Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 84 (1986)

Heft: 8: 125 Jahre Schweizerische Geodätische Kommission

Artikel: Gravimetrisches Geoid der Schweiz

Autor: Geiger, A. / Kahle, H.-G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233052

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Gravimetrisches Geoid der Schweiz

A. Geiger, H.-G. Kahle

Im vorliegenden Aufsatz wird die Methode der Stokes'schen Integration zur Geoidbestimmung allgemein dargelegt und am konkreten Beispiel der Schweiz angewendet. Einige Anwendungsmöglichkeiten der Fouriertransformation in der Physikalischen Geodäsie werden in geraffter Form angedeutet. In den Berechnungen wurde anhand der Stokes'schen Formel ein Differenzgeoid zum Referenzgeoid, dem als Kugelfunktionsreihe dargestellten Goddard Earth Model (GEM 9) bestimmt. Gesonderte Behandlung erfuhr der das Schwerefeld stark störende Ivrea-Körper. Eine Transformation des gravimetrischen Geoides auf das astro-geodätische Geoid zeigt für die signifikanten Punkte eine Übereinstimmung, die im Mittel besser als 30 cm ist. Anhand der Transformation wird die Beziehung zwischen dem Schweizer Datum und dem internationalen IAG 75-Referenzsystem abgeleitet.

Il est question, dans cet ouvrage, de présenter la détermination du géoïde par la méthode de Stokes en général ainsi que de démontrer l'application de cette dernière, prenant pour exemple la Suisse. Quelques applications de la transformation de Fourier dans le domaine de la géodésie seront évoquées. Un géoïde différentiel a été calculé à partir de la formule de Stokes, ceci par rapport au géoïde de référence (le Goddard Earth Model [GEM 9]) décrit en termes de série de fonctions sphériques. Les masses perturbatrices du champ gravitationel du corps d'Ivrée, situé au sud de la Suisse, ont subi un traitement spécial. La transformation du géoïde gravimétrique sur le géoïde astrométrique révèle une correlation entre les points non situés à proximité immédiate du bord d'intégration d'environ 30 cm. Les paramètres de transformation décrivent la liaison entre le système de référence suisse (ellipsoïde de Bessel) et le système de référence international IAG 75.

1. Einleitung

Als die NASA vor elf Jahren damit begann, die Meeresoberfläche mit Hilfe des Radar-Satelliten GEOS-3 (J.G.R., 1979) im dm-Genauigkeitsbereich zu kartieren, erwarteten vor allem die Ozeanographen wertvolle Informationen über den globalen Verlauf von grossräumigen Meeresströmungen und Seegangshöhen. Ihr langfristiges Ziel war es, Vorhersagen über die zeitlichen Änderungen der Meeresströmungen (z.B. Golf-Strom) vornehmen zu können. Eines der sensationellen ersten Teilergebnisse war dabei die Entdeckung, dass die zirkumpazifischen und Indonesischen Tiefseegräben mit einer relativ grossen Depression der Wasseroberfläche in der Grössenordnung von 5 – 10 m verbunden waren (Chapman and Talwani, 1979). Diese (zeitlich) konstante Depression des Meeresniveaus, die den Grabenzonen über Tausenden von Kilometern hinweg folgt, liess sich nicht mit ozeanographischen oder meteorologischen Phänomenen erklären. Stattdessen musste sie als Störung im Schwerefeld der Erde interpretiert werden. Dass die mittlere Meeresoberfläche als Niveaufläche des Schwerepotentials der Erde angesehen werden kann und die gravitativen Effekte der Massenverteilung des Erdinnern widerspiegelt, ermöglichte aus den Messungen des zweiten ozeanographischen Radar-Satelliten SEASAT (Start 1978, Bernstein (ed.), 1982; Kirwan et al. (eds.), 1983), die Feinstruktur des Schwerefeldes zu bestimmen. Aus den Anomalien des Schwerefeldes lassen sich das Relief des Meeresbodens sowie die Massenverteilung im Erdinnern ableiten. Dank dieser sogenannten Satellitenaltimetrischen Methode konnten in jüngster Zeit viele bisher unbekannte submarine Gebirge, Seamounts, Tiefseegräben und Bruchzonen entdeckt sowie neue Erkenntnisse über die Struktur und elastischen Eigenschaften der Erdkruste gewonnen werden (z.B. Watts and Ribe, 1984).

Wenn man sich die Ozeane durch die Kontinente hindurch mit Kanälen weltweit verbunden vorstellt, so ergibt sich eine Fläche, die *physikalisch* gesehen, eine Äquipotentialfläche des Schwerefeldes der Erde ist. Diese Niveaufläche wird als Geoid bezeichnet, und die Höhenänderungen der Niveauflächen nennt man Geoidundulationen. Besonders grosse Geoid-Anomalien sind das Minimum im Indischen Ozean (-100 m relativ zum globalen Referenz-Ellipsoid [Kahle et al., 1978]) sowie das Maximum im nördlichen Atlantik (+70 m [Chapmann and Talwani, 1979]). In der Schweiz liegt das Geoid im Mittel 50 m über dem Erdellipsoid, wie im vorliegenden Aufsatz aufgezeigt wird.

Ähnlich wie über den Ozeanen werden auch im kontinentalen Bereich lokale Krümmungsanomalien des Geoids durch die gravitativen Wirkungen der topographischen Massen (Gebirge, Seen, Täler) und der Störungsmassen im Erdinnern verursacht. Einen besonders starken Einfluss üben dabei Gebirgsmassen, wie z.B. die Alpen aus. Hier können insbesondere auch die Überlagerungen der topographischen Effekte mit den Gravitationseffekten derjenigen Störungsmassen studiert werden, die infolge der Kollision zwischen der afrikanischen und der eurasischen Lithosphärenplatte in der alpinen Erdkruste angetroffen werden (Mueller, St., 1982).

Da das Geoid die natürliche Referenzfläche der meisten geodätischen Beobachtungsgrössen darstellt, standen früher die Anwendungen der Geoidbestimmung in der Landesvermessung im Vordergrund.

In letzter Zeit ist zusätzlich der Fragenkreis um die anomale Dichtverteilung im Untergrund der Alpen mitaufgenommen worden. Dies steht nicht zuletzt auch im Zusammenhang mit aktuellen Forschungsprojekten der Geophysiker und Geologen, die in diesem Sommer im Rahmen des Nationalen Forschungsprogramms «Geologische Tiefenstruktur der Schweiz» (NFP 20) begonnen werden.

Im Jahr 1984 hat das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie (IGP) der ETH Zürich zwei Forschungsprojekte in Angriff genommen, die wichtige Grundlagen für die spätere Interpretation der Gravitationsanomalien liefern dürften. Geographisches Zielobjekt sind die südlichen Regionen der Schweiz, wo die Zone Ivrea-Verbano grosse Störungen des Schwerefeldes verursacht (Bürki, 1985 a,b). Dort befindet sich der sogenannte Ivrea-Körper, der aus Gesteinsmaterial besteht, das der unteren Erdkruste und dem oberen Erdmantel entspricht. Die gravitativen Einflüsse dieses bis an die Erdoberfläche hinaufreichenden Störkörpers gehören weltweit zu den grössten Schwerefeld-Anomalien. Für die Geoidbestimmung dieser anomalen Zone wurde eine Kombination mehrerer Verfahren angewandt:

(1) Astro-Geodätische Methode

Mit einem in der Lotlinie ausgerichteten transportablen Zenitkamera-Messsystem (Bürki et al., 1983) werden Ausschnitte des Fixsternhimmels im jeweiligen Zenit der Beobachtungsorte photographiert und daraus durch Anschluss an das astronomische Fixsternsystem die Richtungen der örtlichen Schwerevektoren bestimmt. Die Differenzen gegenüber den Richtungen der Flächennormalen des Referenzellipsoides ergeben die sogenannten *Lotabweichungen*. Diese vom Prinzip her konventionellen terrestrischen Messungen (astro-geodätische Methode) werden mit modernen Satellitenmethoden, wie dem Dopplerverfahren und in Zukunft auch mit GPS-Messungen kombiniert.

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
ETH Hönggerberg, CH-8093 Zürich
Separata Nr. 106

(2) Gravimetrische Methode
Im Gegensatz zur astro-geodätischen Methode, die auf Lotabweichungen beruht, werden bei der gravimetrischen Methode *Schwereanomalien* verwendet. Der vorliegende Aufsatz befasst sich mit der Anwendung der letzten Methode. Ein besonderes Problem (dafür aber auch ein besonderes Interesse) bieten die Hochgebirgszonen der Schweizer Alpen, denen grössere Beachtung bei der Geoidbestimmung geschenkt werden müssen.

2. Theoretische Grundlagen zur gravimetrischen Geoidbestimmung

Für die begriffliche Klarstellung der ausgeführten potentialtheoretischen Untersuchungen werden zunächst einige Definitionen zum Schwerefeld der Erde gegeben (Kahle, 1986).

2.1. Schwerepotential

Das Schwerepotential besteht aus zwei Anteilen: dem Gravitations- und dem Zentrifugalpotential.

2.1.1 Gravitationspotential
Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz (1687) ist die auf ein Massenelement m wirkende Gravitationskraft F(P) der Erde in einem Punkt P – mit den erdbezogenen, geozentrischen kartesischen Koordianten X, Y und Z – gegeben durch das Integral in Abb. 1.

Das Vektorfeld $\vec{F}$ wird als Gravitations-Kraftfeld bezeichnet. Es ist ein wirbelfreies Feld:

$$\text{rot}\,\vec{F} = 0.$$

Die pro Einheitsmasse m wirkende Gravitationskraft hat die physikalische Bedeutung einer Beschleunigung. Sie wird als Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}_v$ bezeichnet:

$$\vec{g}_v = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Physikalische Definition des Gravitationspotentials

In einem Punkt P (X,Y,Z) des Gravitationsfeldes $\vec{F}$ ist der Wert des Gravitationspotentials V* (P) gleich der Arbeit A, die *«gegen»* die Gravitationskraft $\vec{F}$ geleistet werden muss, um eine Punktmasse m aus dem Nullpunkt, der willkürlich gewählt werden kann, in den Punkt P überzuführen. Der Potentialunterschied dV* zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten P_1 und P_2 beträgt:

$$dV^* = -\frac{dA}{m} = -\left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\vec{dr}\right) = -\left(\vec{g}_v\cdot\vec{dr}\right),$$

wenn $\vec{dr}$ der Ortsvektor zwischen P_1 und P_2 ist.

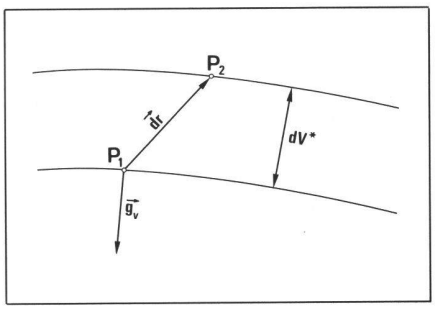


Abb. 2: Zur Definition des Gravitationspotential-Unterschiedes dV*

Wegen $dV^* = (\text{grad}V^*\cdot\vec{dr})$ gilt für die Gravitationsbeschleunigung

$$\vec{g}_v = -\,\text{grad}\,V^* = -\nabla V^*,$$

mit ∇ = Nabla-Operator.

Geodätische Definition des Gravitationspotentials:
In der Geodäsie pflegt man als Gravitationspotential-Differenz dV diejenige Arbeit zu definieren, die pro Einheitsmasse *von* der Gravitationskraft bei der Verschiebung um $\vec{dr}$ geleistet wird:

$$dV = -\,dV^* = +\,\vec{g}_v\cdot\vec{dr}.$$

In diesem Fall gilt für $\vec{g}_v$:

$$\vec{g}_v = +\,\text{grad}\,V.$$

Der Wert des Gravitationspotentials V(P) selbst entspricht derjenigen Arbeit, die von der Gravitationskraft geleistet wird, wenn die Einheitsmasse aus dem Unendlichen (Nullpunkt) zum Punkt P bewegt wird:

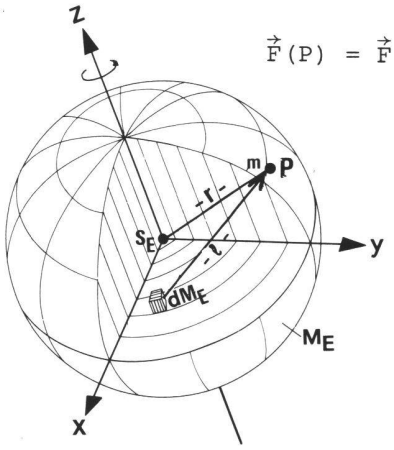
$$V(P) = \int_{\infty}^{P}\vec{g}_v\cdot\vec{dr} = G\iiint\frac{dM_E}{l}$$

2.1.2 Zentrifugalpotential U_Z
Der zweite Anteil des Schwerepotentials der Erde ist das Potential der Zentrifugalbeschleunigung U_Z (P) = U_Z (X,Y,Z). Dessen Wert pro Einheitsmasse beträgt im Punkt P:

$$U_Z(P) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2_b = \frac{1}{2}\omega^2\,(X^2+Y^2)$$

mit r_b = Breitenkreis-Radius und
ω = Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation der Erde:

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{Sterntag}} = \frac{2\pi}{86'164{,}09\ \text{s}}$$
$$= [7{,}292115\cdot 10^{-5}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}]$$



$$\vec{F}(P) = \vec{F}(X,Y,Z) = -\,Gm\iiint_{M_E}\frac{dM_E}{l^2}\,\frac{\vec{l}}{l}$$

G = Gravitationskonstante = (6.672 ± 0.004) · 10^{-11} $[m^3 kg^{-1} s^{-2}]$
M_E = Erdmasse, m = Massenelement im Punkt P(X,Y,Z)
S_E = Geozentrum = Ursprung des (X,Y,Z)-Koordinatensystems
Z-Achse ≙ mittlere Rotationsachse der Erde
X-Achse ≙ liegt in der Greenwich-Meridianebene und steht senkrecht auf der Rotationsachse
Y-Achse ≙ steht senkrecht auf der (X-Z)-Ebene und ist so gerichtet, dass X,Y,Z ein rechtshändiges Koordinatensystem bildet.
(X,Y)-Ebene = Aequatorialebene
$r = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$

Abb. 1: Zur Berechnung des Gravitationspotentials der Erde in einem Aufpunkt P (x,y,z)

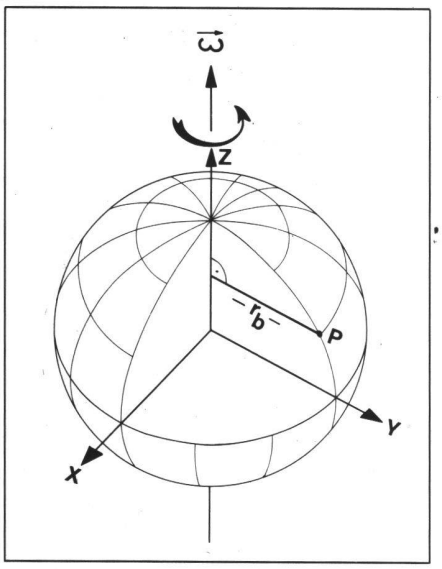


Abb. 3: Definition des Zentrifugalpotentials, r_b = Breitenkreisradius

Die Energie der Erdrotation beträgt $\approx 10^{36}$ erg ≙ 10^{14} Megatonnen TNT

Das *Schwerepotential* W ist definitionsgemäss gleich der Summe aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential U_Z (pro Einheitsmasse):

$$W = V + U_Z = G \iiint_{M_E} \frac{dM_E}{l} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2_b$$

Neue SI-Mass-Einheit:

$[m^2s^{-2}]$ = Arbeit pro Einheitsmasse
Frühere Einheit:
$[erg\ g^{-1}] = [cm^2s^{-2}] = 10^{-4}\ [m^2s^{-2}]$
Zahlenwert: W im mittleren Meeresniveau $= 6{,}263\,683 \cdot 10^{-7}\ [m^2s^{-2}]$
Jedem Punkt P (X,Y,Z) des Raumes kann ein *skalarer* Wert des Schwerepotentials gemäss obiger Formel zugeordnet werden. Das entsprechende Feld heisst *Schwerefeld* der Erde.

2.2 Niveauflächen, Lotlinien und Schwerebeschleunigung

Das Schwerepotential W ist eine eindeutige, stetige und differenzierbare Funktion im ganzen Aussenraum.
Die Flächen konstanten Schwerepotentials
$W = W(r) = const$
bezeichnet man als Aequipotential- oder Niveauflächen.
Der Potentialunterschied dW zweier benachbarter Niveauflächen zwischen den Punkten P_2 und P_1 beträgt

$$dW = W(P_2) - W(P_1) = \vec{g} \cdot \vec{ds}$$
(Skalarprodukt),

wobei
$\vec{ds}$ = Ortsvektor zwischen P_1 und P_2
und
$\vec{g}$ = grad W

$$= \left(\frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial Y}, \frac{\partial W}{\partial Z}\right) = \left(W_X, W_Y, W_Z\right).$$

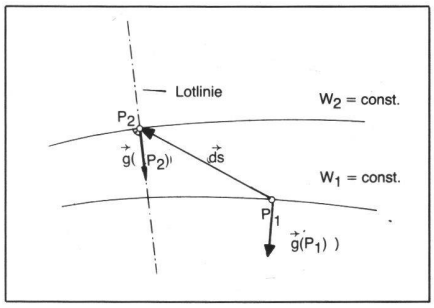


Abb. 4: Schwerebeschleunigung, Niveaufläche und Lotlinie

Der als Schwerevektor bezeichnete Vektor $\vec{g}$ hat

(1) einen Betrag $= |\vec{g}| = g$ und
(2) eine Richtung.

(1) Der *Betrag* von $\vec{g}$ heisst Schwerebeschleunigung oder kurz: Schwere.
Die neue SI-Einheit von g ist
$[ms^{-2}] = [Nkg^{-1}]$.
Frühere Einheit:
$[mgal] = 10^{-3}[gal] = 10^{-5}[ms^{-2}]$.
Moderne Gravimeter vermögen Schwereunterschiede zwischen 10^{-7} bis 10^{-8} $[ms^{-2}]$ zu messen.

(2) Die *Richtung* von $\vec{g}$ ist identisch mit der Richtung der Lotlinie. Sie steht senkrecht auf der Aequipotentialfläche, die durch den betreffenden Punkt (z.B. P_2) geht.

Die Orthogonaltrajektorien zu den Aequipotentialflächen heissen:

Schwerkraft- oder Schwerefeldlinien.

Die Tangenten an diese schwach gekrümmten Feldlinien sind jeweils die Lotlinien.

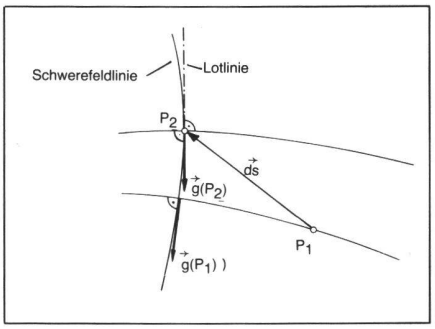


Abb. 5: Schwerefeld- und Lotlinie

2.3 Das geodätische Randwertproblem

2.3.1 Beziehung zwischen Schwereanomalien und Störpotential

In der Gravimetrie bestimmt man die Differenz zwischen der gemessenen Schwerebeschleunigung $\vec{g}(P_0)$ im Punkt P_0 auf dem Geoid und der berechneten Normalschwere $\vec{g}_n(Q_0) = \vec{g}_{norm}(Q_0)$ im Punkt Q_0 auf dem Erdellipsoid. Die Differenz der Beträge dieser Schwerebeschleunigungen wird als Schwereanomalie

$$\Delta g = g(P_0) - g_n(Q_0)$$

bezeichnet.
Taylor-Entwicklung für $g_n(Q_0)$:

$$g_n(Q_0) = g_n(P_0) - \frac{\partial g_n}{\partial N} N + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

Damit folgt

$$\Delta g = g(P_0) - g_n(P_0) + \frac{\partial g_n}{\partial N} N + \ldots \qquad (*)$$

Die Differenz $g(P_0) - g_n(P_0)$ setzen wir in Beziehung zum Gravitationspotential T der Störungsmassen (= Störpotential),

$$T(P_0) = W(P_0) - U(P_0),$$

welches der Differenz zwischen dem Schwerepotential $W(P_0)$ der (wirklichen) Erde und dem Schwerepotential $U(P_0)$ der Normalerde (Erdellipsoid) entspricht. Für die radiale Ableitung $\frac{\partial T}{\partial N}$ des Störpotentials T längs der Ellipsoidnormalen (N positiv nach aussen) gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial N} = \frac{\partial W}{\partial N} - \frac{\partial U}{\partial N}$$

bzw. für Lotabweichungen
$\varepsilon < 1'$ ($\cos\varepsilon \ll 1$):

$$\frac{\partial T}{\partial N} = -g(P_0) + g_n(P_0),$$

wobei $g = |\vec{g}|$
und $g_n = |\vec{g}_n|$.

Einsetzen dieser Beziehung in (*) ergibt (unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial N} + \frac{\partial g_n}{\partial N} N.$$

Setzt man ausserdem:

$$N = \frac{T(P_0)}{g_n(Q_0)}, \text{ BRUNSsches Theorem}$$

so ergibt sich die Grundgleichung des sogenannten geodätischen Randwertproblems:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial N} + \frac{1}{g_n}\frac{\partial g_n}{\partial N} T.$$

In sphärischer Approximation:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T,$$

wobei R = mittlerer Erdradius: 6371 km
und r = Abstand vom Erdmittelpunkt.

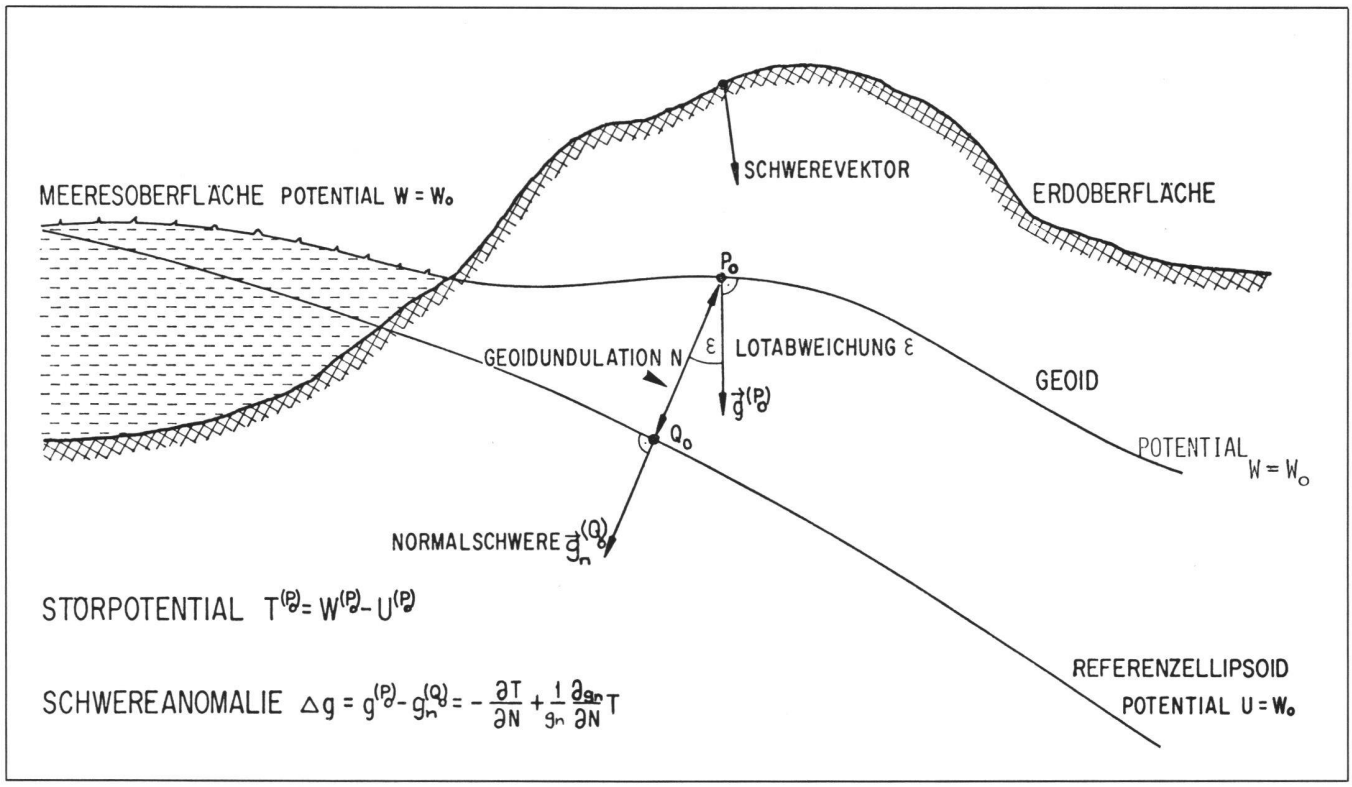


Abb. 6. Geoid, Ellipsoid und Geoidundulation

2.3.2 Potentialtheoretisches und geodätisches Randwertproblem

Die obige Grundgleichung des geodätischen Randwertproblems stellt die Beziehung zwischen der gemessenen Schwereanomalie Δg und dem Störpotential T her. Sie hat scheinbar die Form einer Differentialgleichung, weil T und dessen Ableitung vorkommen; scheinbar deswegen, weil Δg zunächst nicht im ganzen Raum bekannt ist, sondern nur auf der Fläche des Geoids bestimmt wird. In dieser Form stellt die Gleichung also lediglich eine Randbedingung dar, welche allein nicht zur Bestimmung von T ausreicht. Es handelt sich hier um ein spezielles Randwertproblem der Potentialtheorie, das sich grundsätzlich vom 1., 2. und 3. Randwertproblem folgendermassen unterscheidet:

Erstes Randwertproblem = *Dirichlet'sches Problem* (Potential gegeben: Hauptaufgabe in der Theorie ruhender elektrischer Ladungen)

Zweites Randwertproblem = *Neumann'sches Problem* (Ableitung gegeben: Hauptaufgabe in der Theorie bewegter Flüssigkeiten)

Drittes Randwertproblem = *Cauchy'sches Problem* (Kombination von Potential und dessen Ableitung gegeben: Hauptaufgabe in der Wärmeleitung)

Während beim 1., 2. und 3. Randwertproblem das Potential, dessen Ableitungen oder eine lineare Kombination dieser Grössen auf einer *bekannten* Fläche vorgegeben sind, die nicht unbedingt mit einer Aequipotentialfläche zusammenfällt, ist beim *geodätischen Randwertproblem* die Fläche, auf der diese Grössen gegeben sind, *unbekannt*. Man weiss jedoch, dass es eine Aequipotentialfläche ist, auf der die gemessenen Schwerevektoren senkrecht stehen. Es besteht die Aufgabe, die gegebenen Flächenelemente zu einer einheitlichen, geschlossenen Fläche zusammenzusetzen (Jung, 1956). (Abb. 7)

Lösungsweg:

Über die *POISSONsche Lösung* des ersten (Dirichletschen) Randwertproblems erhält man zunächst eine Gleichung, die die Schwereanomalien Δg im Aussenraum zu berechnen gestattet. Damit kann die Rand-

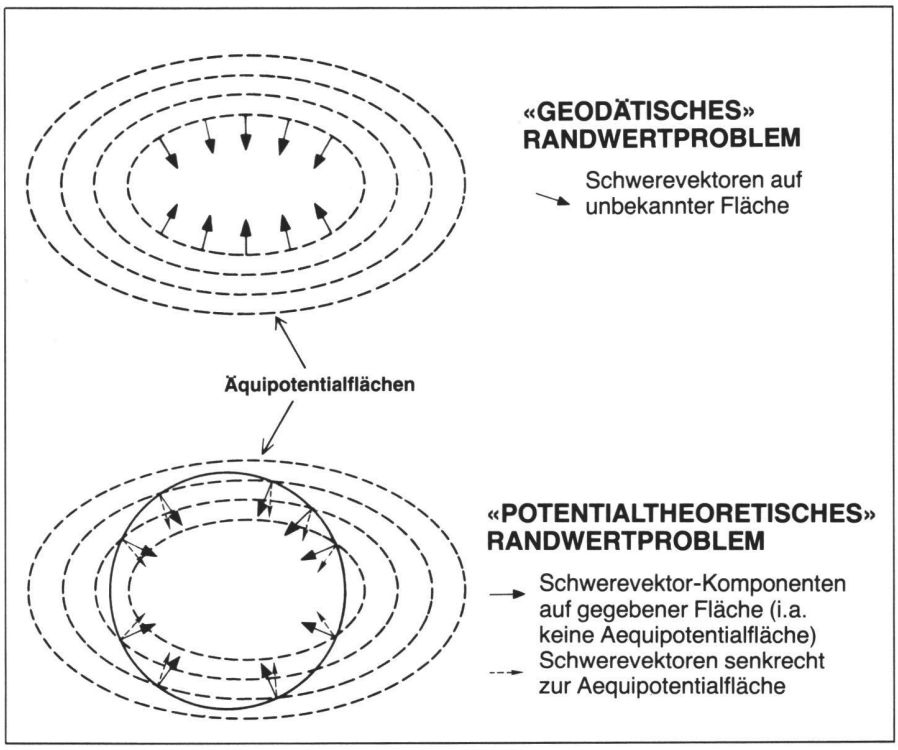


Abb. 7: Geodätisches und potentialtheoretisches Randwertproblem

wertbedingung in eine Differentialgleichung umgewandelt werden. Die Integration dieser Gleichung führt auf das sogenannte STOKESsche Integral. Grundlage dieses Lösungsweges ist die Entwicklung des Störpotentials nach Kugelfunktionen.

2.4 Poisson'sche Lösung (nach Heiskanen und Moritz, 1967)
Für das Störpotential T (r, θ, λ) können wir die Kugelfunktionsentwicklung

$$T(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda)$$

$$\text{mit } T_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} T_n^m(\theta,\lambda)$$

θ = Polabstand
λ = geographische Länge
r = Abstand des Aufpunkts vom Geozentrum

in die Grundgleichung des geodätischen Randwertproblems einsetzen:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda)$$

$$- \frac{2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda)$$

Entwicklung der Schwereanomalien Δg (r, θ, λ) im Aussenraum

$$\boxed{\Delta g = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda)}$$

Auf dem Geoid, d.h. für r = R, erhalten wir:

$$\Delta g \Big|_{r=R} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\, T_n(\theta,\lambda)$$

Zur Bestimmung der Terme $T_n(\theta,\lambda)$ betrachten wir eine allgemeine harmonische Funktion H, die auf der Fläche F gegeben sei (Abb. 8):

Der Wert von H im Aussenpunkt A beträgt

$$H(A) = H(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} H_n(\theta,\lambda),$$

$$\text{mit } H_n(\theta,\lambda) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} H(R,\theta',\lambda') P_n(\cos\psi) \sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

und $\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda' - \lambda)$.

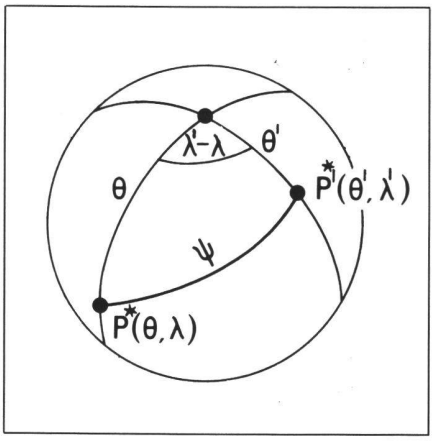


Abb. 9: Zur Berechnung des sphärischen Abstandes zwischen Aufpunkt und Flächenelement

Die Formel für $H_n(\theta,\lambda)$ folgt aus dem Additionstheorem der Kugelfunktionen:

$$P_n(\cos\psi) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta')$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[R_n^m(\theta,\lambda)\, R_n^m(\theta',\lambda') + S_n^m(\theta,\lambda)\, S_n^m(\theta',\lambda')\right]$$

Also:

$$H(A) = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} H(R,\theta',\lambda') \left[\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi)\right] \sin\theta' d\theta' d\lambda'$$

Für die Summe in der eckigen Klammer können wir folgende Vereinfachung einführen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) = \frac{R}{l^3} (r^2 - R^2).$$

Damit erhalten wir die POISSONsche Lösung (= POISSONsches Integral) des DIRICHLETschen Randwertproblems der Potentialtheorie:

$$H(A) = H(r,\theta,\lambda) = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \frac{r^2 - R^2}{l^3} H(R,\theta',\lambda')\, d\sigma'$$

mit $d\sigma' = \sin\theta' d\theta' d\lambda'$.

Wenn wir im Hinblick auf die Anomalien des Schwerepotentials (= Differenzen der beobachteten Werte gegenüber denjenigen des Referenzellipsoids) die Terme nullter und erster Ordnung abspalten, gelangen wir zum *reduzierten POISSONschen Integral:*

$$H_{red}^{(A)} = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos\psi\right) H(R,\theta',\lambda')\, d\sigma'$$

Anwendung auf das Produkt rΔg ergibt:

$$r\Delta g_{red}^{(A)} = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos\psi\right) (r\Delta g)\Big|_{r=R} d\sigma'$$

$$\boxed{\Delta g_{red}^{(A)}(r,\theta,\lambda) = \frac{R^2}{4\pi r} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos\psi\right) \Delta g\Big|_{r=R} d\sigma'}$$

In dieser Gleichung ist das Flächenelement dσ' dimensionslos, dσ' ist als Element eines Raumwinkels zu interpretieren.

2.5. Das Stokes'sche Integral
Ausgehend von

$$\Delta g(r,\theta,\lambda) = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T$$

erhält man nach Multiplikation mit $(-r^2)$ und anschliessender Integration $\int_{\infty}^{r} dr$ der neuen Gleichung über r mit Berücksichtigung der obigen Formel für Δg

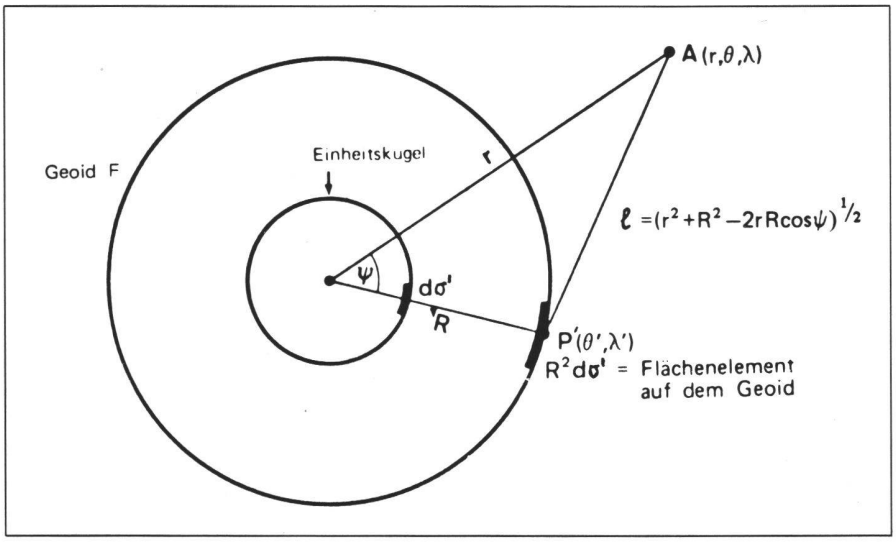


Abb. 8: Zur Berechnung der Kugelfunktionsterme des Störpotentials

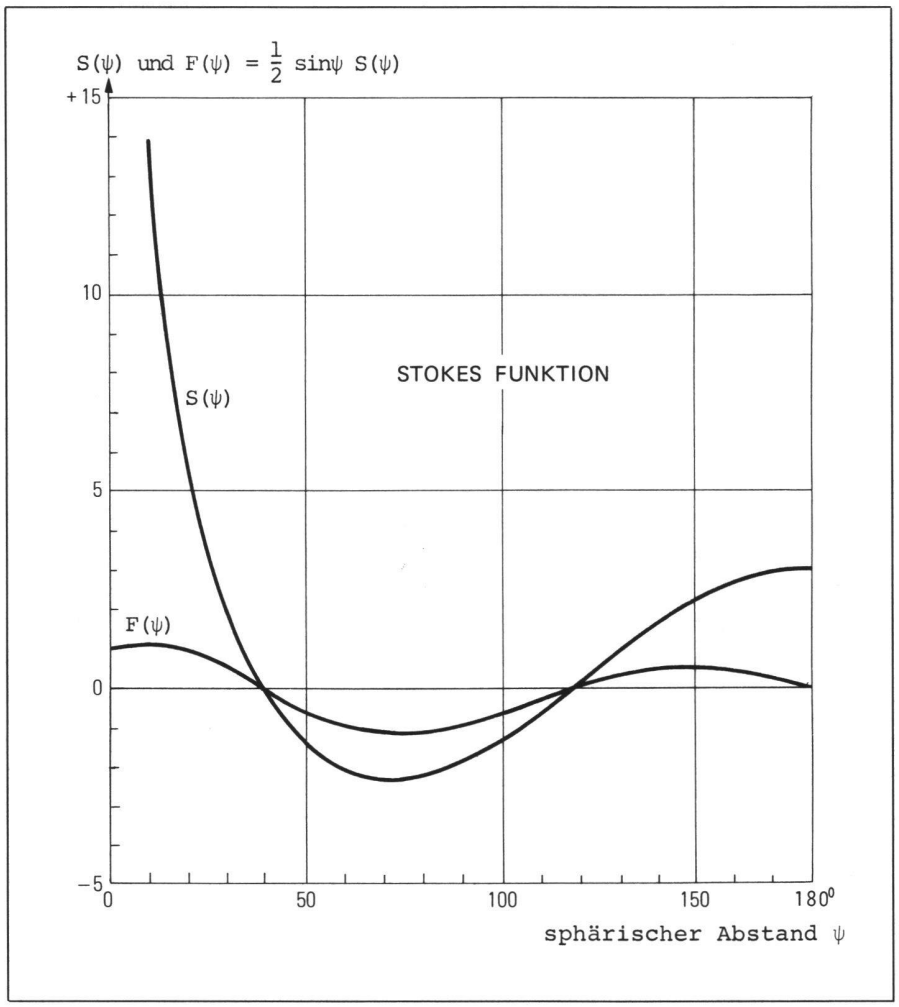


Abb. 10: Verlauf der Stokes'schen Funktion

$$r^2T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\int_{\infty}^{r} \left(-\frac{r^3 - rR^2}{l^3} + 1 + \frac{3R}{r}\cos\psi\right) dr\right] \Delta g\,|_{r=R} d\sigma'$$

Das Integral in der eckigen Klammer ergibt:

$$\left[\int_{\infty}^{r} (\,)\, dr\right] = \left[r^2 \left(\frac{2}{l} - \frac{3l}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{R\cos\psi}{r^2} (5 + 3 \cdot \ln \frac{r - R\cos\psi + l}{2r})\right)\right]$$

Nach Division durch r^2 erhalten wir

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{R^2}{4\pi} \iint [(\ldots)]\, \Delta g\, d\sigma'.$$

Mit der Abkürzung

$$S(r,\psi) = R\,[(\frac{2}{l} - \frac{3l}{r^2} + \ldots)]$$

ergibt sich:

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\Sigma} S(r,\psi)\, \Delta g\,|_{r=R} d\sigma'$$

Dies ist die Formel für das Störpotential T im Aussenraum, ausgedrückt durch die Schwereanomalien Δg auf der Erdoberfläche (Geoid). $S(r,\psi)$ wird als STOKESsche Funktion bezeichnet.

Für $r = R$ erhalten wir:

$$T(R,\theta,\lambda) = \frac{R}{4\pi} \iint_{\Sigma} S(R,\psi)\, \Delta g\,|_{r=R} d\sigma'$$

Wegen $l = 2R \sin\frac{\psi}{2}$

für $r = R$ (gleichschenkliges Dreieck)

ergibt sich die *STOKESsche Funktion* (Abb. 10) zu

$$S(r = R, \psi) = S(\psi) = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \left(\ln(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2})\right).$$

Für die gesuchte Geoidundulation N erhalten wir aufgrund des BRUNSschen Theorems $N = \frac{T}{g_n}$ das

STOKESsche Integral:

$$\boxed{N = \frac{R}{4\pi g_n} \iint S(\psi)\, \Delta g\,|_{r=R} d\sigma'}$$

Erste Anwendungen des Stokes'schen Integrals konnten zunächst nur in ozeanischen Bereichen vorgenommen werden, da dort keine grösseren Umrechnungen von beobachteten Schwereanomalien auf Freiluftanomalien vorgenommen werden müssen. Beispiele sind die gravimetrischen Geoide des Nordatlantiks (Talwani et al., 1972), des Indischen Ozeans (Kahle and Talwani, 1973) und des Pazifiks (Watts and Leeds, 1977). In Europa wurden gravimetrische Geoide z.B. von Groten und Rummel (1974), Arabelos (1980) und kürzlich von Brennecke et al. (1983) sowie von der öster. Komm. f. Int. Erdmessung (1983) publiziert.

2.6 Berechnungsablauf und Ausgangsdaten

2.6.1 Berechnungsablauf

Im folgenden wird die effektive Berechnung des Stokes'schen Integrals der Poisson'schen Lösung in Form eines Flussdiagramms konkreter dargestellt.

In diskretisierter Form erscheint das Stokes'sche Integral als Summe über kleine Kugelflächenelemente, multipliziert mit mittleren Funktionswerten innerhalb dieser Elemente. Die Elemente haben die Seitenlängen von 6' in der Breite und 10' in der Länge. Sämtliche Daten müssen daher auf dieses Raster bezogen und ggf. innerhalb der einzelnen Elemente gemittelt werden (h, Δg). Zusätzlich sind alle verwendeten Grössen auf eine gemeinsame Referenz zu beziehen. Hier wurde das IAG 75 Ellipsoid gewählt. Um die Schweredaten zu glätten, kann man Effekte $\Delta g_{Störm}$ bekannter Massenkörper von den Schweredaten subtrahieren. Allerdings fehlt dann der Beitrag zum Geoid im Stokes'schen Integral. Der direkt aus dem Massenmodell berechnete Effekt des Massenkörpers auf die Geoidundulation $N_{Störm}$ muss also nach der Stokes'schen Integration wieder hinzugefügt werden. Bekanntlich ist das Stokes'sche Integral über die gesamte Erdoberfläche zu nehmen. Diese umfangreiche Integration ist jedoch mit der Berücksichtigung eines regionalen oder eines globalen Geoides vermeidbar. Lokal wird lediglich die Differenz zu diesem Referenz-Geoid berechnet. Als Schweredaten müssen dann nur Werte im interessierenden Gebiet betrachtet werden. Zum Referenz-Geoid N_{ref} gehört natürlich auch das entsprechende Schwerefeld g_{ref}, das von den mittleren Schwereanomalien subtrahiert wird. Die Undulationen des Referenz-Geoides müssen nach der Berechnung des Stokes-Integral wieder hinzugefügt werden. Zur Abschätzung der Fehler und Bestimmung von Transformationsparametern δN_0, $\delta\xi_0$, δy_0; δx, δy, δz wurde zusätzlich eine Transformation des gravimetrischen Geoids ins Schweizer Datum berechnet und mit dem astro-geodätisch bestimmten Geoid (Gurtner, 1978) verglichen.

GRAVIMETRISCHE METHODE

$$\Delta g^{(P)} = g^{(P)} - \gamma^{(Q)} = -\frac{\partial T}{\partial N} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial N} T \qquad (1)$$

(1) Randwertbedingung: Schwereanomalien Δg auf dem Geoid

↓

Lösung des DIRICHLETschen Randwertproblems

↓

$$\Delta g^{(A)} = \frac{R^2}{4\pi r} \iint_{\sigma} \left(\frac{r^2 - R^2}{l^3} - \frac{1}{r} - \frac{3R}{r^2} \cos\psi \right) \Delta g \Big|_{r=R} d\sigma$$

Schwereanomalien im ganzen Aussenraum

↓

Lösung der Differentialgleichung (1)

↓

$$T^{(P)} = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \; S(\psi) \, d\sigma$$

Störpotential auf dem Geoid

↓

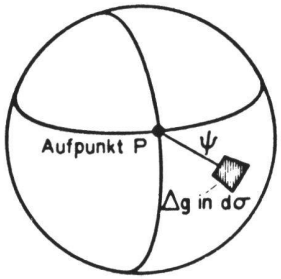
BRUNŠsches Theorem

↓

STOKES INTEGRAL

$$\boxed{N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g \; S(\psi) \, d\sigma}$$

N = Geoidundulation
R = mittlerer Erdradius
γ = mittlere Normalschwere
$S(\psi)$ = STOKESsche Funktion



Anmerkung: In dieser Darstellung bedeutet $\gamma = g_{norm}$

Abb. 11: Zusammenfassung der gravimetrischen Methode zur Bestimmung der Geoidundulation N

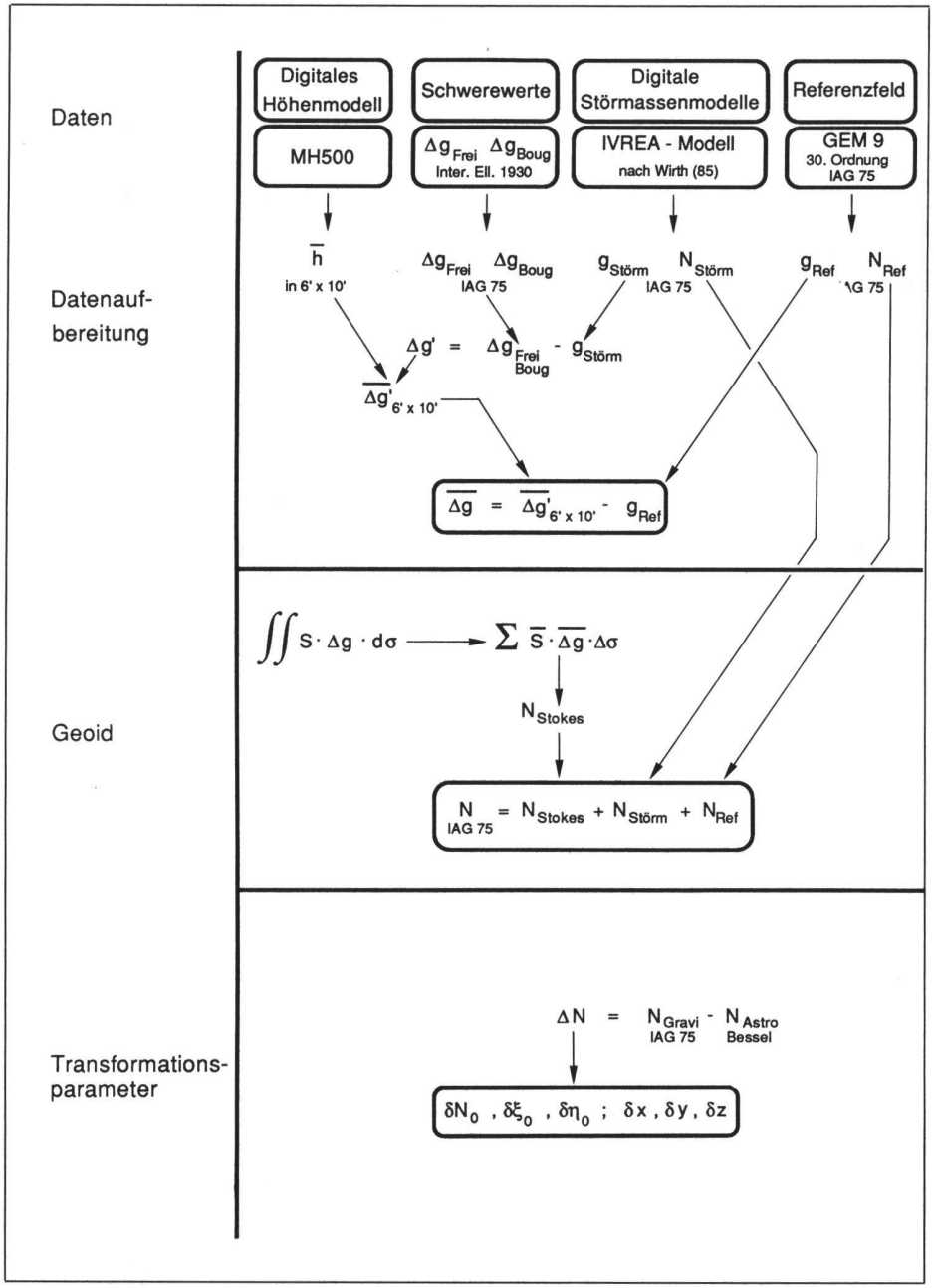


Abb. 12: Ablauf der Geoidberechnung

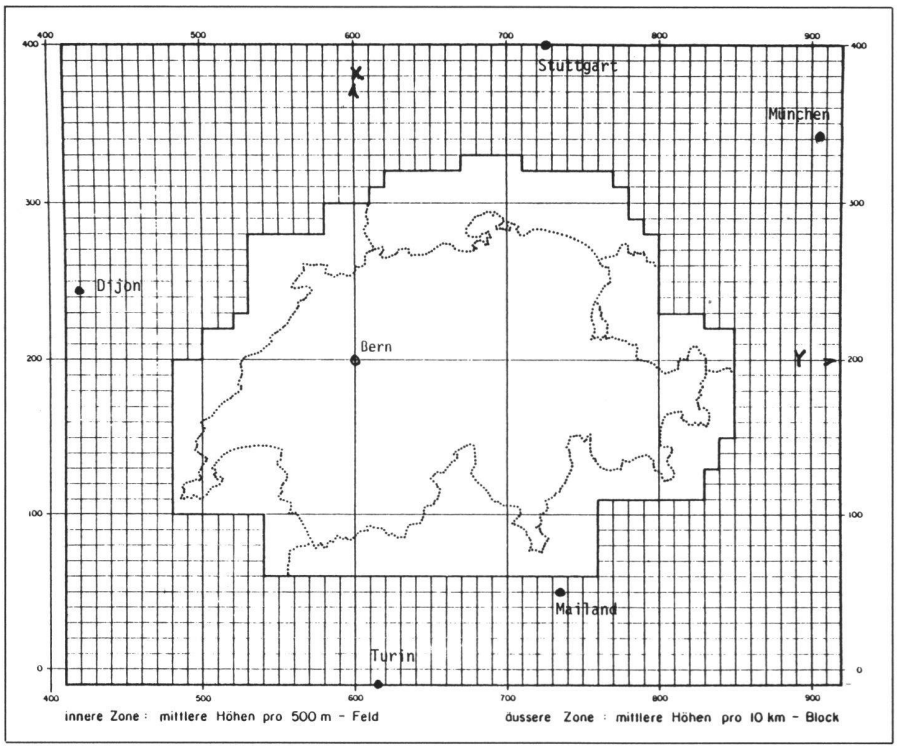


Abb. 13: Einzugsgebiet der verwendeten mittleren Höhen der Schweiz

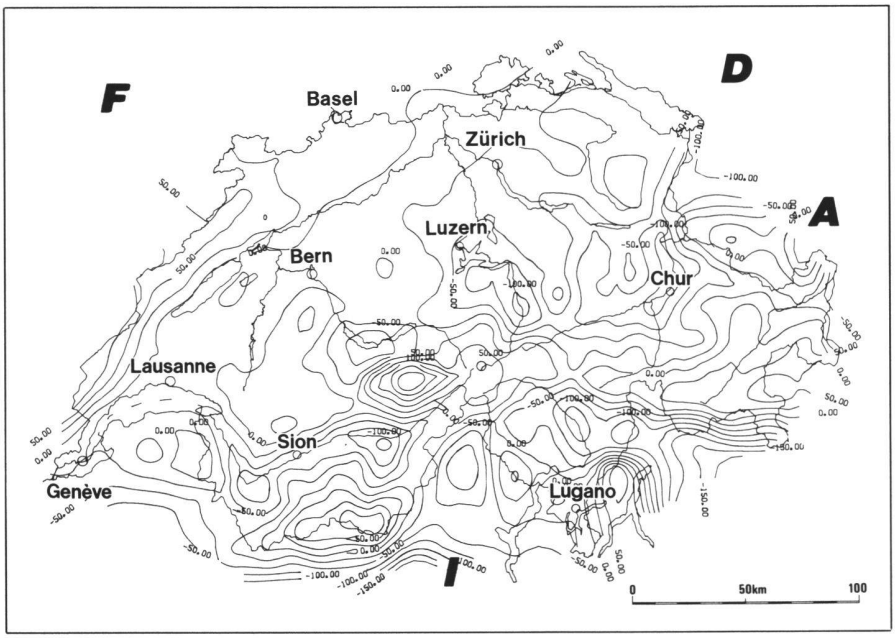


Abb. 14: Freiluftanomalien. Die Freiluftanomalien sind sehr eng mit der Topographie korreliert. Isolinienabstand 25 mgal. Diese und andere Isolinienkarten wurden mit Programmen von Klingelé (1980) erstellt.

2.6.2 Digitales Höhenmodell
Zur Bildung von mittleren Höhen in den 6' x 10' Elementen wurde das von Elmiger (1969) compilierte digitale Höhenmodell MH500 (mittlere Höhen 500 m x 500 m) verwendet.

2.6.3 Schweredaten
Die etwa 2'500 Gravimetrie-Daten stammen aus Arbeiten zur neuen Schwerekarte der Schweiz von Klingelé und Olivier (1980) und aus Messungen von Kissling (1980). Die Daten sind im Referenzsystem 1930 gegeben. Sie mussten daher auf das Ellipsoid IAG 75 umgerechnet werden. Punkte an denen nur Bougueranomalien vorhanden waren, wurden gleichwohl zur Stützung der Mitteilung der Freiluftanomalien mitberücksichtigt.

2.6.4 Digitale Störmassenmodelle
In den vorliegenden Berechnungen wurde ein Massenmodell des Ivrea-Körpers, der das Schwerefeld in der Südschweiz besonders stark beeinflusst, berücksichtigt. Zur Berechnung des Schwereeffektes wurde ein Ivrea-Modell (Bürki, 1985) und (Wirth, 1985) verwendet.

2.6.5 Referenzfeld
Als Referenzfeld wurde das GEM9 (Goddard Earth Modell, Lerch et al., 1979) verwendet. Das Modell wird durch eine Kugelfunktionsentwicklung bis zum 30. Grad dargestellt. Dadurch kann zwar eine im globalen Massstab recht gute Beschreibung gewonnen werden. Im lokalen Bereich jedoch hat das Modell eher den Zweck einer Trendfunktion.

3. Methode der Fourier-Transformation in der Anwendung auf die Schwerefeldbestimmung

3.1 Konzept der Fouriertransformation

Nach einem Satz von Fourier lässt sich jede periodische Funktion durch eine Summe von Sinus und Cosinus-Funktionen mit Frequenzen von ganzen Vielfachen einer Grundfrequenz w darstellen:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot w \cdot t) + b_n \sin(n \cdot w \cdot t)\right)$$

Umgekehrt kann jede beliebige periodische Funktion durch Überlagerung, Summenbildung, der einzelnen Basisfunktionen dargestellt werden. Am «ohrenfälligsten» wird dieses Phänomen in der Akustik demonstriert. Durch das Zusammenfügen verschiedener Töne und Obertöne mit gleicher Grundfrequenz können Töne mit beliebiger Klangfarbe generiert werden. Um eine Funktion zu beschreiben, muss man also angeben, mit was für einer Stärke (Amplitude: a_n bzw. b_n) eine bestimmte Basisfunktion mit der Frequenz $(n \cdot w)$ zur ganzen Summe beitragen soll. Trägt man die Amplituden gegen die Frequenzen auf, so enthält man das sogenannte Amplituden-Spektrum.
Es zeigt, welche Frequenzen wie stark in der Funktion f(t) vertreten sind. Die Amplitudenfunktion $a = a(w)$ beschreibt die Funktion f(t) im sogenannten Spektral- oder Frequenzbereich voll und ganz. Das Bildungsgesetz nach obiger Formel erlaubt es, aus der Beschreibung im Frequenzbereich die Funktion im sogenannten Zeitbereich direkt zu rekonstruieren. Die Beschreibung im Zeitbereich und jene im Frequenzbereich sind einander äquivalent.
Die harmonische Zerlegung einer Funktion kann in funktionentheoretischer Weise verallgemeinert werden. Dabei führt man den Begriff der Transformation, im speziellen der Fouriertransformation, ein. Da nicht mehr nur diskrete Frequenzwerte $n \cdot w$, sondern auch beliebige (kontinuierliche) Zwischenwerte im Intervall $(-\infty, +\infty)$ berücksichtigt werden, sind die Summationen durch Integrationen zu ersetzen. Zu-

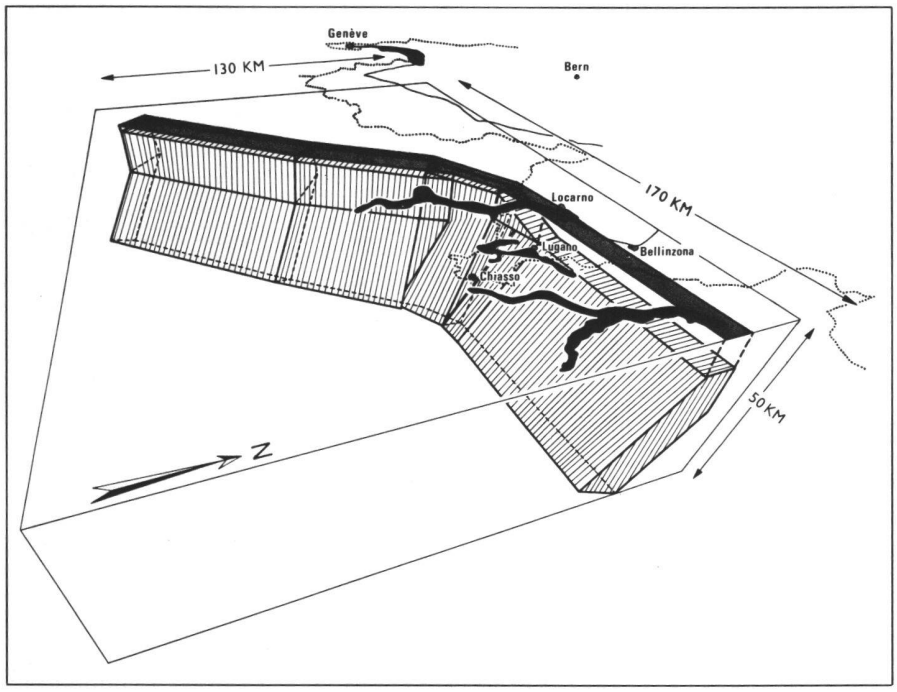


Abb. 15: Modell des Ivrea-Körpers (Wirth, 1985)

sätzlich werden die Cosinusse und Sinusse als komplexe Funktionen geschrieben (EULERscher Satz):

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

i = die imaginäre Zahl $\sqrt{-1}$
e = Exponentialfunktion
φ = ein Winkel.

Die Fourier-Transformation gibt die Vorschrift, wie man vorzugehen hat, um von der Beschreibung einer Funktion im Zeitbereich zur Beschreibung im Frequenzbereich zu gelangen. Der umgekehrte Schritt wird durch die inverse Fouriertransformation vorgeschrieben. Es ist zu beachten, dass sowohl F(w) als auch f(t) komplexwertige Funktionen sind. Der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich erfolgt mit

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{(-2\pi\, i\, wt)}\, dt$$

und die Umkehrung mit

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) \cdot e^{(+2\pi i\, wt)}\, dw \quad .$$

Man mag sich wohl fragen, was diese komplizierte Umrechnerei für Vorteile bieten mag. Zum einen sind die quantitativen Aussagen über den Spektralbereich oftmals direkte Zielgrössen der Untersuchungen insbesondere in Bereichen, wo schwingungsförmige Phänomene zu behandeln sind, etwa in der Akustik, Optik, Bildverarbeitung, Elektrotechnik, aber auch in der Geophysik und Geodäsie. Diese Methode, Vorgänge im Frequenzbereich zu untersuchen, wird als Spektralanalyse bezeichnet. Zum andern lohnt sich oftmals der Transformationsaufwand, da viele im Zeitbereich aufwendige mathematische Manipulationen im Frequenzbereich als einfache Operationen ausgeführt werden können.

Wenn die Rede von Zeitbereich ist, so soll dies nicht heissen, dass die Fourier-Transformation nur auf Zeitfunktionen anwendbar sei. Der Parameter t kann durch irgendeine Grösse ersetzt werden. Für die hier gezeigten Anwendungen steht vor allem die Behandlung von Ortsfunktionen im Ortsbereich im Vordergrund des Interesses. Man spricht auch oft vom physikalischen Bereich. Die Fourier-Transformation kann auch für mehrere Variablen verallgemeinert werden. Die Ortsfunktion mit mehreren Veränderlichen f(x,y,z,...) würde im Abbild im ebenfalls mehrdimensionalen Frequenzbereich durch die Transformation erhalten:

$$F(u,v,w,\ldots) = \iiint f(x,y,z\ldots) \cdot e^{-2\pi\, i(xu + yv + zw + \ldots)}\, dxdydz\ldots$$

mit der Umkehrung

$$f(x,y,z\ldots) = \iiint F(u,v,w\ldots) \cdot e^{+2\pi\, i(xu + yv + zw + \ldots)}\, dudvdw\ldots$$

Die meisten, den Geodäten interessierenden Berechnungen, beschränken sich auf zwei, allenfalls drei unabhängige Veränderliche. Die oben erwähnten Eigenschaften der transformierten Funktionen lassen sich sinngemäss auch auf mehrere Veränderliche übertragen. Für die hier beschriebenen Anwendungen kommen vorrangig zwei Eigenschaften zum Zuge:

Ist f(x) eine Funktion im physikalischen

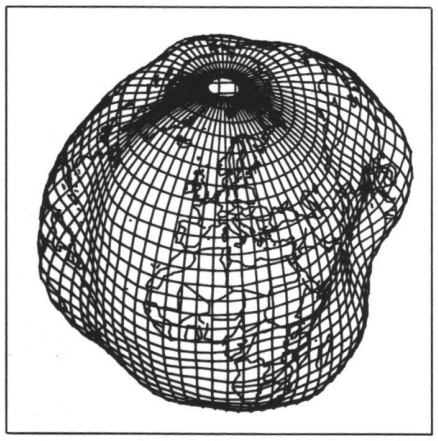


Abb. 16a: GEM9. Geoid berechnet aus GEM9-Kugelfunktionskoeffizienten. Überhöhung der Undulation 1:15 000.

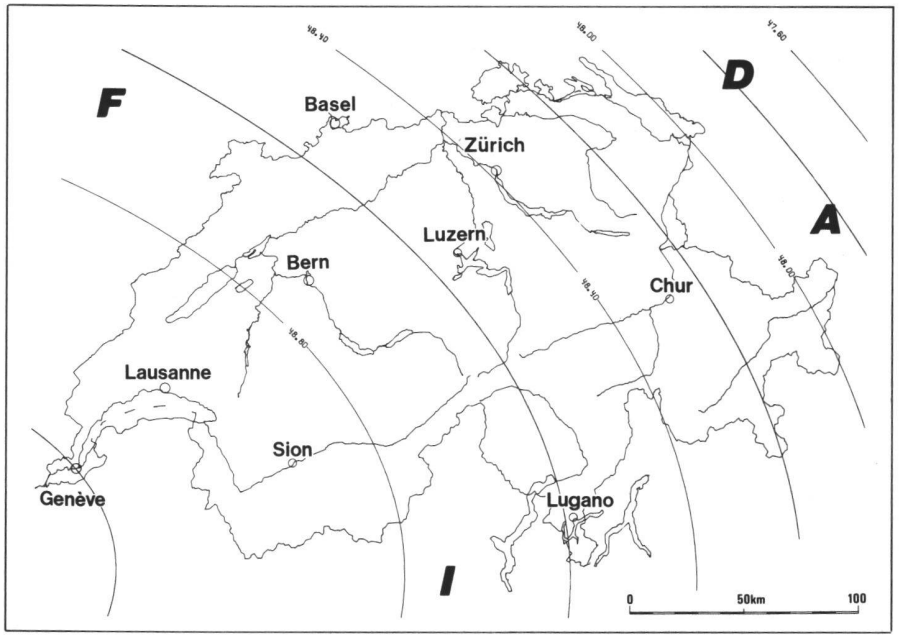


Abb. 16b: GEM9-Geoid im lokalen Bereich der Schweiz. Isolinienabstand: 20 cm.

Bereich und F(w) ihre Transformierte im Frequenzbereich, so verwandeln sich Differentiationen in Multiplikationen im Frequenzbereich. Es gilt:

$$\partial f(x) / \partial x \quad \longrightarrow \quad 2\pi i w \; F(w)$$

Eine weitere sehr hilfreiche Beziehung betrifft die Integration von Produkten von Funktionen mit speziellen Argumenten. Die unter dem Namen *Faltung* bekannte Integralformel wird ebenfalls zu einem Produkt transformiert:

$$\varphi(x) = \int f(y) \cdot g(x - y)\, dy$$

$$\phi(w) = F(w) \cdot G(w)$$

Integrale dieser Art treten im Zusammenhang mit Filterproblemen, Korrelations- und Kovarianzberechnungen und in verschiedenen Formeln der Physikalischen Geodäsie auf. Um die Integraltransformationen numerisch anwenden zu können, müssen etliche Vorkehrungen getroffen werden, zumal Intervalle von $[-\infty, +\infty]$ und infinitesimal kleine Grössen dt oder dw im Computer nicht streng dargestellt werden können. Das Problem muss also diskretisiert werden, indem man von der Integration zur Summation, von infinitesimalen auf kleine Grössen, von unendlichen Intervallen auf endliche und von kontinuierlichen Funktionen auf diskretisierte Funktionen übergeht. Damit werden jedoch Genauigkeitsverluste induziert.
Um eine Funktion f(x) rekonstruieren zu können, muss dem «Abtasttheorem» zufolge die Funktion in Schritten von $\triangle x = 1/(2 \cdot \upsilon)$ digitalisiert, abgetastet werden. Hier bedeutet υ die höchste im Signal f(x) vorkommende Frequenz. Wird die Schrittweite zu gross gewählt, so geht die Information der höheren Frequenzen verloren. Durch die Einschränkung der Integration auf ein endliches Intervall wird der Funktion eine künstliche Periodizität von der Länge des Intervalls aufgeprägt. An den Intervallgrenzen können Randeffekte auftreten, die das Transformationsresultat verfälschen. Diesen, der diskreten Fourier-Transformation eigenen Fehlerquellen gilt es, bei der numerischen Anwendung Rechnung zu tragen (z.B. Kunt, 1980). Für die Berechnung der Transformation wurden effiziente Algorithmen entwickelt. Die schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform, FFT) spielt in diesem Zusammenhang eine hervorragende Rolle.

3.2 Anwendungen in der Physikalischen Geodäsie

Eine direkte Anwendung der Fourier-Transformation ergibt sich bei der Korrelationsrechnung. Sind zwei reelle Funktionen $f(\underline{x})$ und $g(\underline{x})$ im physikalischen Bereich gegeben, so wird die Korrelation zwischen f und g mit dem Erwartungswert des Produktes definiert (Kreuzkorrelation von f und g). $\underline{x}$ soll bedeuten, dass es sich hier um mehrere Variablen, die in einem Vektor zusammengefasst sind, handelt.

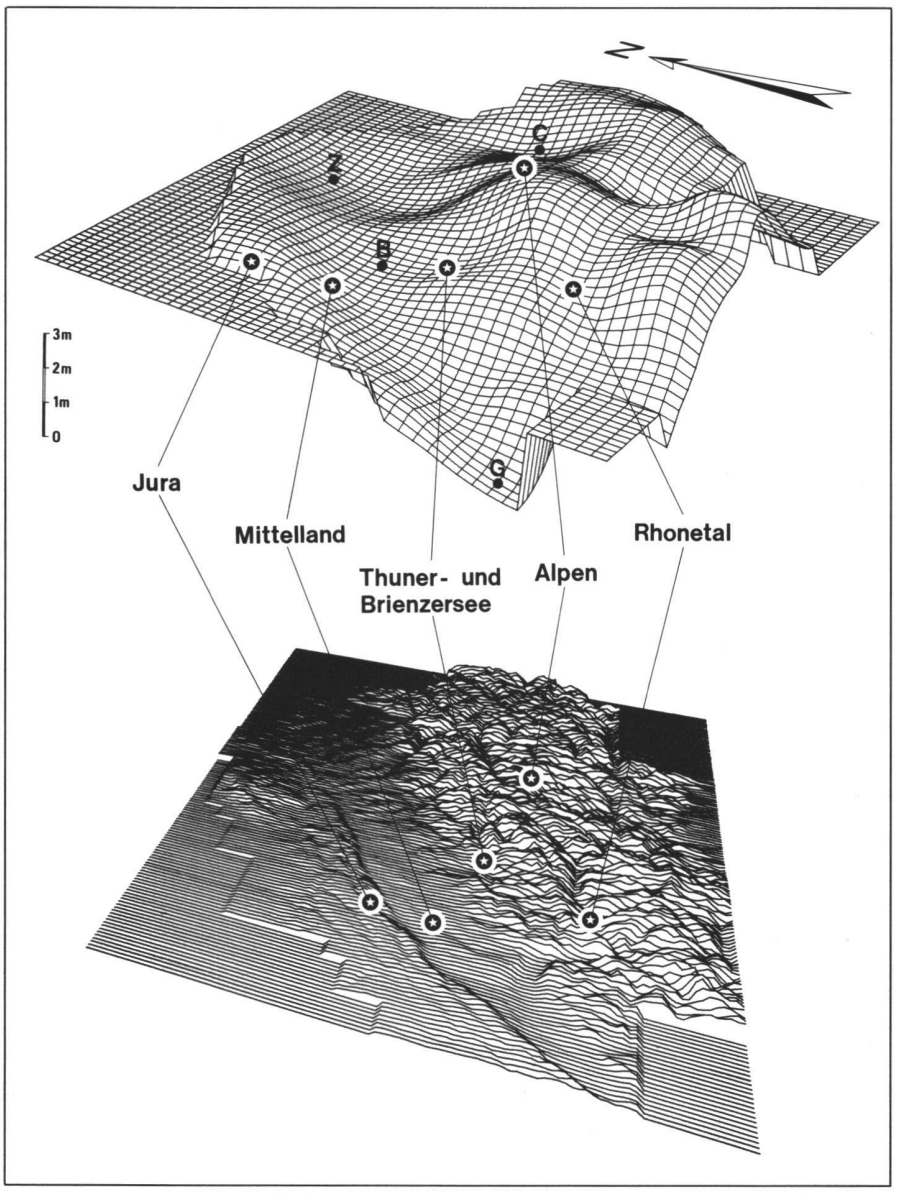


Abb. 17: Gravimetrisches Geoid (oben) und Topographie der Schweiz. Ansicht von Westen. Für die Darstellung der Topographie wurden die Höhendaten MH500 verwendet. B: Bern, C: Chur, G: Genf, Z: Zürich.

$$r_{fg}(\underline{y}) = E\{f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x} + \underline{y})\}$$

$$= \iint f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x} + \underline{y})\, dx$$

$$= \iint f^*(-\underline{x}') \cdot g(\underline{y} - \underline{x}')\, dx'$$

Mit dem Faltungssatz erhält man die Fourier-Transfomierte

$$R_{fg}(\underline{w}) = F(\underline{w}) \cdot G(\underline{w}).$$

Um z.B. die Korrelation von Freiluftanomalien mit den Höhen zu berechnen, genügt es, die Fourier-Transformierte der Anomalien mit dem transformierten Höhenmodell zu multiplizieren. Die Rücktransformation liefert dann die Korrelation im physikalischen Bereich. Anwendungen für Kovarianzfunktionen zeigt z.B. Forsberg (1984). Dazu ist zu bemerken, dass dieser scheinbar komplizierte Weg um Faktoren schneller ist als die direkte Ausführung der ursprünglichen Integration. Weitere Anwendung des Faltungssatzes finden sich bei allen Integralen von Produkten, in deren Argumenten Differenzen der Variablen auftreten. Als klassisches Beispiel diene die Newton'sche Gravitationswirkung von Massenkörpern. Das Gravitationspotential ist (vgl. Kapitel 2)

$$U(\underline{x}) = G \int_{V_{Körper}} \rho(\underline{y}) \cdot (l(\underline{y}-\underline{x}))^{-1}\, d^3V$$

G = Gravitationskonstante
v = Volumen des Massenkörpers
$d^3v = dy_1 dy_2 dy_3$
l = Abstand zwischen Aufpunkt x und Integrationsstelle $\underline{y}$
$\varsigma(\underline{y})$ = Dichte-Funktion

Darin erkennt man sofort das Faltungsintegral, da

$$f(\underline{y} - \underline{x}) = G \cdot (l(\underline{y} - \underline{x}))^{-1}$$

nur von der Koordinaten-Differenz zwischen Aufpunkt $\underline{x}$ und dem Integrations-

punkt $\underline{y}$ abhängt. Die dreidimensionale Fourier-Transformation ergibt dann unmittelbar:

$$f(\underline{x}) = G \cdot (l(\underline{x}))^{-1} \rightarrow F(\underline{w})$$

$$\rho(\underline{x}) \rightarrow P(\underline{w})$$

$$U(\underline{x}) \rightarrow V(\underline{w}) = F(\underline{w}) \cdot P(\underline{w})$$

Die Schwerewirkung erhält man direkt durch Gradientenbildung und Anwendung der oben erwähnten Transformationseigenschaften der Ableitungsoperatoren.

$$g(\underline{x}) = -\text{grad}\,(U(\underline{x})) \rightarrow \underline{G}(\underline{w}) = -2\pi\, i\, \underline{w}\, V(\underline{w})$$

Der Übergang vom Potential zum Schwerevektor und umgekehrt ist im Spektralbereich sehr bequem. Er reduziert sich auf eine einfache Multiplikation.

Das Problem besteht nun darin, dass die Punkt-Verteilung in z-Richtung im allgemeinen sehr schlecht ist, da die Messungen sich auf die Erdoberfläche beziehen. Dies führt zu einer flächenartigen, manchmal sogar zu einer profilmässigen Punktverteilung. Die Fourier-Transformation der Höhenvariablen z wird daher numerisch kaum sinnvoll sein. Die explizite Ausführung der Transformation der z-Variablen ergibt den ganzen Schwerevektor im Spektralbereich für ein allgemeines, geschichtetes Massenmodell. Die dreidimensionale Transformation ist auf zwei Dimensionen (x und y) reduziert worden:

$$\underline{G}(\underline{w},z) = 2\pi i\,(\underline{w}, i|\underline{w}|) \cdot \frac{G}{|\underline{w}|} \cdot e^{-2\pi|\underline{w}|z} \cdot$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(2\pi\,|\underline{w}|)^{n-1}}{n!} F_{xy}\{\rho(x,y)(b^n(x,y)-a^n(x,y))\}$$

mit $i = \sqrt{-1}$

- G = Gravitationskonstante
- $\underline{G}(w,z)$ = Schwerevektor im zweidimensionalen Frequenzbereich
- F_{xy} = Fourier-Transformation der zwei Variablen x und y
- N = Ordnung der Reihenentwicklung
- $\varsigma(x,y)$ = Dichte der Schicht (mit lateralen Änderungen)
- $a(x,y)$ = Höhe der oberen Begrenzung der Schicht
- $b(x,y)$ = Höhe der unteren Begrenzung der Schicht

Die dritte Komponente dieser Gleichung, die Fourier-Transformation der z-Komponente des Schwerevektors, entspricht der von Parker (1972) auf anderem Weg erhaltenen Formel.

Eine weitere Möglichkeit der Berechnung von Schwereeffekten von Massen, vor allem in Anwendung auf die topographische Korrektur von Schwerewerten, führt Sideris (1984) vor. Den Ausgangspunkt bildet das Integral für die topographische Korrektur für Punkte auf einer sphärischen Referenzfläche (Moritz, 1980).

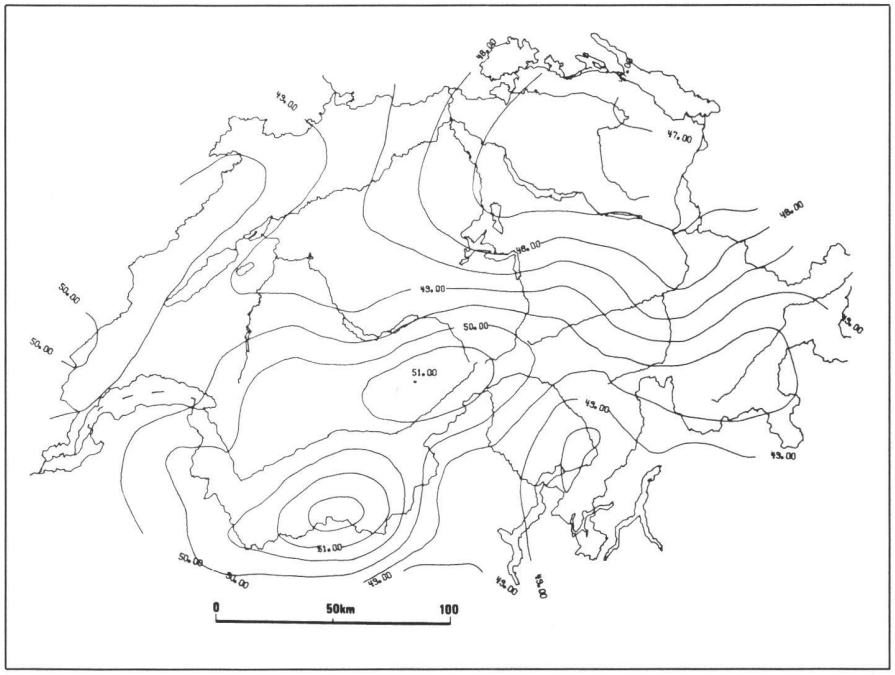


Abb. 18: Gravimetrisches Geoid im IAG 75 Bezugssystem (ohne Ivrea-Cogeoid; Isolinienabstand: 50 cm)

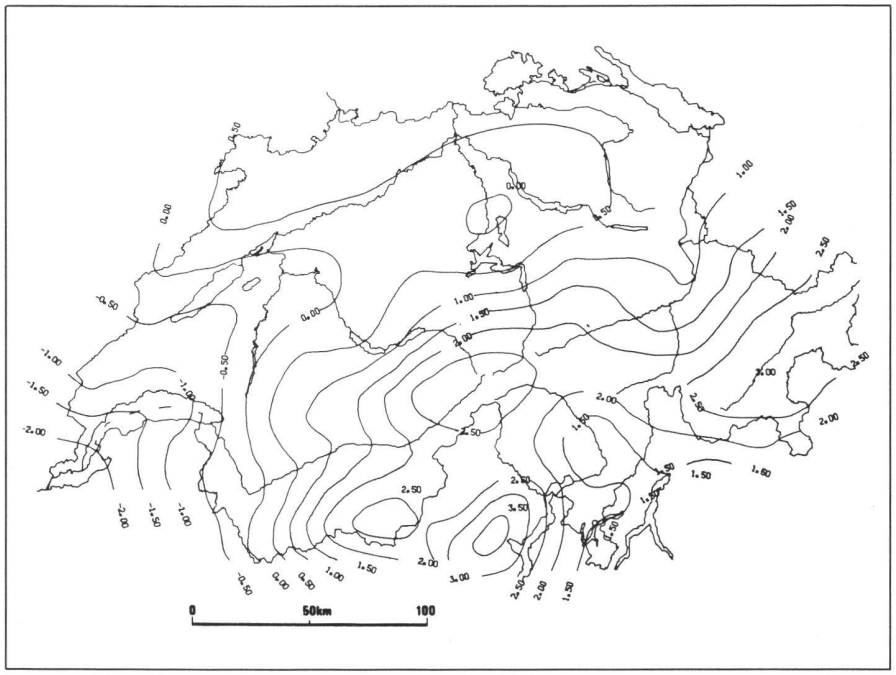


Abb. 19: Gravimetrisches Geoid im Schweizer-Datum (Bessel); Isolinienabstand: 50 cm. Die Verkippung und der Offset (ca. 50 m) gegenüber dem IAG 75-System ist im Mittelland deutlich zu sehen (vergl. Abb. 18 und 19).

$$C(P) = 1/2\; G\,\rho\, R^2 \int [h(Q)-h(P)]^2 \cdot (l(Q,P))^{-3}\, d\sigma$$

- C Topokorrektur in P
- G Gravitationskonstante
- P Aufpunkt
- Q Integrationsstelle
- R Kugelradius der Referenzflächen
- ς Dichte
- l Distanz zwischen den Punkten Q und P
- h Höhe des Punktes Q bzw. P
- σ Kugeloberfläche

Betrachtet man ein nicht allzu ausgedehntes Gebiet, so ist es statthaft die Kugelfläche auf eine (x,y)-Ebene zu projizieren. Das Integral geht dann über in

$$C(\underline{x}) = 1/2\, G\,\rho \int_{y_{Ebene}} [h(\underline{y}) - h(\underline{x})]^2 \cdot (\underline{x} - \underline{y})^{-3}\, d^2y$$

$$C(\underline{x}) = 1/2\, G\,\rho \int_{y_{Ebene}} (h^2(\underline{y}) \cdot (\underline{x} - \underline{y})^{-3} - 2h(\underline{x}) \cdot h(\underline{y}) \cdot (\underline{x}-\underline{y})^{-3} + h^2(\underline{x}) \cdot (\underline{x}-\underline{y})^{-3})\, d^2y$$

Die drei Terme sind sofort als Faltungsintegrale zu erkennen.

In ähnlicher Weise können auch die Stokes'sche Formel oder die Vening-Meinesz-Formeln behandelt werden.

Nach Stokes gilt:

$$N(P) \sim \int_{\sigma\ \mathrm{Kugel}} S(P,Q) \cdot \Delta g(Q)\, d^2\sigma$$

Der Integralkern (Stokes'sche Funktion) hängt im wesentlichen nur von der Distanz zwischen den Punkten P und Q ab, was die Form der Faltung nach sich zieht. Ebenso verhält es sich mit den Vening-Meinesz-Formeln, die man durch Differentiation der Stokes'schen Formel erhält:

$$\xi(P) \sim \partial N/\partial d\varphi$$

$$\sim \int_{\sigma_{\mathrm{kugel}}} \partial S(P,Q)/\partial\varphi \cdot \Delta g(Q)\, d^2\sigma$$

$$\eta(P) \sim \cos\varphi(P) \cdot \partial N/\partial\lambda$$

$$\sim \int_{\sigma_{\mathrm{kugel}}} \partial S(P,Q)/\partial\lambda \cdot \Delta g(Q)\, d^2\sigma$$

φ,ξ = geogr. Breite bezw. Lotabweichung

λ,η = geogr. Länge bezw. Lotabweichung

Der Charakter der Faltung ist auch in diesen Formeln erkennbar.

Statt die Differentiation im physikalischen Bereich auszuführen, transformiert man zuerst das Stokes'sche Integral unter Verwendung des Faltungssatzes und differenziert anschliessend im Frequenzbereich. Das heisst: man muss dann lediglich mit dem Faktor 2π i $\underline{w}$ multiplizieren, um die transformierten Lotabweichungskomponenten zu erhalten.

4. Vorläufige Ergebnisse

4.1 Gravimetrisches Geoid

Die Ergebnisse sind in dem Sinne vorläufig, als dass man noch nicht alle heutzutage zur Verfügung stehenden Daten in diese Berechnungen eingeführt hat. Für eine nochmalige Berechnung können die Datensätze, wie sie unter Kapitel 2.6 dargestellt wurden, wesentlich erweitert werden. Insbesondere sind in der Ivreazone etliche Schweremessungen im Zusammenhang mit der Modellierung des Ivreakörpers (Bürki, 1985; Wirth, 1985) ausgeführt worden. Die Berücksichtigung der obersten Erdkruste als Massenmodell (Topographie bis Mohorovicic-Diskontinuität) in der gleichen Weise, wie es für das Ivrea-Modell gemacht wurde, reduziert den kurzwelligen Anteil im Schwerefeld drastisch, d.h., das Feld der Schwereanomalien wird stark geglättet. Mittelbildung und Interpolation der Anomalien werden so wesentlich genauer. Dieses Verfahren wurde von Elmiger (1969) und Gurtner (1978) für die Prädikation von Lotabweichungen angewandt. Die Ergebnisse zeigen, dass bereits mit relativ einfachen und traditionellen Methoden das gravimetrische Geoid auch in einer Hochgebirgsregion mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden kann.

Das Geoid widerspiegelt in groben Zügen die Topographie (Abb. 17). neben den Grossstrukturen Jura, Mittelland und Alpen sind auch die Täler der Voralpenseen (besonders des Thuner- und Brienzersees) sowie das Rhonetal gut zu erkennen. Die glatten Formen kommen durch die Integration der Freiluftanomalien zustande. Der ganze Vorgang der Mittelbildung und der Stokes'schen Integration entspricht also in gewissem Sinne einer Filterung der Freiluftanomalien (man vergleiche hierzu die relativ stark variierenden Anomalien in Abb. 14). In diesem Zusammenhang wird man sich auch an den Begriff Fourier-Transformation erinnern (s. Kapitel 3).

Die Randzonen des Geoides sind deutlich abgeflacht. Dies deutet auf mangelnde Datendichten in den ausserhalb der Schweiz liegenden Gebieten hin.

Da alle Daten auf das Internationale Ellipsoid IAG 75 bezogen sind, muss das Ergebnis der Berechnungen (Abb. 18) in das gebräuchliche Schweizerdatum (Bessel-Ellipsoid mit Fundamentalpunkt in Bern) zurücktransformiert werden. Die Hinzunahme des Ivrea-Cogeoids bewirkt einen beachtlichen Effekt, der nicht ganz im Einklang mit den aktuellen Lotabweichungen in diesem Gebiet steht. Die Klärung dieser Diskrepanz muss einer weiteren Bearbeitung vorbehalten bleiben.

4.2 Genauigkeitsabschätzung und Koordinatentransformation

Da wir primär an Geoidunterschieden im relativ kleinen Gebiet Schweiz interessiert sind, treten Fehler der absoluten Lagerung in den Hintergrund. Ebenso können kleine Effekte vernachlässigt werden. Die sphärische Approximation der Stokes-Formel bewirkt z.B. einen Fehler in der Grössenordnung von (Heiskanen und Moritz, 1967)

$$\delta N = Nf,$$

wobei f = Abplattung des Bezugsellipsoids = 1/298.3

N = Geoidundulation.

Für unser Differenzgeoid ergibt sich $\delta N < 1$ cm. Die Berücksichtigung atmosphärischer Massen bewirken im betrachteten Gebiet eine höhenabhängige Korrektur der Freiluftanomalien von weniger als 1 mgal. Dieser Wert liegt weit unter der Unsicherheit der mittleren Freiluftanomalien. Ebenso werden die numerischen Ungenauigkeiten der Diskretisierung und Mittelbildung der Stokes-Funktion von den Fehlern in den mittleren Freiluftanomalien und der Vernachlässigung gemessener Schwerewerte in der Umgebung des Untersuchungsgebietes überdeckt. Für den mittleren Fehler an den gemittelten Schwerewerten innerhalb eines 6' x 10' Kompartimentes ist mit 5–10 mgal zu rechnen (Kuhn, 1981). Mit der Annahme von fehlerlosen Referenz-Anomalien (GEM9) und unkorrelierten beobachteten Freiluftanomalien kann man eine grobe Abschätzung des Integrationsfehlers vornehmen. Dabei zeigt sich, dass der mittlere Fehler 15 cm nicht übersteigt. Eine zweite, gravierendere Fehlerquelle ergibt sich dadurch, dass man die ausserhalb des Integrationsgebietes liegenden Schwerewerte durch GEM9-Werte ersetzt. Der Effekt wird am Rand des Datengebiets besonders augenfällig. Die Grössenordnung des Fehlers ergibt sich aus einer groben Abschätzung und aus Fehlerangaben für das GEM9-Modell [Rapp, 1973; Tscherning and Rapp, 1974; Arabelos, 1980] zu ca. 1 m für Randpunkte. Der Fehler nimmt zur Mitte des Integrationsgebietes hin stark ab. Zur Überprüfung dieser Fehler wurde das gravimetrische Geoid vom IAG 75-Bezugssystem auf das Schweizerdatum (Bessel) transformiert und mit dem astrogeodätischen Geoid (Elmiger, 1975; Gurtner, 1978) verglichen. Aus den Restklaffungen ergab sich für die kritische Randzone (5–20 km) ein mittlerer Fehler von 1.1 m und für die übrigen Punkte etwa 30 cm. Die Transformationsfehler liegen also durchaus im Bereich der groben Fehlerabschätzungen.

5. Schlussfolgerung und Ausblick

Aus der Transformation des gravimetrischen Geoids auf das astro-geodätische Geoid gewinnt man zusätzlich interessante Angaben über den Bezug des Schweizerischen Bessel-Ellipsoids zum IAG 75- Ellipsoid. Das astronomische Geoid wurde mit der willkürlichen Geoidundulation [N = 0 m in Schwerzenbach, Kanton Zürich, in der Höhenlage fixiert. Die Lotabweichungen hängen von der Definition eines Nullpunktes des Koordinatensystems ab. Als Bezug wird der Fundamentalpunkt in Bern festgehalten. Dagegen ist das gravimetrische Geoid in seiner Lage, in unserem Fall bezüglich dem IAG 75-Ellipsoid, absolut bestimmt. Die Transformation gibt also direkt die Parameter an, um die die Schweizer-Koordinaten beaufschlagt werden müssen, um auf IAG 75 bezogene Werte zu erhalten. Für den Fundamentalpunkt Bern erhält man eine Höhenänderung von σN_0 = 49.60 m und Lotabweichungen von $\delta\xi$ = 3.03" bzw. $\delta\pi$ = 2.69".

Der Verschiebungsvektor der Ellipsoidzentren beträgt in geozentrischen kartesischen Koordinaten δx = -484.4 m, δy = -61.6 m, δz = -126.8 m mit Fehlern kleiner als $\pm$ 1.5 m. Dies ist eine bemerkenswerte Möglichkeit, aus Daten der Physikalischen Geodäsie verschiedene Koordinatensysteme miteinander in Verbindung zu brin-

gen: Eine Aufgabe, die im allgemeinen mit Methoden der Satellitengeodäsie gelöst wird.

In einem ersten Schritt zur satellitengestützten Geoidbestimmung in der Schweiz wurde 1984 das U.S. Transit-Satellite-Navigationssystem zur Messung der ellipsoidischen Koordinaten in der Schweiz und im Gebiet der Ivrea-Zone benutzt (SWISSDOC [Wiget et al., 1985] und ALGEDOP [Wiget et al., 1986; Geiger et al., 1986]). In einem nächsten Schritt wird das neue satellitengestützte U.S. NAVSTAR-**G**lobal-**P**ositioning **S**ystem (GPS) zur Anwendung kommen, das auch für die Geoidbestimmung eine wesentliche Genauigkeitssteigerung ermöglicht. Insbesondere ist dank der erhöhten Messgeschwindigkeit eine grössere Punktdichte realisierbar. Trotzdem werden die terrestrischen Verfahren in naher Zukunft für die Untersuchung des lokalen Schwerefeldes nicht an Bedeutung verlieren. Dabei ist vor allem von der inertialen Messtechnik, die heute in der Flugnavigation nicht mehr wegzudenken ist, auch in der Geodäsie eine stärkere Verbreitung zu erwarten. Neben den Geschwindigkeits- und Koordinatenbestimmungen des Messfahrzeuges ermöglicht das inertiale Messsystem eine praktisch kontinuierliche Erfassung der Schwerebeschleunigungen längs der Messstrecke. In Kombination mit einem modernen GPS-Satellitenempfänger erhält man damit ein universelles geodätisches Messsystem, das zugleich Stations-Koordinaten und Schwerefeldparameter bestimmen lässt. Durch Vergleich der vom GPS-Empfänger gelieferten ellipsoidischen Stations-Koordinaten mit den lokalen Koordinatendifferenzen, wie sie vom Inertialsystem durch Integration der Bewegungs- und Schwerebeschleunigungen berechnet werden, lassen sich Lotabweichungen, Schwereanomalien und Geoidundulationen, die klassischen Zielgrössen der Geodäsie, operationell bestimmen und können damit in heutige Fragestellungen der aktuellen Geodynamik einbezogen werden.

Referenzen

Abkürzungen:

AIG	=	Association Internationale de Géodésie
ALGEDOP	=	Alpine Geoid Doppler Project
AVN	=	Allgemeine Vermessungsnachrichten
CSTG	=	International Coordination of Space Techniques for Geodesy and Geodynamics, IAG, Commission VIII
DGK	=	Deutsche Geodätische Kommission
GEOS3	=	Geodynamics Experimental Ocean Satellite
GPS	=	Global Positioning System
HSBw	=	Hochschule der Bundeswehr, München
IAG	=	Internationale Assoziation für Geodäsie
IGP	=	Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
JGR	=	Journal of Geophysical Research
RETrig	=	Réseau Européen de Triangulation
SEASAT	=	Sea Satellite
SGK	=	Schweizerische Geodätische Kommission
SWISSDOC	=	Swiss Doppler Campaign
VPK	=	Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik

Arabelos, D. (1980): Untersuchungen zur gravimetrischen Geoidbestimmung, dargestellt am Testgebiet Griechenland. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 98.

Bernstein, R.L. (ed.) (1982): SEASAT Special Issue I. In: J.G.R., Vol. 87, No. C5, April 1982: 3173–3438.

Brennecke, J., D. Lelgemann, E. Reinhart, W. Torge, W. Weber and H.-G. Wenzel (1983): A European Astro-Gravimetric Geoid. DGK, Reihe B, Heft Nr. 269.

Bürki, B., H.-G. Kahle und H.H. Schmid (1983): Das neue Zenitkamera-Messsystem am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich: Ein Beitrag zur astronomisch/geodätischen Messtechnik für Lotabweichungsmessungen im Gebiet der Ivrea-Zone. VPK 10/83, S. 349–354.

Bürki, B. (1985): (a) Die operationelle Bestimmung von Lotabweichungen. IGP-Bericht Nr. 91, 33 pp.
(b) Die Ivrea-Messkampagne 1983. IGP-Bericht Nr. 92, ETH Zürich, 84 pp.

Chapman, M.E. and M. Talwani (1979): Comparison of Gravimetric Geoids with GEOS-3 Altimetric Geoids. J.G.R., 84: 3803–3816.

Elmiger, A. (1969) Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Ph. D. Thesis, Institut für Geodäsie und Photgrammetrie, ETH Zürich.

Elmiger, A. (1975): Das Geoid in der Schweiz. VPK 3/4-75,pp.171-176.

Forsberg, R. (1984): A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No. 355, Columbus, Ohio, U.S.A.

Geiger, A. und A. Wiget (1986): Anwendung des U.S. Satelliten-Navigationssystems TRANSIT in der Schweiz, Teil I: Messungen und Stationsprotokolle, IGP Bericht Nr. 101, ETH Zürich, 44 pp.

Groten, E. and R. Rummel (1974): Improved Gravimetric Geoid for $7° \leq \lambda \leq 12°$ E and $47° \leq \varphi \leq 54°$ N. AVN 7: 263–268.

Gurtner, W. (1978): Das Geoid in der Schweiz. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Mitteilung Nr. 20.

Heiskanen, W.A. and H. Moritz (1967): Physical Geodesy. Freeman and Company. San Francisco and London, 364 pp.

J.G.R. (1979): Scientific Results of the GEOS 3 Project. Sonderheft: Journal of Geophysical Research, Vol. 84, No. B8, July 1979: 3779–4079.

Jung, K. (1956): Figur der Erde. In: Flügge (Ed.). Handbuch der Physik, 47:534–639. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Kahle, H.-G. and M. Talwani (1973): Gravimetric Indian Ocean Geoid. J.G.R., 39: 167–187 and 491–499.

Kahle, H.-G., M. Chapman and M. Talwani (1978): Detailed 1° x 1° Gravimetric Indian Ocean Geoid and Comparison with GEOS 3 Radar Altimeter Geoid Profiles. Geophysic. Journal, Royal Astron. Society, 55: 703–720.

Kahle, H.-G. (1986): Physikalische Geodäsie. Vorlesungs-Skriptum: 170 pp. IGP ETH Zürich.

Kirwan, A.D., Th.J. Ahrens and G.H. Born (eds.) (1983): SEASAT Special Issue II. In: J.G.R., Vol. 88, No. C3, Feb. 83: 1529–1952.

Kissling, E. (1980): Krustenaufbau und Isostasie in der Schweiz. Ph.D. Thesis, ETH Zürich. Diss. Nr. 6655: 165 pp.

Klingelé, E. and R. Olivier (1980): Die neue Schwerekarte der Schweiz (Bouguer-Anomalien). Matériaux pour la Géologie de la Suisse. Série Géophysique, No. 20:93 pp. Kümmerly + Frey, Geographischer Verlag, Bern.

Kuhn, W. (1981): Zur gravimetrischen Geoidbestimmung in der Schweiz. Diplomarbeit IGP ETH Zürich.

Kunt, M. (1980): Traitement Numérique des Signaux. In: Traité d'Electricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Vol. XX.

Lerch, F.J., S.M. Klosko, R.E. Laubscher and C.A. Wagner (1979): Gravity Model Improvement Using GEOS 3 (GEM 9 and 10). J.G.R. 84: 3897–3916.

Mueller, St. (1982). Deep Structure and Recent Dynamics in the Alps. In: K.J. Hsü (ed.), Mountain Building Processes. Academic Press, London: 181–199.

Moritz, H. (1980): Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.

Oesterreichische Kommission für die Internationale Erdmessung (ed.) (1983): Das Geoid in Oesterreich, Graz 1983.

Parker, R.L. (1972): The Rapid Calculation of Potential Anomalies. Geophysical Journal, Royal Astronomical Society, 31, pp: 447–455.

Rapp, R.H. (1973): Accuracy of Geoid Undulation Computations. JGR, Vol. 78, pp: 7589–7595.

Sideris, M.G. (1984): Computation of Gravimetric Terrain Corrections Using Fast Fourier Transform Techniques. UCSE Report No. 20007, Calgary, Alberta, Canada.

Talwani, M., H.R. Poppe and P.D. Rabinowitz (1972): Gravimetrically determined Geoid in the Western North Atlantic. In: Sea Surface Topography from Space, NOAA Techn. Report, ERL-228-AOML 7–2: 1–34. Boulder, Colorado.

Tscherning, C.C. and R.H. Rapp (1974): Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations and Deflections of the Vertical implied by Anomaly Degree Variance Models. The Ohio State University, Department of Geodetic Science, Report No. 208, Columbus, Ohio, U.S.A.

Watts, A.B. and A.R. Leeds (1977): Gravimetric Geoid in the Northwest Pacific Ocean. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 50: 249–277.

Watts, A.B. and N.W. Ribe (1984): On Geoid Heights and Flexure of the Lithosphere at Seamounts J.G.R., 89: 11152–11170.

Wiget, A., A. Geiger und H.-G. Kahle (1985): Die Doppler-Messkampagne SWISSDOC. Ein Beitrag zur Landesvermessung in der Schweiz. VPK 2/85: 49–52.

Wiget, A., H.-G. Kahle und A. Geiger (1986): ALGEDOP: Ein Beitrag zur satellitengestützten Geoidbestimmung in der Schweiz. VPK 5/86: 177–181.

Wirth, B. (1985): Störkörperbestimmung im Gebiet der Ivrea-Zone aus gravimetrischen und astrogeodätischen Messungen. IGP-Bericht 93, ETH Zürich.

Adresse der Verfasser:

Dipl. Phys. A. Geiger
Prof. Dr. H.-G. Kahle
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
ETH Hönggerberg
CH-8093 Zürich