u^*}^T \sigma_{\tilde{u}^*}^{-1} \mathbf{v}_{u^*} + \mathbf{v}_{\tilde{u}_S}^T \sigma_{\tilde{u}_S}^{-1} \mathbf{v}_{\tilde{u}_S} = \text{Min.} \quad (44)$$

Gelingt es aufgrund der gewählten Nebenbedingung einen bestimmten Satz von Transformationsparametern zu bestimmen, so wird die statistische Qualität des Endresultates abhängig sein von der $Q_{u^*u^*}$ bzw. der $\sigma_{\tilde{u}^*}$ aus dem ersten Lösungsschritt und der Auswirkung der Q_{pp}, die sich bei der Berechnung der Transformationsparameter in bezug auf die gewählte Nebenbedingung (44) ergeben hat.

Der Algorithmus für die Bestimmung der Transformationsparameter folgt der in der IGP-Mitteilung Nr. 23 (1978) beschriebenen Berechnungsmethode der räumlichen Koordinatentransformation zweier unabhängiger Punkthaufen bei strenger Ausgleichung.

Die folgende Skizze 1 zeigt den bisher beschriebenen Lösungsweg für eine Parametereinheit U_i schematisch. Er besteht als erster Schritt aus der eindeutigen Lagerung des freien Netzes durch die Einführung von fehlerfreier, grundsätzlich willkürlicher, minimaler Stützinformation (Resultat: U^*-Werte). Als zweiter Auswerteschritt folgt die Berechnung der Transformationsparameter im Einklang mit der Nebenbedingung (44). Der dritte Rechenschritt befasst sich mit der Transformation der U^*-Resultate in die Endergebnisse.

Ist auch eine detaillierte Darstellung des Anfelderungs-Algorithmus in dieser Abhandlung nicht vorgesehen, so sollen vollständigkeitshalber einige diesbezügliche Bemerkungen gemacht werden.

Wie bereits erwähnt, ist die Anwendung einer Anfelderungslösung besonders für den Fall geeignet, wenn entweder das zum freien Netz führende mathematische Modell bzw. die ursprünglichen Messdaten und/oder die als Stützinformation bereitgestellten Parameter nicht nur von normalverteiltem Rauschen behaftet sind, sondern zusätzliche systematische Fehleranteile vorliegen, die das Resultat einer strengen Ausgleichung ungünstig beeinflussen. In der Praxis wird für die Lösung oft die Helmert Anfelderung angewendet. Es handelt sich dabei um eine Einschrittlösung, die sich auf die Form (31) stützt.

Bei dieser Lösung werden die Transformationsparameter nicht explizit bestimmt, sondern ihre Auswirkung wird mit Bedingungsgleichungen in bezug auf alle bei der Anfelderung beteiligten Punkte bzw. auf die im Normalgleichungssystem des freien Netzes (15) auftretenden entsprechenden ΔU -Werte ausgedrückt. Die Helmertbedingungen haben die Form von linearisierten Bedingungsgleichungen (20). Im Einklang mit den anfänglich gemachten Bemerkungen handelt es sich dabei um die Auswirkung von höchstens sieben Transformationsparametern.

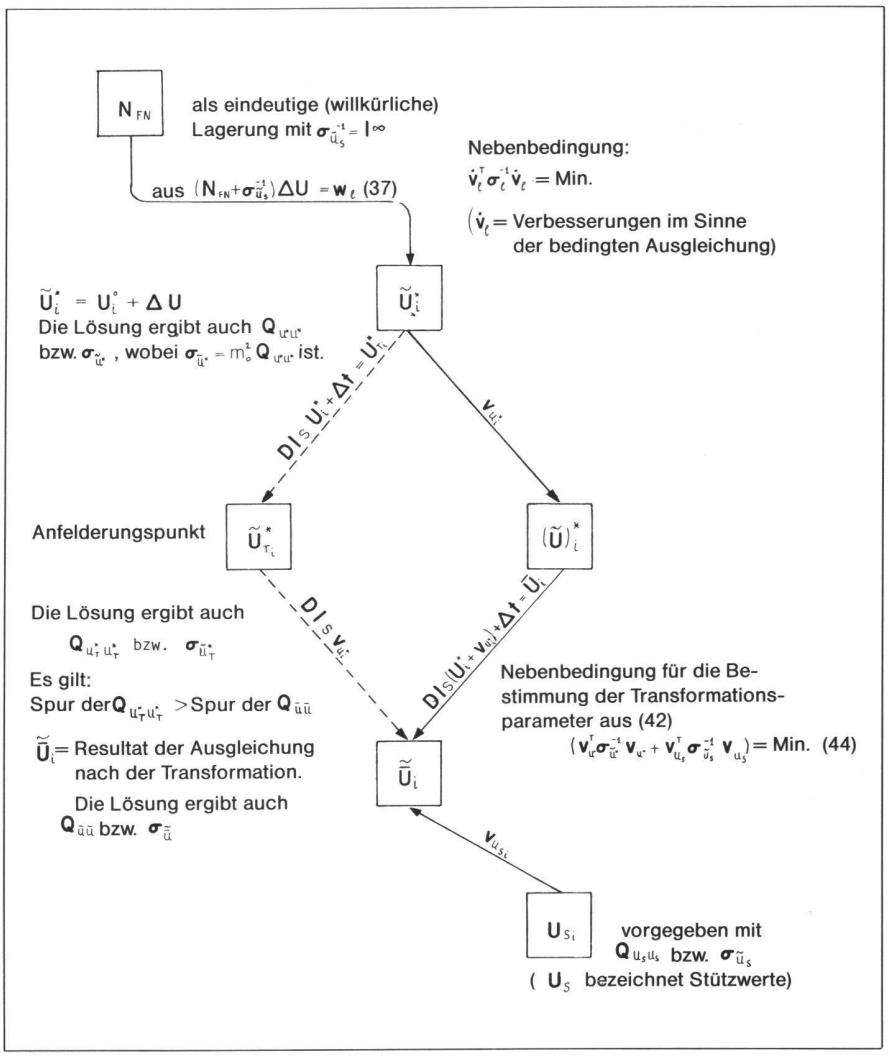
Deshalb treten bei der Helmertanfelderung für die Defektbeseitigung maximal sieben Bedingungsgleichungen auf. Folglich sind die in (21) auftretenden $\mathbf{v}_C$ -Werte alle gleich Null. Die in (31) vorkommende σ_C muss bei der klassischen Helmertanfelderung mit $\sigma_C = 0$ eingeführt werden. Diese willkürliche Massnahme ist, obgleich die Koeffizientenmatrix der Bedingungsgleichungen $C \neq 0$ ist, gleichbedeutend mit der willkürlichen Annahme von $\sigma_{\tilde{u}_S} = 0$. D.h. die Stützinformation U_S wird bei der Helmertanfelderung als fehlerfrei angenommen. Damit wird die zu erfüllende Nebenbedingung zu: $\Delta^T\Delta$ = Minimum (46) oder in etwas ausführlicher Schreibweise ist die Zielfunktion (47)

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^T \Delta_i = \text{Minimum} \quad (47)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta} = 0 \quad (48)$$

δ (drei Rotationen, drei Translationen, ein Massstabsfaktor)



Durchgezogene Linien zeigen den Lösungsweg einer Ausgleichung an, gestrichelte Linien den einer Anfelderung.

Man erhält somit:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta(\text{var.})} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\delta \Delta_i^T}{\delta(\text{var.})} \Delta_i + \Delta_i^T \frac{\delta \Delta_i}{\delta(\text{var.})} \right] = 0 \qquad (49)$$

oder aus (49):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta \Delta_i^T}{\delta(\text{var.})} \Delta_i = 0 \qquad (50)$$

Die entsprechenden Gleichungen führen auf die sieben Helmertbedingungsgleichungen, welchen die Auswirkung von drei Translationen, drei Rotationen und *einem* Massstabsfaktor entsprechen. Mit diesen ist gemäss (31) das Normalgleichungssystem des freien Netzes zu rändern und mit der oben erwähnten σ_c -Matrix zu ergänzen. Aufgrund von (50) ist $\mathbf{w}_c = 0$

Die bei der Berechnung des Resultates auftretende Inverse hat aufgrund der $\sigma_c = 0$ eine Minimalspur, ist aber in ihrer statistischen Bedeutung schwer zu erklären. Vgl. dazu Gotthardt, der schreibt, dass «Genauigkeitsangaben der mit der Helmertanfelderung gefundenen Werte sich nicht auf ein bequem angebbares System beziehen, sondern auf eine abstrakte Nebenbedingung».

Die hier im Grundsätzlichen vorgestellten Lösungswege für das Problem der Anfelderung haben für geodätische Triangulationsaufgaben oft Bedeutung. Ganz besonders gilt dies aber für die räumliche Bildtriangulation.

So ist das klassische Verfahren der Analog-Zweibildauswertung ein typisches Mehr-Schritt-Verfahren und bezieht sich im ersten Auswerteschritt, der sog. Relativorientierung, auf die eindeutige Lagerung der aus dem geometrischen Inhalt der beiden unter Betracht stehenden Messbilder abgeleiteten Triangulationsfiguration, die man sich als freies Netz vorstellen kann. Die zur Defektbeseitigung von aussen einzuführende Zusatzinformation muss sich, wie schon mehrmals erwähnt, auf sieben geeignete Parameter beziehen. Diese müssen, da bei der Aufstellung des entsprechenden mathematischen Modells (Koplanaritätsbedingung) die Objektkoordinaten algebraisch eliminiert wurden, Elemente der äusseren Orientierung sein. Wie wohl bekannt, werden diese in bezug auf ein Maschinen-Koordinatensystem des Analogauswertegerätes eingeführt. Im weiteren Verlauf der Auswertung werden diese Parameter als fehlerfreie Grössen behandelt. Beim ersten Auswerteschritt handelt es sich also um die vorher beschriebene grundsätzlich willkürliche Lösung der eindeutigen Lagerung des freien Netzes. Die Tatsache, dass im System des freien Netzes kaum überbestimmende Information zur Anwendung kommt, deutet auf die statistische Schwäche der Analogmethode hin, ändert aber in keiner Weise die grundsätzliche Situation. Die im folgenden Auswerteschritt – absolute Modellorientierung – eingeführte zusätzliche Information genügt in der klassischen Analogmethode nur für eine eindeutige Koordinatentransformation. Das im Maschinen-Koordinatensystem erhaltene photogrammetrische Modell wird bei der absoluten Orientierung in seiner inneren Geometrie unverändert übernommen. Somit bleibt die im ersten Auswerteschritt erhaltene innere Geometrie des stereoskopischen Modells erhalten. Der zweite Auswerteschritt, die sog. absolute Orientierung, entspricht also einer eindeutigen Anfelderung.

Zwingt sich diese Sachlage auch aufgrund der den Konstruktionen der photogrammetrischen Analogauswertegeräte zugrunde liegenden Lösungsidee auf, so wird damit einer aus praktischer Sicht resultierenden Forderung Rechnung getragen.

Solange menschliche Operateure die Auswertung photogrammetrischer Modelle, unterstützt durch ihr stereoskopisches Sehvermögen, ausführen, wird sich schon wegen dem ökonomischen Ablauf des Arbeitsvorganges die Forderung nach möglichst kleinen Restparallaxen ergeben. In anderen Worten: Der Vorgang der absoluten Orientierung soll die Geometrie des mit der relativen Orientierung erhaltenen Modells nicht ungünstig beeinflussen. Es sollen möglichst keine zusätzlichen Parallaxen erzeugt werden, deren Auftreten den Auswertevorgang erschweren. Erst mit der Annahme einer leistungsfähigen und ökonomisch vertretbaren numerischen Bildkorrelation dürfte sich in dieser Hinsicht für die aufgeworfene Problematik eine Lösung abzeichnen, die es ermöglichen sollte, das photogrammetrische freie Netz in eine überschüssige Menge von unabhängig gegebener Stützinformation in statistisch korrekter Weise zu lagern. Darüber hinaus wird aber die Verschmelzung von photogrammetrischer Information mit geodätischen Stützwerten auch bei der numerischen Auswertung grösserer Bildverbände oft im Sinne einer strengen Ausgleichung zu unbefriedigenden Resultaten führen. Deshalb ist eine der vorher angeführten Anfelderungsmöglichkeiten von grundsätzlicher Bedeutung.

Alle hier angesprochenen Möglichkeiten, angefangen mit der Ausgleichsmethode der kleinsten Quadrate vor allem für grosse Systeme, die Berechnung aller dabei interessierenden statistischen Angaben, über die Zusammenfassung von verschiedenartigen Messverfahren in eine einheitliche Ausgleichung und schliesslich eine statistisch korrekte Verschmelzung von verschiedenen Informationspaketen mit zusätzlicher als sog. Pseudomessungen von aussen zur Verfügung gestellter Stützinformation wird sich nur praktisch verwirklichen lassen, wenn ein genügend grosses Rechenpotential zur Verfügung steht. Umgekehrt verlangt die ökonomisch vertretbare Präsenz elektronischer Rechen- und Steuermöglichkeiten bei der Auswertung von Messungen – und damit auch in der Bildmessung – die optimale Verwendung dieses Potentials. In anderen Worten: Das Problem der optimalen Anwendung der elektronischen Rechentechnik einschliesslich deren Real-time-Kapazität sowie deren Verwendung im Instrumentenbau durch die sog. «high-technology» fordert die Aufstellung optimal anwendbarer Software. In dieser Aufgabe liegt m.M.n. auch für die Bildmessung ein guter Teil ihrer Zukunft.

Literatur

Für die Interpretierung der in VPK 11/85 veröffentlichten Abhandlung und der Bemerkungen in diesem Artikel werden die bereits erwähnten Aufsätze genannt:

H. Schmid: Über den Wandel der geometrisch-algebraischen Modellvorstellung in der Photogrammetrie unter dem Einfluss computergestützter Auswerteverfahren. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 7-8/79, S. 197–205.

H. Schmid: Ein allgemeiner Ausgleichs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie. Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Nr. 22, 1978.

H. Schmid, S. Heggli: Räumliche Koordinatentransformation. Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Nr. 23, 1978.

H. Schmid, R. Scherrer: Vom freien zum gelagerten Netz. Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Nr. 29, 1980.

Adresse des Verfassers:

Hellmut H. Schmid
em. Prof. ETH Zürich, Dr. Dr. h.c.
Baermattweg 10, CH-3324 Hindelbank