

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 83 (1985)

**Heft:** 9: Sonderheft zum Rücktritt und 70. Geburtstag von Prof. Dr. Dr. h. c. H. H. Schmid

**Artikel:** Betrachtungen zur ausgleichenden Geraden im Raum

**Autor:** Ebner, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-232610>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

er über zwei Näherungskoordinatenpaare errechnet werden. Dann werden alle für die erwünschte Lagerung als fingierte Beobachtungen geltenden Koordinaten eingegeben; daraus errechnet das Programm nötigenfalls die Näherungskoordinaten unbekannter Punkte und die Widersprüche mit den <beobachteten> Koordinatendifferenzen.

6.8 Im nächsten Schritt werden vom Bearbeiter die Elemente der Lagerungskovarianz-Matrix (Stützinformation) verlangt, worauf die endgültigen Koordinaten mit ihren Kovarianzen und allenfalls die (zweiten) Verbesserungen an den ausgeglichenen Beobachtungen herausgegeben werden. Analog zu den Bemerkungen in 6.5 könnten jetzt mit den Matrizenprozeduren z.B. beliebige S-Transformationen untersucht werden [Just 1979].

## 7. Abschliessende Bemerkungen

7.1 Aus dieser Darstellung dürfte sich wohl ergeben, dass das Programm, das zur Zeit als Prototyp in der studentischen Praxis erprobt wird, anpassungs- und entwicklungsfähig ist. Vorerst wollen wir feststellen, wo Schwächen in der Dialoggestaltung sichtbar werden, wo zusätzliche Information helfen würde und wo man ohne Schaden weitere Automatismen einführen darf.

7.2 Längerfristig kommen Ergänzungen mit a-priori-Verfahren für die Zuverlässigkeit und insbesondere die Unterstützung des Dialogs mit graphischen Elementen in Frage. Vielleicht drängt sich auch eine Verbindung mit den Datenaufbereitungsprogrammen auf.

7.3 Im Zusammenhang mit dem Programmpaket PRIMA und dem COMMAND-FILES-Konzept scheint sich bei uns eine neue Form eines anwendungsorientierten Programmierstils zu entwickeln:

Vorerst bearbeitet man ein neues Ausgleichungs-Problem schrittweise mit PRIMA; sukzessive können dann einige Passagen automatisch miteinander verknüpft und weitere automatisierende Moduln eingebaut werden. Damit ist bereits eine erste praktische Erprobung des Dialogs in die Wege geleitet. Man beachte, dass vor jedem Programmsschritt auch Kommentar und Lern-Information eingebaut werden können. Eine Netzbearbeitung wird so zum andauernden Lernprozess werden (der Freude macht!). Die hier zu lesende Beschreibung ist aus dieser Sicht ein recht unzulängliches, mühsames (konventionelles!) Verfahren, um den Prozess <interaktive bedingte Netzausgleichung>, wie er sich zwischen Bearbeiter und Bildschirminformation abspielt, wiederzugeben.

7.4 Und das Wichtigste: hinter dem Ganzen steht nicht mehr die <autonome Maschine>, die etwas macht, das sich dem Verständnis des Bearbeiters immer mehr entzieht. Im interaktiven Programm verfolgt, *kontrolliert* und *steuert* der Bearbeiter den ablaufenden Prozess; er kann ihn abbrechen, einzelne Schritte rückgängig machen, ad hoc Zwischenschritte einbauen usw. Er beherrscht den Automaten, nicht – wie so oft – umgekehrt... Man vergleiche dazu auch [Kuhn 1985].

7.5 Von der Triangulationstechnik her gesehen glaube ich, dass einige (nicht alle!) Aufgaben aus der Praxis auf diese Art zweckmässiger gelöst werden könnten als mit der vermittelnden Ausgleichung. Insbesondere die Trennung in Netzausgleichung und Netzlagerung dürfte in vielen Fällen klarend wirken. Die Daten grosser Netze, bei denen grobe Fehler <verschwinden> könnten, prüft man durch bedingt ausgeglichene Teilnetze auf Fehler, bevor die Gesamt-

ausgleichung eingeleitet wird. Auch zur Lagerung gibt es Perspektiven, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

7.6 Ich danke meinem Mitarbeiter, dipl. Ing. Benoît Studemann, für seine auszeichneten Programmierarbeiten und für viele anregende Vorschläge.

Da ich weiss, dass unser Jubilar sich viel mit geodätischen und photogrammetrischen Netzen und deren Lagerung beschäftigt hat, z.B. in [Schmid 1980], hoffe ich, dass diese Arbeit sein kritisches Interesse finde.

## Literatur

Carosio, A.: Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme; Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETH Zürich, Mitteilung Nr. 35, 1983

Conzett, R.: Über lineare Transformationen von Triangulationsnetzen; Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft III/IV, 1975

Conzett, R.: Das Austausch-Verfahren bei der Berechnung geodätischer Netze; Festschrift Höpcke, Wiss. Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kulturtechnik an der Technischen Universität Hannover, Nr. 83, 1978

Just, Chr.: Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer Vermessung; Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETH Zürich, Mitteilung Nr. 27, 1979

Kuhn, W., Wirth, B.: PRIMA, Pascal-Routinen für Interaktive Matrizen-Anwendungen; Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETH Zürich, Bericht Nr. 77, 1983

Kuhn, W.: Zur Entwicklung interaktiver Programme und Systeme; Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Heft 2, 1985

van Mierlo, J.: A Review of Model Checks and Reliability; VIth International Symposium on Geodetic Computations; Munich 1981

Schmid, H.H.: Vom freien zum gelagerten Netz; Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETH Zürich, Mitteilung Nr. 29, 1980

Adresse des Verfassers:  
Prof. Rudolf Conzett  
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich

# Betrachtungen zur ausgleichenden Geraden im Raum

H. Ebner

## 1. Einführung und Überblick

Die Geradenausgleichung mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ist in der Vergangenheit oft behandelt worden. Stellvertretend für die einschlägigen Publikationen sei die Arbeit von E. Schmid und H. H. Schmid zur Kurven- und Flächen-Anpassung mit Potentialfunktionen genannt, in der die ausgleichende Gerade in der Ebene sehr allgemein behandelt wird [1].

Im Rahmen einer vor mehreren Jahren durchgeföhrten Ingenieurvermessung ergab sich für den Verfasser die Aufgabe, Kurven, deren Einzelpunkte mit Hilfe der analytischen Nahbereichsphotogrammetrie bestimmt wurden, durch Gerade im Raum zu approximieren [2]. Dazu wurde die einzelne Gerade durch Anfangspunkt- und Richtungs-Vektor beschrieben und eine vermittelnde Ausgleichung so angesetzt, dass sich die

sechs Geradenparameter als unkorreliert und gleich genau ergaben.

Im vorliegenden Beitrag wird die Geradenausgleichung im Raum mit sechs Parametern und dem zugehörigen Datumsdefekt zwei allgemeiner als in [2] und in Anlehnung an die Arbeiten von H. H. Schmid zur Lagerung freier Netze behandelt [3]. Der Datumsdefekt wird dabei durch Einführung von zwei Datumsparametern behoben, über die frei

verfügt werden kann. Sodann wird gezeigt, dass durch geeignete Werte für diese beiden Parameter und ihre Gewichte die oben genannten unkorrelierten und gleich genauen Geradenparameter erhalten werden können. Die selbe spezielle Kovarianzmatrix der Geradenparameter wird schliesslich mit Hilfe einer Theorie zur Analyse von Kovarianzmatrizen erhalten, die vom Verfasser 1975 vorgestellt wurde [4].

## 2. Geradenausgleichung im Raum und Datumsdefekt

Die Beschreibung der ausgleichenden Geraden im Raum erfolgt durch den Anfangspunkt-Vektor  $[\hat{a}\hat{b}\hat{c}]^T$  und den Richtungs-Vektor  $[\hat{d}\hat{e}\hat{f}]^T$  (siehe Abb. 1).

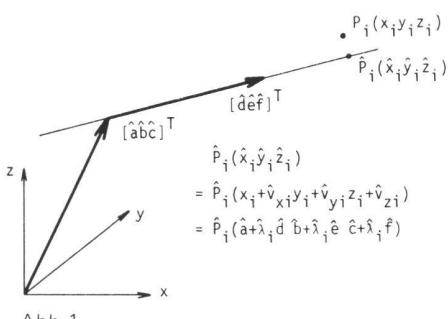


Abb. 1

Die Koordinaten  $x_i, y_i, z_i$  der Messpunkte  $P_i, i=1\dots n$  werden als Beobachtungen einer vermittelnden Ausgleichung und die sechs Geradenparameter  $\hat{a} \dots \hat{f}$  sowie die Massstabsfaktoren  $\hat{\lambda}_i$  als zugehörige Unbekannte behandelt. Damit ergeben sich die folgenden  $3n$  Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\hat{v}_{xi} &= \hat{a} + \hat{\lambda}_i \hat{d} - x_i \\ \hat{v}_{yi} &= \hat{b} + \hat{\lambda}_i \hat{e} - y_i \\ \hat{v}_{zi} &= \hat{c} + \hat{\lambda}_i \hat{f} - z_i, \quad i = 1 \dots n,\end{aligned}\quad (1)$$

denen jeweils das Gewicht 1 zugewiesen wird. Auf die Behandlung allgemeinerer Genauigkeitseigenschaften soll aus Gründen der Übersichtlichkeit hier verzichtet werden.

Für die Linearisierung der Gleichungen (1) erforderliche Näherungswerte der Unbekannten werden auf einfache Weise erhalten nach:

$$\begin{aligned}a_0 &= [x]/n \\ b_0 &= [y]/n \\ c_0 &= [z]/n\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}d_0 &= [(x-a_0)^2]/n^{1/2} \\ e_0 &= [(y-b_0)^2]/n^{1/2} \\ f_0 &= [(z-c_0)^2]/n^{1/2}\end{aligned}\quad (3)$$

$$\lambda_{10} = (d_0(x_i-a_0) + e_0(y_i-b_0) + f_0(z_i-c_0)) / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2). \quad (4)$$

Dabei ergibt sich  $\lambda_{10}$  aus einer lokalen Ausgleichung nach kleinsten Quadraten für den Punkt  $P_i$ .

Die linearisierten Verbesserungsgleichungen lauten sodann:

$$\begin{aligned}\hat{v}_{xi} &= d_0 \Delta \hat{a} + \Delta \hat{d} + \lambda_{10} \Delta \hat{d} - (x_i - a_0 - \lambda_{10} d_0) \\ \hat{v}_{yi} &= e_0 \Delta \hat{b} + \Delta \hat{e} + \lambda_{10} \Delta \hat{e} - (y_i - b_0 - \lambda_{10} e_0) \\ \hat{v}_{zi} &= f_0 \Delta \hat{c} + \Delta \hat{f} + \lambda_{10} \Delta \hat{f} - (z_i - c_0 - \lambda_{10} f_0)\end{aligned}\quad (5)$$

und in Matrixschreibweise:

$$\hat{v}_1 = A_1 \Delta \hat{x}_1 + A_2 \Delta \hat{x}_2 - l_1, \quad P_{11} = I, \quad (6)$$

mit

$$A_1 = \begin{bmatrix} d_0 & \dots & 0 \\ e_0 & \dots & 0 \\ f_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_0 \\ 0 & \dots & e_0 \\ 0 & \dots & f_0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \lambda_{no} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_{no} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_{no} \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} x_1 - a_0 - \lambda_{10} d_0 \\ y_1 - b_0 - \lambda_{10} e_0 \\ z_1 - c_0 - \lambda_{10} f_0 \\ \vdots \\ x_n - a_0 - \lambda_{no} d_0 \\ y_n - b_0 - \lambda_{no} e_0 \\ z_n - c_0 - \lambda_{no} f_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta \hat{x}_1 &= [\Delta \hat{a}_1 \dots \Delta \hat{a}_n]^T, \\ \Delta \hat{x}_2 &= [\Delta \hat{d} \Delta \hat{b} \Delta \hat{c} \Delta \hat{d} \Delta \hat{e} \Delta \hat{f}]^T \\ \hat{v}_1 &= [\hat{v}_{x1} \hat{v}_{y1} \hat{v}_{z1} \dots \hat{v}_{xn} \hat{v}_{yn} \hat{v}_{zn}]^T\end{aligned}$$

Das durch (1) beschriebene System von Verbesserungsgleichungen hat den Datumsdefekt zwei. Wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, kann nämlich der Anfangspunkt-Vektor  $[\hat{a}\hat{b}\hat{c}]^T$  entlang des Richtungs-Vektors  $[\hat{d}\hat{e}\hat{f}]^T$  um einen willkürlichen Betrag verschoben und der Richtungs-Vektor um einen beliebigen Betrag verlängert werden, ohne dass sich die Gerade ändert bzw. die Verbesserungen  $\hat{v}_1$  der Ausgleichung ändern. Bezogen auf das System der linearisierten Verbesserungsgleichungen (5) bedeutet dies, dass die Komponenten der Vektoren  $[\Delta \hat{a} \Delta \hat{b} \Delta \hat{c}]^T$  und  $[\Delta \hat{d} \Delta \hat{e} \Delta \hat{f}]^T$  in Richtung  $[d_0 e_0 f_0]$  unbestimmt sind (siehe Abb. 2).

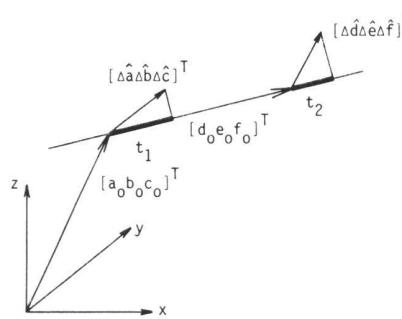


Abb. 2

Bezeichnen wir diese Komponenten mit  $t_1$  und  $t_2$ , so gilt:

$$\begin{aligned}t_1 &= [d_0 e_0 f_0] [\Delta \hat{a} \Delta \hat{b} \Delta \hat{c}]^T / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2} \\ &= (d_0 \Delta \hat{a} + e_0 \Delta \hat{b} + f_0 \Delta \hat{c}) / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2} \\ t_2 &= [d_0 e_0 f_0] [\Delta \hat{d} \Delta \hat{e} \Delta \hat{f}]^T / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2} \\ &= (d_0 \Delta \hat{d} + e_0 \Delta \hat{e} + f_0 \Delta \hat{f}) / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Das Datum kann nun durch freie Verfügung über  $t_1$  und  $t_2$  festgelegt werden. Der Allgemeinfall liegt vor, wenn diese beiden Datumsparameter als Beobachtungen behandelt werden, was zu den folgenden Verbesserungsgleichungen führt:

$$\begin{aligned}\hat{v}_{t1} &= d'_0 \Delta \hat{a} + e'_0 \Delta \hat{b} + f'_0 \Delta \hat{c} - t_1 \\ \hat{v}_{t2} &= d'_0 \Delta \hat{d} + e'_0 \Delta \hat{e} + f'_0 \Delta \hat{f} - t_2,\end{aligned}\quad (8)$$

mit

$$\begin{aligned}d'_0 &= d_0 / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2} \\ e'_0 &= e_0 / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2} \\ f'_0 &= f_0 / (d_0^2 + e_0^2 + f_0^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich

$$\hat{v}_2 = G \Delta \hat{x}_2 - l_2, \quad P_{22}, \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned}G &= \begin{bmatrix} d'_0 & e'_0 & f'_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d'_0 & e'_0 & f'_0 \end{bmatrix}, \\ P_{22} &= \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{t2} \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \\ \hat{v}_2 &= [\hat{v}_{t1} \hat{v}_{t2}]^T\end{aligned}$$

Über die Datumsparameter  $t_1$  und  $t_2$  und die Gewichtsmatrix  $P_{22}$  kann ohne Einfluss auf die Verbesserungen  $\hat{v}_2$  frei verfügt werden.

## 3. Die allgemeine Kleinsten-Quadrat-Lösung

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Gleichungen (6) und (9) führt zur Minimumsfunktion:

$$\begin{aligned}\Phi &= \hat{v}_1^T \hat{v}_1 + \hat{v}_2^T P_{22} \hat{v}_2 = \\ &= (A_1 \Delta \hat{x}_1 + A_2 \Delta \hat{x}_2 - l_1)^T (A_1 \Delta \hat{x}_1 + A_2 \Delta \hat{x}_2 - l_1) \\ &\quad + \hat{v}_2^T P_{22} \hat{v}_2 + 2 \hat{k}^T (G \Delta \hat{x}_2 - l_2 - \hat{v}_2) = \min.\end{aligned}\quad (10)$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen von  $\Phi$  nach  $\Delta \hat{x}_1, \Delta \hat{x}_2, \hat{v}_2$  und den Korrelaten  $\hat{k}$  ergeben sich die Normalengleichungen:

$$\begin{aligned}A_1^T A_1 \Delta \hat{x}_1 + A_1^T A_2 \Delta \hat{x}_2 &= A_1^T l_1 \\ A_2^T A_1 \Delta \hat{x}_1 + A_2^T A_2 \Delta \hat{x}_2 + G^T \hat{k} &= A_2^T l_1 \\ G \Delta \hat{x}_2 - P_{22}^{-1} \hat{k} &= l_2.\end{aligned}\quad (11)$$

Eine Elimination von  $\Delta\hat{x}_1$  führt schliesslich zu den reduzierten Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} A_2^T A_2 - A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} (A_1^T A_2) \Delta\hat{x}_2 + G^T \hat{k} &= \\ = A_2^T I_1 - A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T I_1 \\ G \Delta\hat{x}_2 - P_{22}^{-1} \hat{k} &= I_2 . \end{aligned} \quad (12)$$

Bei Wahl eines allgemeinen Inversions- bzw. Lösungsverfahrens verarbeitet (12) jede Gewichtsmatrix  $P_{22}$ , auch den Sonderfall  $P_{22}^{-1}=0$ , der fehlerfreien Datumsparametern  $t_1$  und  $t_2$  entspricht.

#### 4. Die spezielle Lösung mit unkorrelierten und gleich genauen Geradenparametern

Kann  $P_{22}^{-1}=0$  ausgeschlossen werden, lässt sich  $\hat{k}$  aus (12) eliminieren, und es ergibt sich das zweifach reduzierte Normalgleichungssystem:

$$\begin{aligned} (A_2^T A_2 - A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_2 + G^T P_{22} G) \Delta\hat{x}_2 &= \\ = A_2^T I_1 - A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T I_1 + G^T P_{22} I_2 , \end{aligned} \quad (13)$$

mit

$$A_2^T A_2 = \begin{bmatrix} n & & & \\ & n & & \\ & & n & \\ & & & [\lambda_o^2] \end{bmatrix}$$

$$A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_2 =$$

$$= 1/(d_o^2 + e_o^2 + f_o^2) \begin{bmatrix} nd_o^2 & nd_o e_o & nd_o f_o & 0 & 0 & 0 \\ ne_o^2 & ne_o f_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ nf_o^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [\lambda_o^2] d_o^2 & [\lambda_o^2] d_o e_o & [\lambda_o^2] d_o f_o & & \\ & & [\lambda_o^2] e_o^2 & [\lambda_o^2] e_o f_o & & \\ & & & [\lambda_o^2] f_o^2 & & \end{bmatrix}$$

$$G^T P_{22} G =$$

$$= 1/(d_o^2 + e_o^2 + f_o^2) \begin{bmatrix} p_{t1} d_o^2 & p_{t1} d_o e_o & p_{t1} d_o f_o & 0 & 0 & 0 \\ p_{t1} e_o^2 & p_{t1} e_o f_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{t1} f_o^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & p_{t2} d_o^2 & p_{t2} d_o e_o & p_{t2} d_o f_o & & \\ & & p_{t2} e_o^2 & p_{t2} e_o f_o & & \\ & & & p_{t2} f_o^2 & & \end{bmatrix}$$

$$A_2^T I_1 = \begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ [\lambda_o x] - [\lambda_o^2] d_o & \\ [\lambda_o y] - [\lambda_o^2] e_o & \\ [\lambda_o z] - [\lambda_o^2] f_o & \end{bmatrix}, G^T P_{22} I_2 = 1/(d_o^2 + e_o^2 + f_o^2)^{1/2} \begin{bmatrix} d_o p_{t1} t_1 \\ e_o p_{t1} t_1 \\ f_o p_{t1} t_1 \\ d_o p_{t2} t_2 \\ e_o p_{t2} t_2 \\ f_o p_{t2} t_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T I_1 = 0$$

Wird nun das Gewicht  $p_{t1}=n$  gesetzt und  $p_{t2}=[\lambda_o^2]$ , so verschwindet der Ausdruck  $-A_2^T A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_2 + G^T P_{22} G$  in (13). Ferner kann durch  $t_1=0$  erreicht werden, dass die ersten drei Elemente des Vektors  $G^T P_{22} I_2$  verschwinden. Durch die Festsetzung

$$t_2 = (d_o^2 + e_o^2 + f_o^2)^{1/2} ([\lambda_o^2] - n)/(2[\lambda_o^2]) \quad (14)$$

wird schliesslich erzielt, dass der Ausdruck  $[\lambda_o^2]$ , der aufgrund der gewählten Näherungswerte (2), (3) und (4) schon nahe bei  $n$  liegt, zu  $n$  konvergiert. Damit geht (13) in die wesentlich einfachere Form über:

$$A_2^T A_2 \Delta\hat{x}_2 = h , \quad (15)$$

mit

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [\lambda_o x] - ([\lambda_o^2] + n)d_o/2 \\ [\lambda_o y] - ([\lambda_o^2] + n)e_o/2 \\ [\lambda_o z] - ([\lambda_o^2] + n)f_o/2 \end{bmatrix}$$

Aufgrund der Diagonalstruktur von  $A_2^T A_2$  können die unbekannten Zuschläge nun direkt berechnet werden zu:

$$\Delta\hat{a} = \Delta\hat{b} = \Delta\hat{c} = 0 \quad (16)$$

$$\Delta\hat{d} = ([\lambda_o x] - ([\lambda_o^2] + n)d_o/2)/[\lambda_o^2]$$

$$\Delta\hat{e} = ([\lambda_o y] - ([\lambda_o^2] + n)e_o/2)/[\lambda_o^2]$$

$$\Delta\hat{f} = ([\lambda_o z] - ([\lambda_o^2] + n)f_o/2)/[\lambda_o^2] \quad (17)$$

Aus (16) folgt, dass die Näherungswerte (2) bereits identisch mit den ausgeglichenen Parametern  $\hat{a}\hat{b}\hat{c}$  sind. Die ausgeglichenen Parameter  $\hat{d}\hat{e}\hat{f}$  werden ausgehend von den Näherungswerten (3) iterativ aus (4) und (17) erhalten.

Nach dem letzten Iterationsschritt ergeben sich die Verbesserungen  $\hat{v}_1$  aus (6) und die Verbesserungen  $\hat{v}_2$  zu Null. Damit gilt für den Varianzfaktor:

$$\hat{\sigma}_o^2 = \hat{v}_1^T \hat{v}_1 / (2n-4) . \quad (18)$$

Die Diagonalstruktur von  $A_2^T A_2$  führt zu unkorrelierten Geradenparametern  $\hat{a} \dots \hat{f}$ . Für ihre Varianzen gilt wegen  $[\lambda^2] = n$ :

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{c}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{d}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{e}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{f}}^2 = \hat{\sigma}_o^2/n \quad (19)$$

#### 5. Schluss

Je nachdem, wie über die Datumsparameter  $t_1$  und  $t_2$  und ihre Gewichtsmatrix  $P_{22}$  verfügt wird, ergeben sich unterschiedliche Lösungen für die Geradenparameter  $\hat{a} \dots \hat{f}$  und ihre Kovarianzmatrix. Alle diese Lösungen beschreiben die selbe Gerade und führen zu den selben Verbesserungen  $\hat{v}_1$ . Die spezielle Lösung nach Kapitel 4 zeichnet sich gegenüber ihren Alternativen durch geringen Rechenaufwand und einfachste Struktur der Kovarianzmatrix der Geradenparameter aus.

Angemerkt sei schliesslich, dass die selbe spezielle Kovarianzmatrix mit Hilfe einer Theorie zur Analyse von Kovarianzmatrizen erhalten werden kann, die vom Verfasser 1975 vorgestellt wurde [4]. Diese Theorie geht von einer beliebigen Lösung mit zugehöriger Kovarianzmatrix  $M$ , hypothetischen Filterparametern  $\Delta t$  und einer hypothetischen Kovarianzmatrix  $K$  einfacherer Struktur aus und prüft, ob  $M$  streng in  $K$  und die Wirkung der  $\Delta t$  zerlegt werden kann. Dabei genügt es, anstelle von  $K$  die Matrix  $K'$  mit  $K=mK'$  und unbekanntem  $m$  anzusetzen, da  $m$  im Zuge der Analyse mit bestimmt wird.

Angewandt auf den vorliegenden Fall gehen wir von den Filterparametern  $t_1$  und  $t_2$  und der Matrix  $K'=I$  aus. Eine beliebige Lösung und die zugehörige Kovarianzmatrix  $M$  erhalten wir z.B., indem wir in (12) für  $t_1$  und  $t_2$  die Werte von Kapitel 4, für  $P_{22}^{-1}$  aber die Nullmatrix einführen. Die Analyse nach [4] führt

dann korrekt zu  $m = \hat{\sigma}_0^2/n$  und ergibt, dass  $M$  streng in  $K$  und die Wirkung von  $t_1$  und  $t_2$  zerlegt werden kann. Da  $t_1$  und  $t_2$  Datumsparameter sind, über die frei verfügt werden darf, kann  $M$  hier einfach durch  $K = mK' = (\hat{\sigma}_0^2/n)I$  ersetzt werden.

Für die empirische Überprüfung der Aussagen und das kritische Lesen des Manuskripts dankt der Verfasser Herrn Dipl.-Ing. Werner Mayr.

#### Literatur

- [1] Schmid, E. and Schmid, H. H.: Curve and Surface Fitting with Potential Functions. Zeitschrift für Vermessungswesen.
- [2] Beyer, R., Ebner, H. und Wester-Ebbinghaus, W.: Numerische Photogrammetrie am Traggerüst der Wuppertaler Schwebebahn. Der Stahlbau, 363–370, 1983.
- [3] Schmid, H. H.: Vom freien zum gelagerten Netz. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Mitteilungen Nr. 29, 1980.
- [4] Ebner, H.: Analysis of Covariance Matrices. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 214, 111–121, 1975.

#### Adresse des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. Heinrich Ebner  
Lehrstuhl für Photogrammetrie  
Technische Universität München  
Arcisstrasse 21, D-8000 München 2

## Photogeodesy

L. W. Fritz

Photogrammetry is the science of obtaining precise measurements from photography. It provides non-contact measurement capabilities that permit significant economies for land survey when compared with traditional field methods. It further provides the advantages of a photographic data base in that all measurements may be reobserved; a photographic record of all ground point locations is permanently recorded; and, with the assist of a modern analytical stereoplotter equipped with zoom magnification capability, any new ground object may be rapidly positioned by stereomeasurement of new photography in conjunction with an existing photographic data base.

Photogeodesy for the densification of geodetic control networks is the most significant land survey capability developed in the past decade.

Photogeodesy is geodetic control densification using analytical photogrammetric block adjustment techniques. In the United States the recognized need for a national multipurpose cadastre has generated the requirement for densification of the National Geodetic Horizontal Control Network (NCR, 1980). Photogeodesy in most cases is the most economical means to provide this densification.

The constraints of photogrammetric survey with its "flying theodolite" are similar to those on a geodetic survey in that strength of figure, line-of-sight, and atmospheric refraction must be accounted for with rigor to obtain optimal accuracy.

Photogeodesy has been developed at the National Ocean Service (NOS) of the National Oceanic and Atmospheric Administration to an operational capability. To reach this state there have been many projects conducted at NOS\*, each successively advancing the capability through added refinements in technique and/or instrumentation.

Some of the characteristics of these efforts and the results obtained are summarized in the Table. The most noteworthy results are obviously demonstrated by the Casa Grande, New Mexico, and Ada County, Idaho, projects.

The achievement of accuracies less than  $2\text{ }\mu\text{m}$  on the photograph, equivalent to 4 to 5 centimeter accuracies for ground positions within the block from 1:25,000 scale photography, is to a large account due to the influence of Dr. Hellmut Schmid from his tenure as Director of the NOS Geodetic Research and Development Laboratory. The Worldwide Satellite Triangulation Program which he directed is the prime example of his drive to continually improve photogrammetric accuracies. His insistence on the isolation of systematic errors and the implementation of means for their removal continues to pervade the NOS photogrammetric research environment to this day. This philosophy includes maintenance of a state of statistical rigor in all mensuration activities. It has instilled the concept that one must strive to remove all systematic errors "a priori" before resorting to the application of "self calibration" parameters into an adjustment process.

Development of the Worldwide Satellite Triangulation Program (Schmid, 1974) provided many of the tools and techniques required to develop photogeodesy to its present state. Camera calibration by the stellar method was employed on every exposure made for that program. It now serves as the basic, as well as most accurate, procedure for the determination of radial and decentering lens distortion and the other camera constants of cameras used for photogeodesy (Fritz & Schmid, 1974). Other studies on the determination of atmo-

spheric refraction, comparator calibration, grid plate (reseau) calibration, film distortion, error propagation, and most significantly adjustment techniques for large systems of simultaneous equations, have also been influential on the development of photogeodesy at NOS. In 1974 Chester Slama was requested to design, develop, and implement a block aerial triangulation project to enable NOS to densify portions of its National Horizontal Geodetic Network. This Ultraprecise Numerical Photogrammetric Geodesy (UNPHOG) project recognized the strengths and pitfalls of the earlier NOS photogeodesy efforts and a photogrammetric research team was formed to address them. Although no single individual can be credited with the total design or development of any single aspect of the photogeodesy process, the following is a summary of the general team effort conducted under the most capable technical direction of Chester Slama. Emil Homick developed the block adjustment program; Mort Keller, Bill Golder, and the author designed and tested the ground targets; Les Perry and Bill Golder designed the field procedures; the author designed the calibration and office procedures; and Chester Slama designed all planning procedures, analysis phases of the adjustments, as well as the following optimal geometry for photogeodesy.

The basic requirement for optimization of geometry is two-thirds forward and side overlap of the photography. The key design point is that geometric strength of figure is ideally provided by assuring that every passpoint and control point is targetted and appears on a minimum of nine photographs that overlap by approximately 66 percent. This means that ground targets or well defined points must be spaced at regular intervals throughout the entire project area and that every photograph contain a minimum of nine imaged

\* NOS is the former U.S. Coast and Geodetic Survey.