Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 83 (1985)

Heft: 9: Sonderheft zum Rücktritt und 70. Geburtstag von Prof. Dr. Dr. h. c. H. H. Schmid

Artikel: Die Bedingungsgleichung in der Ausgleichungsrechnung

Autor: Zollinger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-232624

Graphical outputs can be produced semi-automatically by other simpler means. We have on the market several ‹intelligent› drafting tables which can be attached to stereo plotting instruments in place of the older type tables. This innovation reduces significantly a number of manual drafting operations at large map scales, and although such machines will not produce the quality of product of a sophisticated digital mapping system, they are considerably less expensive and simpler to put into production.

The economic viability of a sophisticated digital mapping system depends on the value we put on the digital data base; a data base which will provide a foundation for a geographically referenced terrain information system and for production of a multitude of graphics. The value of this data is not difficult to perceive, but it is difficult to quantify.

In terms of the process to be used in acquiring digital data, in the case where new compilation is needed, it is more economical to collect the topographical data directly on the stereo plotting instrument than to first compile conventionally and then digitize the resulting graphical manuscript.

Need for Standardization

Increasing use and acceptance of digital mapping and the proliferation of systems necessitates development of standards, so that digital data can be widely exchanged. Ideally, the same topographical feature, whatever it be, a road, house, property boundary or a telephone line, should be digitized only once by whatever organization has the first need for this data and then supplied to other users. Such an ideal situation may be only a dream despite best efforts on everyone's part.

However, in the digital area, duplication of effort can be substantially reduced if there is good will on the part of all concerned. A uniform digital data base which would satisfy the needs of all organizations is not feasible, nor is it required in order to achieve the objective of exchanging digital terrain data. What is needed, however, is a National Standard for the Exchange of Digital Terrain Data which will facilitate communication between distributed data bases. These standards should cover three aspects:

1. Classification (taxonomy) of topographical features including definitions.
2. Standards for geometric accuracy, precision and level of topographic content of digital data.
3. EDP standards as applied to digital topographic data.

In Canada, we are now in the process of publishing the National Standards for the Exchange of Digital Topographic Data. A draft of these Standards is now available.

Conclusion

Digital mapping technology with the related interactive display systems has opened new horizons to our professions. Digital topographic data is the base for all geographically referenced earth science and land information systems.

The almost unlimited flexibility of digital data will most likely result in user demands for specific information and for greater variety of data than is commonly the practice with graphical data bases.

The users will be able to interrogate digital topographic data bases and view a map displayed on a CRT in their office or a TV screen in the convenience of their living room. They will be able to select the area of their interest, examine perspective views of the terrain and obtain a paper print of it in their office or at home before taking a vacation trip.

Digital mapping opens new and almost unlimited horizons to the photogrammetric profession. It is incumbent on us to face the challenge of this new technology with confidence and to take advantage of the new opportunities.

Adresse des Verfassers:
Dr. J. M. Zarzycki
EMR Ministry of Energy
Mines and Resources
Topographical Survey Division
Surveys and Mapping Branch
615 Booth Street
Ottawa, Ontario K1A OR6, Canada

Die Bedingungsgleichung in der Ausgleichungsrechnung

H. Zollinger

Ein Gleichungssystem kann grundsätzlich geschrieben werden in der Form:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{O} \qquad (1)$$

Der Vektor $\mathbf{y}$ beinhaltet Parameter, welche unbekannte (zu bestimmende) Grössen $\mathbf{x}$ und bekannte Grössen $\mathbf{L}$ bezeichnen. Falls das System redundant ist (mehr Gleichungen als unbekannte Grössen) und die bekannten Grössen im Sinne von Messwerten nicht widerspruchsfrei vorliegen, ist eine Ausgleichung unumgänglich. Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt nach einem linearen Gleichungssystem bzw. einer Linearisierung von (1):

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_L + \mathbf{B}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{w}_L\ ;\ \mathbf{P}_L \qquad (2)$$

Die Messgrössen (Beobachtungen) erfahren – aufgrund ihrer Widersprüche – Verbesserungen $\mathbf{v}_L$, während die Näherungswerte $\mathbf{x}^0$ für die Unbekannten mit $\Delta\mathbf{x}$-Werten zur Lösung $\mathbf{x}$ beaufschlagt werden.

In Abhängigkeit ihrer Genauigkeit wird den Beobachtungen ein Gewicht p_i bzw. dem ganzen Satz eine Gewichtsmatrix $\mathbf{P}_L$, die die Einführung von Korrelationen erlaubt, zugeordnet.

Die Ausgleichungsbedingung

$$\mathbf{v}_L^T \mathbf{P}_L \mathbf{v}_L = \text{Minimum} \qquad (3)$$

führt mit der Nebenbedingung (2) zum bekannten Normalgleichungssystem

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{A}\mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}\,\Delta\mathbf{x} = \\ = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}\mathbf{P}_L^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{w}_L \qquad (4)$$

(2) ist die allgemeinste Formulierung von Ausgleichungsproblemen: Sie wird in der klassischen Ausgleichungsrechnung als Lösung von ‹bedingten Beobachtungen mit Unbekannten› bezeichnet. Gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, so liegt der Fall der ‹vermittelnden Ausgleichung› vor; ist $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ (wobei $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$), wird damit die ‹bedingte Ausgleichung› formuliert (die Lösung kann dann natürlich nicht über (4) gefunden werden!).

Wenden wir uns (zusätzlichen) Bedingungsgleichungen zu, die sich ebenfalls ganz allgemein anschreiben lassen:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \qquad (5)$$

Unter einer Bedingung wird gewöhnlich eine sich auf die unbekannten Grössen $\mathbf{x}$ beziehende Forderung verstanden, z. B.:

$$x_1 = x_2 \qquad (6)$$

oder aber auch eine Wertzuweisung, z. B. also:

$$x_1 = a \qquad (7)$$

Diese Gleichungen können leicht umgeformt werden; an den vorliegenden Beispielen angewendet:

$$0 + x_1 - x_2 = 0 \qquad (6\,a)$$

$$a - x_1 \quad = 0 \qquad (7\,a)$$

In dieser Form zeigt sich eine formale Gleichheit mit den (klassischen) Beobachtungsgleichungen (1) resp. (2): 0 bzw. a stehen für die Messgrössen, und x_1, x_2 sind unbekannte Grössen. Wie bereits erläutert, wird jeder Beobachtungsgrösse ein Gewicht zugeordnet; für die Bedingungsgleichungen kann bzw. muss das gleiche Konzept übernommen werden. Ein Gewicht $p_{c_i} = \infty$ bedeutet somit, dass die i. Bedingung streng (rigoros) zu erfüllen ist (oft wird im deutschen Sprachgebrauch nur dieser Fall als ‹Bedingung› verstanden), $0 < p_{c_j} < \infty$ lässt der j. Bedingung einen dem Gewicht entsprechenden Spielraum in der Erfüllung zu. Da jede Gleichung aber definitionsmässig immer streng erfüllt werden muss, bezieht sich dieser ‹Spielraum› auf die durch die Umformung künstlich eingeführte Beobachtungsgrösse. Es liegt m. a. W. genau die gleiche Problemstellung wie in (1) vor, und sie lautet, in der linearisierten Form geschrieben:

$$\mathbf{D}\mathbf{v_c} + \mathbf{E}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{w_c}\,;\mathbf{P_c} \qquad (8)$$

Es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, da immer nur eine Gleichung eine Bedingung definiert. Mit der Umbenennung $\mathbf{E} = \mathbf{C}$ lautet (8)

$$\mathbf{v_c} + \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{w_c}\,;\mathbf{P_c} \qquad (9)$$

als allgemeinste Formulierung von (linearisierten) Bedingungsgleichungen. Sie werden nach der Methode der kleinsten Quadrate ebenso der Bedingung

$$\mathbf{v_c^T}\mathbf{P_c}\mathbf{v_c} = \text{Minimum} \qquad (10)$$

unterworfen, und es ergibt sich ein zu (4) homologes Normalgleichungssystem:

$$\mathbf{C^T}\mathbf{P_c}\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} = \mathbf{C^T}\mathbf{P_c}\mathbf{w_c} \qquad (11)$$

Da Normalgleichungssysteme additiv sind, müssen die beiden Systeme (4) und (11), unter Beachtung der gleichen Dimensionierung bzw. Positionierung der Unbekannten, nur addiert werden zur Gesamtlösung, d. h. gemeinsamer Ausgleichung.

Die Gewichtung $\mathbf{P_c}$ der Bedingungsgleichungen verdient besondere Aufmerksamkeit. Der einfachere Fall liegt vor, wenn ‹direkte› Bedingungen – im Sinne von Beobachtungen – angegeben werden können, also z. B.:

$$x_1 = a \;\; ; P_1 \qquad (7)$$

$$x_1 = x_2\,; P_2 \qquad (6)$$

Bedingungen solcher Art können direkt mit Gewichten entsprechend der Genauigkeit der ‹Aussage› versehen werden.

Ein einfaches Beispiel soll diese Bedingungsart näher beleuchten: die Punkte 1 . . . i . . . m einer Punktwolke liegen in einer zur y – z-Ebene des eingeführten Koordinatensystems parallelen Ebene. Populär, aber mathematisch unkorrekt ausgedrückt:

$$x_1 = x_2 = \ldots x_i = \ldots x_m$$

und korrekt als Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 \\ \quad\vdots \\ x_1 = x_m \\ x_2 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ \quad\vdots \\ x_{m-1} = x_m \end{array}\right\} \quad \mathbf{P_x} = \mathbf{P_c} \qquad (12)$$

Jeder Gleichung kann ein Gewicht zugeordnet werden (wie genau liegt der Punkt i in der mathematisch definierten Ebene?) bzw. dem System eine Gewichtsmatrix $\mathbf{P_c}$. Für m = 3 ergibt sich:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

und mit $\mathbf{P_c} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{C^T}\mathbf{P_c}\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

als Normalgleichungsmatrix im Sinne von (11).

Etwas schwieriger ist der Fall von ‹abgeleiteten› Bedingungen, also aus ursprünglichen Beobachtungen abgeleitet. Vertreter davon sind z. B. die Anfelderungsbedingungen, die aus der ursprünglichen Information (= Beobachtung) in der Form (7) hergeleitet wurden, um den Lagerungsdefekt des freien Netzes zu beseitigen. Hier soll wiederum ein einfaches Beispiel zur Illustration dienen: die Punkte 1 . . . i . . . m einer Punktwolke werden auf eine Ebene einnivelliert mit einer bestimmten Genauigkeit; mathematisch formuliert:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a\,; P_1 \\ x_2 = a\,; P_2 \\ \quad\vdots \\ x_m = a\,; P_m \end{array}\right\} \quad \mathbf{P_x} \qquad (15)$$

Der Wert a ist zwar bekannt, sein Bezug zum eingeführten Koordinatensystem jedoch nicht. Trotzdem möchte man die im Gleichungssystem (15) enthaltene Information (gleiche x-Werte der Punkte 1 . . . i . . . m) als Bedingung verwenden:

$$\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} = \mathbf{O}\,;\mathbf{P_c} \qquad (16)$$

lautet die mathematische Formulierung der Bedingung. Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\mathbf{P_c} = (\mathbf{C}\,\mathbf{P_x^{-1}}\mathbf{C^T})^{-1} \qquad (17)$$

liefert die den Bedingungsgleichungen zugehörige Gewichtsmatrix. Die Herleitung der Bedingungsgleichungen (16) verlangt allerdings einige Sorgfalt: Man ist versucht, aus (15) die selben Gleichungen wie (12) herzuleiten (für m = 3):

$$\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array} \qquad (12\,a)$$

Die Berechnung von $\mathbf{P_c}$ wird aber nach (17) nicht möglich sein (Singularität), da die abgeleiteten Bedingungen (12 a) nicht unabhängig sind. Etwas populär ausgedrückt heisst das, dass versucht würde, dem System (15) mehr Information zu ‹entlocken›, als es beinhaltet. Der eigentliche Informationsgehalt von (15) ist:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_3 \end{array}\right\} \quad \text{Ablesung (= Messung) am Nivellier}$$

$$(15\,a)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = a \\ a_3 = a \end{array}\right\} \quad \text{Bezug zum übergeordneten Koordinatensystem}$$

Anzahl Gleichungen n = 6, Anzahl Unbekannte (x_1, x_2, x_3, a) n = 4, also Redundanz (n – u) = 2. Es sind also höchstens zwei (unabhängige) Bedingungen herleitbar:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_3 \end{array}\right\} \quad \mathbf{P_c} \qquad (17)$$

Daraus folgt entsprechend (13):

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

und für $\mathbf{P_x} = \mathbf{I}$ ergibt sich:

$$\mathbf{P_c} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \qquad (19)$$

und als Normalgleichungsmatrix nach (11):

$$\mathbf{C^T}\,\mathbf{P_c}\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{vmatrix} \qquad (20)$$

Hätte man $\mathbf{P_x} = 3\mathbf{I}$ gesetzt, so ergäbe sich numerisch das gleiche Normalgleichungssystem wie (14). Dass die Grundinformation dreifach stärker gewichtet sein muss (also 1.7fach ‹genauer› oder ‹besser›) zur Erreichung des selben Resultates als mit ‹direkten› Bedingungen, ist plausibel, da ja ein messtechnischer Umweg über nicht interessierende Grössen $a_1 \ldots a_m$ erfolgte.

Literatur

Schmid, H. H.: Ein allgemeiner Ausgleichungsalgorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie. BuL 3–4/1965; bzw. Mitteilung Nr. 22 des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie ETHZ, 1977.

Adresse des Verfassers:
Hansjürg Zollinger
Sennhauserweg 6, CH-8032 Zürich