Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 81 (1983)

Heft: 8

Artikel: Multivariate Statistik und Zuverlässigkeit

Autor: Carosio, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-231642

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Multivariate Statistik und Zuverlässigkeit

A. Carosio

Die Geodäten haben sich seit jeher mit zwei wichtigen Problemen befasst: Der Planung und Gestaltung von zuverlässigen Messanordnungen mit den dazugehörigen Berechnungsverfahren sowie der Feststellung und Lokalisierung von groben Fehlern nach durchgeführten Messungen.
Der vorliegende Bericht, eine Kurzfassung einer umfassenden Studie, die vor kurzem als Promotionsarbeit an der ETHZ angenommen worden ist, befasst sich mit beiden Problemen und zeigt die Zusammenhänge zwischen statistischen Tests und Zuverlässigkeit sowie zwischen den intuitiven Verfahren aus der Praxis und den modernen Methoden der multivariaten Statistik. Unter anderem wird ein neuer Test für die Beurteilung der Triangulationsresultate (der NMAX-Test) beschrieben und seine Wirkung auf die Zuverlässigkeit der Messsysteme gezeigt.

Les géodésiens se sont toujours occupés de deux problèmes très importants: la conception de réseaux géodésiques et de procédés de calcul fiables, ainsi que l'identification des erreurs grossières après les campagnes de mesures.
Le présent travail, résumé d'une récente thèse de doctorat de l'EPFZ, traite les deux problèmes et décrit, d'une part, les relations entre tests statistiques et fiabilité et, d'autre part, entre les procédés intuitifs des praticiens et les méthodes modernes de la statistique multivariée. Un nouveau test (NMAX) pour l'évaluation des résultats est présenté plus en détail avec les conséquences relatives sur la fiabilité des systèmes de mesure.

Einführung

1. Problemstellung und Zielsetzungen

Seit mehr als einem Jahrhundert wird über die statistischen Eigenschaften der geodätischen Beobachtungen gesprochen und über die Tatsache, dass die für die Auswertung bereitgestellten Messwerte nicht immer als Realisierungen von normalverteilten Zufallsvariablen betrachtet werden können. In der klassischen Ausgleichungsrechnung wurden die Konsequenzen dieser Feststellung nur am Rande behandelt. In den meisten Werken spricht man von drei Arten von Fehlern für die Beobachtungen in einem Messprozess: Zufällige, systematische und grobe Fehler. Während die Bedeutung der zufälligen Fehler immer mit grosser Aufmerksamkeit beobachtet wurde, beschäftigten sich die Vermessungsingenieure nur empirisch mit der Problematik der groben Fehler.
Erst Ende der sechziger Jahre veröffentlichte W. Baarda seine bekannte Arbeit ‹A testing procedure for use in geodetic networks›, wodurch erstmals die theoretischen Grundlagen für die Fehlersuche und für die Überprüfung der Zuverlässigkeit der geodätischen Messsysteme formuliert waren. Die vorliegende Arbeit befasst sich hauptsächlich mit den Verfahren für die Entdeckung und Beseitigung allfälliger grober Fehler und versucht zu zeigen, dass die intuitiven Methoden der Praktiker und die mathematischen Verfahren der Statistiker viel ähnlicher sind, als man üblicherweise annimmt.
Die Hauptkomponentenanalyse und die darauf aufgebaute Zuverlässigkeitstheorie werden etwas ausführlicher beschrieben, dies nicht, weil sie wichtiger wären als andere Methoden, sondern weil sie in der letzten Zeit vom Verfasser erstmals für die Lösung geodätischer Probleme eingesetzt worden sind.

2. Die Ausgleichung geodätischer Netze in der Praxis

2.1 Die schweizerische Triangulation

Die Arbeiten für die jetzt gültige schweizerische Triangulation höherer Ordnung begannen in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts. Die Koordinaten der Punkte wurden durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate meistens in kleinen Teilnetzen bestimmt. Die grösste Anzahl der Berechnungen sind Einzel- oder Doppelpunkteinschaltungen; nur das Netz erster Ordnung wurde in grösseren Abschnitten ausgeglichen.
Vor der Computerzeit war der Aufwand für eine strenge Ausgleichung grosser Netze so erheblich, dass man schon für drei Neupunkte etlichen Respekt empfand. Es ist deshalb nicht überraschend, dass sich damals niemand besonders bemühte, Methoden zu entwickeln, um grobe Fehler aus den Ergebnissen einer Ausgleichung zu erkennen. Man versuchte, die Fehler um jeden Preis schon vor aufwendigen Berechnungen zu entdecken und zu eliminieren. Nach der Ausgleichung zeigte man sich gegenüber den eventuell übriggebliebenen Modellfehlern eher toleranter: der Aufwand für die Korrekturen war unangenehmer als die Fehler selbst.
Zwei Ereignisse haben in den letzten 15 Jahren den praktischen Einsatz der Ausgleichungsrechnung wesentlich verändert:
- die Entwicklung kostengünstiger elektronischer Distanzmessgeräte mit grosser Reichweite und
- die elektronische Datenverarbeitung.

Die elektronische Distanzmessung hat seit ihrer Einführung die Struktur der geodätischen Netze bestimmt. Die übersichtliche Dreiecksvermaschung war plötzlich nicht mehr notwendig. Der Netzentwurf und die Rekognoszierung wurden einfacher und die geodätische Arbeit wirtschaftlicher. Komplexer und immer schwieriger jedoch wurde es, die Qualität der Messanordnung zu beurteilen.
In der selben Zeit fand der Durchbruch der elektronischen Datenverarbeitung in der geodätischen Praxis statt. Der Traum der Geodäten, Systeme mit ‹beliebig vielen› Unbekannten auszugleichen, verwirklichte sich. Was im Feld die elektronische Distanzmessung ermöglicht hatte, konnte in entsprechend flexibler Art auch ausgeglichen werden. Die Netze wurden grösser, komplexer und die Exzentren zahlreicher, so dass auch die Interpretation der Resultate wesentlich höhere Ansprüche stellte.

2.2 Aktuelle Beurteilungsverfahren für die Triangulationsresultate

Im Zeitalter der Computer ist das Rechnen leicht geworden, sehr leicht sogar. Mit kleineren oder grösseren Rechenanlagen können in wenigen Sekunden grosse Datenmengen preiswert verarbeitet und die Resultate ausgedruckt werden.
In der Praxis ist die Gefahr gross, dass die mühelos vom Computer erhaltenen Resultate in ihrer Wichtigkeit unterschätzt und daher etwas flüchtig überprüft werden. Gerade die kritische Interpretation der Ergebnisse ist jedoch eine der wichtigsten Aufgaben des Ingenieurs.
Um gegen diese unerwünschte Erscheinung vorzugehen, wurden in der letzten Zeit verschiedene Verfahren entwickelt und zum Teil in der Praxis eingesetzt, welche die Interpretation der Triangulationsergebnisse in systematischer Art ermöglichen sollen. Man kann sie in zwei Gruppen unterteilen:
a) Analyse der Modelleigenschaften und der Messanordnung (a priori)
b) Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (a posteriori).

In der Analyse der Modelleigenschaften werden die Folgen der Modellannahmen unter der Voraussetzung, dass das Modell zutrifft, untersucht. Die Analyse ist unabhängig von den durchgeführten Beobachtungen und kann deshalb vorsorglich auch vor den Feldarbeiten stattfinden. Dazu gehören die Berechnung der Fehlerellipsen a priori für die Neupunkte, die Zuverlässigkeitsbetrachtungen usw. Zweck der Analyse ist der Nachweis, dass die Resultate unter den getroffenen Annahmen die übergeordneten Randbedingungen (Bedürfnisse des Auftraggebers) befriedigen werden.
Nach Ausführung der Messarbeit, jedoch vor Ablieferung der Resultate muss man sich vergewissern, ob keine Gründe für eine Verwerfung des angenommenen Modells vorliegen, da nur wenn die Modelleigenschaften zutreffen der Nachweis vorliegt, dass die Resultate den übergeordneten Randbedingungen genügen. Zu diesem Zweck werden statistische Tests eingesetzt, die mit den ausgeführten Beobachtungen oder mit Funktionen davon durchgeführt werden können: z. B. Test des Verhältnisses Mittlerer Fehler a posteriori–Mittlerer Fehler a priori, Berechnung der Dreiecksschlüsse in Triangulationsnetzen usw. Ziel der Modelltests ist die Annahme oder Verwerfung des mathematischen Modells: im Fall der Annahme können die Resultate veröffentlicht werden, andernfalls müssen das Modell modifiziert (z. B. durch Nachmessungen) und die neuen Eigenschaften analysiert werden, um zu prüfen, ob die übergeordneten Randbedingungen auch nach den Änderungen des Modells noch eingehalten sind.
Beide Gruppen von Verfahren werden im folgenden beschrieben. Um die Herleitungen zu erleichtern, werden zuerst die Verfahren a posteriori behandelt und erst später die Verfahren a priori.

Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (Verfahren a posteriori)

3. Einfache Verfahren aus der Praxis

3.1 Der F-Test

Die Triangulationsprogramme liefern die geschätzte Standardabweichung a posteriori der Gewichtseinheit, so dass die Berechnung der Prüfgrösse

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

keine Schwierigkeit bietet (wo $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung der Gewichtseinheit a posteriori und σ die gewählte Standardabweichung der Gewichtseinheit a priori sind).
Die Verteilung der Teststatistik F ist die bekannte Fisher- oder F-Verteilung. Der Freiheitsgrad wird durch die Geometrie des Netzes bestimmt, während man für den mittleren Fehler a priori einen Freiheitsgrad (meistens ∞) annimmt. Dann kann der Tabelle der F-Verteilung sofort entnommen werden, ob die vorausgesetzte Wahrscheinlichkeitsschranke überschritten ist oder nicht. Da nur eine Grösse getestet wird (univariater Test), stellen sich keine Korrelationsprobleme.
Der F-Test ist sehr wirksam bei der Suche nach systematischen Modellfehlern, die viele Beobachtungen verfälschen (z. B. ungenaue Fixpunkte, Lotabweichungseinflüsse, falsche Schätzung der Genauigkeit für die Messungen usw.). Weniger wirksam ist er für die Entdeckung von einzelnen groben Fehlern, wenn der Betrag des Fehlers relativ klein und das Netz gross ist, da die Testempfindlichkeit mit zunehmendem Freiheitsgrad ständig abnimmt.

3.2 V-Test

Die heute noch am meisten angewandte Methode zur Beurteilung der Resultate einer Ausgleichung ist der Test der Verbesserungen in den definitiven Abrissen. Getestet werden die Grössen

$$u_i = v_i/\sigma_{li} \qquad i = 1, \ldots, n$$

wobei
v_i die i-te Verbesserung,
σ_{li} die angenommene Standardabweichung a priori der i-ten Messung,
n die Anzahl Messungen der Ausgleichung sind.
Der Test wird durchgeführt unter der vereinfachenden Annahme, dass die u_i annähernd standardisiert normalverteilt (mit Erwartungswert 0 und Varianz 1) und die Korrelationen zwischen den u_i vernachlässigbar klein sind.
Da alle Computerprogramme für die Ausgleichung die einzelnen Verbesserungen liefern, ist der Test leicht durchführbar und deshalb trotz vielen schlechten Eigenschaften so populär.
Die Nachteile des V-Tests sind offensichtlich: die erwähnten vereinfachenden Annahmen sind eine recht schlechte Näherung, da die Standardabweichung von v_i (σ_{vi}) meist wesentlich kleiner als σ_{li} ist.
Zwischen den v_i sind zudem Korrelationen vorhanden, die normalerweise nicht berechnet werden. Es ist daher nicht möglich, einen Gesamttest aller Komponenten des U-Vektors durchzuführen, da die Annahmebereiche nicht direkt bestimmbar sind.

3.3 Test der geometrischen Bedingungen

Eine klassische Methode zur Überprüfung geodätischer Netze ist der Test der Widersprüche der geometrischen Bedingungen. Für reine Triangulationsnetze ist das Beispiel des Tests der Winkelsumme in den Dreiecken bekannt und braucht also keine besondere Erklärung.
Der grosse Vorteil solcher Tests liegt in der Möglichkeit, die Testgrösse vor der Ausgleichung zu berechnen. Als man noch von Hand rechnete, konnte man Unstimmigkeiten sofort entdecken und sich eine unnötige Ausgleichung ersparen.
Nach der Einführung der Distanzmessung wurde die Struktur der Netze viel komplizierter, so dass sich die Bildung der geometrischen Bedingungsgleichungen nicht mehr so einfach gestaltete. Für den Einsatz elektronischer Rechenanlagen wurde für die Ausgleichung die vermittelnde Methode vorgezogen, und die Bedingungen traten nicht mehr explizit auf.
Zur Lösung des Problems wurden in der Schweiz Computerprogramme für die automatische Berechnung der Dreiecksschlüsse entwickelt [Andris 1967]. Auch die Bildung der anderen Bedingungsgleichungen stellt keine unüberwindbare Schwierigkeit dar. In einer Publikation zeigt R. Conzett, wie mit dem Austauschverfahren aus der Matrix der Verbesserungsgleichungen einer vermittelnden Ausgleichung die Bedingungsgleichungen automatisch gebildet werden können. Entwicklungen in dieser Richtung sind deshalb noch zu erwarten [Conzett 1978].
Vom statistischen Standpunkt aus gesehen, ist der Test der geometrischen Bedingungen sehr günstig, da die Erwartungswerte der Widersprüche Null sind und die Varianzen ihrer Normalverteilungen leicht aus den linearisierten Bedingungsgleichungen berechnet werden können. Was hingegen nachteilig wirkt, sind die Korrelationen zwischen den einzelnen Widersprüchen, die im allgemeinen vorhanden sind und einen Gesamttest erschweren.
Mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse kann ein spezielles System von Bedingungsgleichungen gebildet werden. Der Verfasser hat diese Möglichkeit eingehend untersucht. Die dabei erzielten Resultate sind in Kapitel 4 beschrieben.

3.4 Der Test der standardisierten Verbesserungen

Einen wesentlichen Fortschritt in der Untersuchung a posteriori geodätischer Messsysteme bildet der Test der standardisierten Verbesserungen. Dazu müssen in einer vermittelnden Ausgleichung neben den üblichen Grössen (Unbekannten, Verbesserungen usw.) lediglich die Standardabweichungen der einzelnen Verbesserungen berechnet werden.

Da die Verbesserungsvariablen für normalverteilte Messungen ebenfalls normalverteilt sind und Erwartungswert Null besitzen [E(V) = 0], wenn die Varianz von v_i bekannt ist, kann die Grösse

$$w_i = v_i/\sigma_{vi}$$

mit der zentrischen standardisierten Normalverteilung getestet werden. Der Test wurde in [Baarda 1968] als ‹Data snooping› bezeichnet und wird unter diesem Namen oft eingesetzt. Eine Anwendung für die Untersuchung von geometrischen Transformationen ist in [Kraus 1975] beschrieben.
Wenn die i-te Beobachtung (und keine andere) durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht und

$$l_i^* = l_i + \Delta_i$$

wird, dann ist für unkorrelierte Beobachtungen

$$v^* = v_i - (q_{vv}^{(ii)}/q_{ll}^{(ii)}) \cdot \Delta_i \qquad \text{[Just 1979].}$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher irrtümlicherweise die Nullhypothese angenommen wird, ist Funktion des Betrags von Δ_i, des Verhältnisses $q_{vv}^{(ii)}/q_{ll}^{(ii)}$ und des gewählten Signifikanzniveaus α für die Verwerfung der Nullhypothese.
Da die einzelnen w_i unter sich korreliert sind, ist es nicht möglich, einen Test aller Komponenten von W durchzuführen.

4. Verfahren aus der multivariaten Statistik

4.1 Allgemeines

In der Beschreibung der mehrfachen univariaten Tests in den früheren Kapiteln ist dem Leser sicher aufgefallen, dass die gegenseitige Abhängigkeit der betrachteten Zufallsvariablen nicht berücksichtigt werden konnte. Die getrennte Beurteilung der einzelnen Testgrössen führt zu einem Informationsverlust, der nicht unterschätzt werden darf. Besonders bei kritischen Fällen könnten gerade die verlorenen Informationen wichtig sein.
Die multivariate Statistik behandelt alle Verfahren, die sich mit mehrdimensionalen stochastischen Variablen befassen. Sie bietet u. a. auch Lösungen für den Test einer Reihe von unter sich korrelierten stochastischen Variablen [Flury, Riedwyl 1980], [Maurer 1979]. Anwendungen solcher Verfahren für die Beurteilung der Triangulationsresultate werden im folgenden beschrieben.

4.2 Graphische Verfahren

In der angewandten Statistik wird, wenn immer möglich, versucht, das vorhandene Zahlenmaterial durch Zeichnungen zu veranschaulichen. So kann die Fähigkeit des Menschen genutzt werden, aufgrund einfacher Beobachtung intuitiv komplexe Beziehungen zu erfassen. Für geodätische Anwendungen kann als Beispiel das Verfahren von H. J. Oettli erwähnt werden, das besonders geeignet ist für die multivariate Beurteilung des Verbesserungsvektors [H. J. Oettli 1960–75] (Abb. 1).

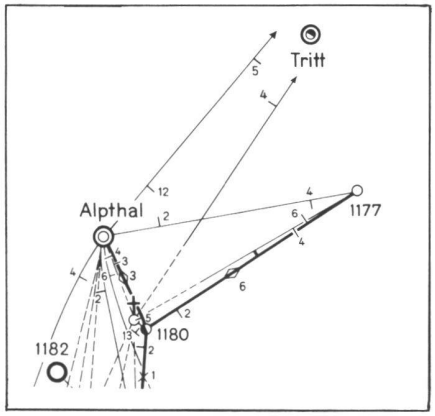

Abb. 1 Graphische Darstellung der Verbesserungen

Im Netzplan werden die durchgeführten Beobachtungen sowie die dazugehörigen Verbesserungen graphisch dargestellt. Ein erfahrener Beobachter kann aus den Netzverbindungen intuitiv die vorhandenen Korrelationen zwischen den Verbesserungen abschätzen und sie in Beziehung zu den Verbesserungsbeträgen setzen.
So werden Hinweise auf die Ursachen von Abweichungen aus der Differenz zwischen erwarteten Korrelationen (aus der Netzgeometrie) und vorhandenen Korrelationen (in der Stichprobe) gewonnen.
Diese einfachen, seit langem bekannten Hilfsmittel werden hier besonders erwähnt, um hervorzuheben, dass die Berücksichtigung der Korrelationen unter den Verbesserungen durch einen multivariaten Test ein echtes Bedürfnis der Praxis ist.

4.3 Die Hauptachsentransformation

Man betrachte als erstes den Verbesserungsvektor als mehrdimensional normalverteilte stochastische Variable V mit

$$V^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$E(V) = 0$$

und mit Varianz-Kovarianzmatrix Q_{vv} (positiv definit oder semidefinit, aber nicht notwendigerweise diagonal) und dann den Vektor W mit

$$W^T = (w_1, w_2, \ldots, w_n),$$

berechnet aus V durch die homogene lineare Transformation

$$W = U^T V,$$

wo U eine orthogonale Matrix ist.

Die Varianz-Kovarianzmatrix von W ist dann

$$Q_{ww} = U^T Q_{vv} U$$

und $E(W) = 0$.

Dem Hauptachsentheorem [Schwarz, Rutishauser, Stiefel 1972] ist zu entnehmen:
Zu jeder symmetrischen Matrix M existiert eine orthogonale Matrix U, so dass M vermittels U ähnlich auf Diagonalgestalt $D = U^T M U$ transformiert wird.
Dazu gilt:
- die Diagonalelemente von D sind gleich den Eigenwerten von M ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$)
- die Zeilen von U^T enthalten die normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten, welche entsprechend geordnet sind wie die Eigenwerte der Diagonalen von D
- wenn die Matrix M Rang r besitzt, dann gibt es r Eigenwerte $\neq 0$.

Das Theorem kann jetzt bei der oben definierten Matrix Q_{vv} angewandt werden:
Es existiert immer eine orthogonale Matrix U, so dass

$$Q_{ww} = U^T Q_{vv} U$$

eine Diagonalmatrix wird. Die Diagonalelemente von Q_{ww} sind die Eigenwerte von Q_{vv} und gleichzeitig die Varianzen der einzelnen Komponenten von W, welche unter sich unkorreliert sind. Wenn f der Freiheitsgrad und n die Anzahl Beobachtungen des geodätischen Netzes sind, besitzt die Q_{vv}-Matrix Rang f, und es gibt n–f Eigenwerte von Q_{vv}, die Null sind, d. h. n–f Komponenten des Vektors W(V) haben Varianz = 0. Die entsprechenden Eigenvektoren stellen daher funktionale Beziehungen des Modells dar. Die anderen f Komponenten von W sind hingegen echte stochastische Variablen mit Varianz gleich dem entsprechenden Eigenwert (λ_i), und die Komponenten der Eigenvektoren sind die Koeffizienten von f orthogonalen und daher linear unabhängigen Bedingungsgleichungen des geodätischen Netzes.
Die Erwartungswerte der Komponenten des Vektors W sind alle Null, da

$$E(W) = E(U^T V) = U^T E(V) \text{ und}$$

$$E(V) = 0 \text{ sind.}$$

Eine weitere Eigenschaft der Komponenten des Vektors W ist ihre Normalverteilung, da die Verbesserungen lineare Funktionen der normalverteilten Beobachtungen und die Komponenten von W lineare Funktionen der Verbesserungen sind. Die stochastischen Eigenschaften des Vektors W sind also bestimmt, so dass die Komponenten von W als Teststatistiken in einem Modelltest verwendet werden können.

4.4 Der Hauptkomponententest

Nach Ausführung der Hauptachsentransformation z. B. mit dem Jacobi-Verfahren [Schwarz, Rutishauser, Stiefel 1972] sind die linearen Funktionen (kanonische Vektoren) bekannt, welche in der Matrix U aufgezeigt werden, so dass es möglich wird, die f Komponenten (Hauptkomponenten) des Vektors W, für welche $\lambda_i \neq 0$ ist, zu berechnen und zu analysieren (Hauptkomponentenanalyse). Insbesondere können die Komponenten mit der Normalverteilung auf signifikante Abweichungen von Null geprüft werden (Hauptkomponententest).

Praktisch wird der Vektor S mit den folgenden Komponenten gebildet:

$$s_i = w_i / \sqrt{\lambda_i}$$

mit $i = 1, 2, \ldots, n$ wenn $\lambda_i \neq 0$,

die eine zentrische und standardisierte Normalverteilung besitzen und stochastisch unabhängig sind. Ihr Wert wird mit der vorgewählten Wahrscheinlichkeitsschranke der Normalverteilung verglichen. Je nach Ergebnis kann die Nullhypothese für einen Modellfehler angenommen oder verworfen werden.

4.5 Anwendungen in der Geodäsie

Die Hauptkomponentenanalyse als bewährte Methode der analytischen Statistik ist sicher den meisten Geodäten bekannt. Die mathematischen Grundlagen dazu findet man praktisch in jedem Lehrbuch der linearen Algebra, und sie bieten sicher keine Schwierigkeiten.

Trotzdem wird die Hauptkomponentenanalyse zur Lösung praktischer Aufgaben in der Geodäsie wenig eingesetzt. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist das Verfahren von H. Pelzer zur Untersuchung der Ergebnisse von Deformationsmessungen. Die Differenzen zwischen den u Koordinaten, die in zwei verschiedenen Zeiträumen bestimmt wurden, bilden einen n-dimensionalen Vektor, der für die Nullhypothese den Erwartungswert Null besitzt. Seine Varianz-Kovarianzmatrix ist in der Regel vollbesetzt, so dass die Hauptkomponentenanalyse sich ausgezeichnet für die Durchführung eines Tests zur Überprüfung der Nullhypothese für die Deformation eignet [Pelzer 1976], [Dupraz, Niemeier 1979].

4.6 Die Nichteindeutigkeit der Lösung

Jede symmetrische Matrix M der Ordnung n besitzt n reelle Eigenwerte. Sie sind als Nullstellen des charakteristischen Polynoms (vom echten Grad n) der Matrix M eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit gilt nicht für die Eigenvektoren der Matrix M, welche ebenfalls für den Hauptkomponententest interessieren. Die Nichteindeutigkeit der Eigenvektoren ist aber kein Hindernis bei der Durchführung des Tests. Da das vorgeschlagene Jacobi-Verfahren immer eine Lösung liefert, in welcher die Eigenvektoren ein orthonormiertes System bilden, sind alle Voraussetzungen für die Anwendung gegeben, und ein Testvektor S mit standardisierten und statistisch unabhängigen Komponenten kann somit immer hergeleitet werden.

Für weitere Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen, z. B. [Schwarz, Rutishauser, Stiefel, 1972].

4.7 Rechenbeispiele

Einfaches Dreieck (Abb. 2)

Winkel	Messwert (Gon)	Verb. (cc)
1	61.6305	-3.3
2	90.3665	-3.3
3	48.0040	-3.3

mittlere Fehler a priori der Beobachtungen = 5cc

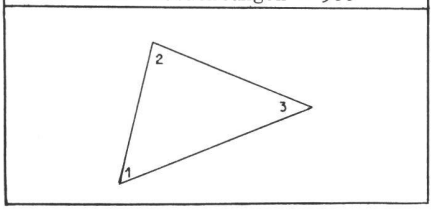

Abb. 2 Ein einfaches Dreiecksnetz

Für die Ausgleichung wird $\sigma = 1$ in allen Beispielen gesetzt, so dass die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen Q_{vv} auch die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen ist.

Die Matrix Q_{vv} ist:

8.3333	8.3333	8.3333
8.3333	8.3333	8.3333
8.3333	8.3333	8.3333

Mit dem Jacobi-Verfahren können Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet werden.

Die transponierte Matrix U^T der Eigenvektoren lautet:

0.7071	-0.7071	0.0000
0.5774	0.5774	0.5774
-0.4082	-0.4082	0.8165

und die dazugehörigen Eigenwerte sind (0. , 25.0 , 0.). Da der erste und der letzte Eigenwert gleich Null sind, stellen die entsprechenden Eigenvektoren funktionale Beziehungen zwischen den Verbesserungen im Modell dar und ergeben daher keine Zufallsvariablen. Der zweite Eigenvektor führt hingegen zur zentrischen normalverteilten Zufallsvariablen $w_2 = U_2 \; V = -5.77$, welche die Standardabweichung $\sigma_w = \sqrt{\lambda_2} = 5$ besitzt. Daraus kann der einzige S-Wert berechnet werden:

$$s_2 = -1.15$$

Ein eindimensionaler Test der normalverteilten und standardisierten Grösse s_2 mit $\alpha = 5\%$ führt zur Annahme des mathematischen Modells.

Dem Leser ist sicher nicht entgangen, dass die Testfunktion nichts anderes ist als die Winkelbedingungsgleichung des Dreiecks.

Das kombinierte Netz

Während die erste Berechnung gezeigt hat, dass einfache Resultate auch durch komplizierte Methoden erreicht werden können, beschreibt das folgende Beispiel (Abb. 3) eine Anwendung, die mit einfacheren Mitteln nicht ohne weiteres möglich wäre.

ST	ZIEL	BEOB G	MFR CC	D RED M	MFD MM
B	A	256.3460	5	1421.260	10
	P	200.0015	5	1000.035	10
	C	150.0010	5	1272.790	10
P	B	0.0000	5		
	C	92.9560	5		
	A	305.7720	5		
A	B	56.3450	5		
	P	105.7710	5		
C	P	292.9550	5		
	B	350.0005	5		

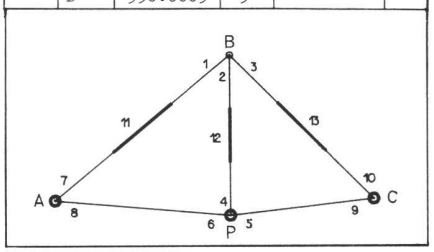

Abb. 3 Ein kombiniertes Netz

Aufgrund der Beobachtungen können die Ausgleichung und die folgenden signifikanten S-Werte berechnet werden.

	$U^T V$	S-Werte
1)	- 4.36430	- 0.87286
2)	- 1.69706	- 0.33941
3)	- 2.05144	- 0.41029
4)	- 7.66923	- 1.53385
5)	2.39527	0.28337
6)	- 28.69758	- 2.86976
7)	- 9.08785	- 1.19956

Der eindimensionale Test der Grösse $s_6 = -2.87$, welche standardisiert und zentrisch normalverteilt sein sollte, führt für $\alpha = 5\%$ zur Verwerfung des mathematischen Modells, da der Annahmebereich zwischen -1.96 und 1.96 liegt.

Das Verwerfen des Modells ist in diesem Spezialfall bestimmt berechtigt, da die zwölfte Beobachtung (Distanz B–P) absichtlich vor der Berechnung um 25 mm verfälscht wurde.

Nach der Verwerfung des Modells wird man versuchen, den groben Fehler

möglichst genau zu lokalisieren. Zwei denkbare Verfahren diesbezüglich sind in den folgenden Kapiteln beschrieben.

5. Der NMAX-Test

5.1 Die Teststatistik

In den bisherigen Beispielen wurden die einzelnen Komponenten s_i des Testvektors, die aus der Hauptachsentransformation stammten, nur in eindimensionalen Tests verwendet, was auch mit beliebigen geometrischen Bedingungsgleichungen möglich wäre.
Man hat bis anhin die statistische Unabhängigkeit der Testvariablen s_i noch nicht ausgenützt. Gerade diese Eigenschaft erlaubt aber das Durchführen eines globalen Tests.
Es ist in der Tat leicht, eine Wahrscheinlichkeit w für das Ereignis zu berechnen, dass die Absolutbeträge aller Komponenten s_i einer Realisierung des Testvektors S kleiner als eine festgelegte Schranke k sind. Das heisst

$$w = P\,(\text{alle}\ |s_i| \leqq k) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Da die Komponenten s_i stochastisch unabhängig sind, ist dann

$$w = P\,(|s_1| \leqq k) \cdot P\,(|s_2| \leqq k) \ldots P\,(|s_n| \leqq k).$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind der eindimensionalen Normalverteilungsfunktion zu entnehmen. Die inverse Berechnung ist ebenfalls leicht durchführbar: ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit gegeben, kann die Schranke $k(\alpha)$ berechnet werden, für welche

$$P\,(\text{alle}\ |s_i| \leqq k\,(\alpha)\ ) = 1 - \alpha \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ist. Aufgrund des so berechneten Signifikanzintervalls kann ein mehrdimensionaler Test unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller Komponenten der Testvariablen durchgeführt werden.
Wenn man unter den Komponenten des Testvektors S die betragsgrösste Komponente s_{max} betrachtet, ist sofort ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit

$$w = P\,(\text{alle}\ |s_i| \leqq k) = P\,(|s_{max}| \leqq k)$$

ist. Daher kann man die vorherigen Ausführungen vereinfachen, indem man die neue Testvariable s_{max} verwendet mit dem Vorteil, dass der mehrdimensionale Test auf einen eindimensionalen zurückgeführt wird. Zur Beurteilung der statistischen Eigenschaften der Zufallsvariablen s_{max} steht die Theorie der Ordnungsstatistiken zur Verfügung. Man konsultiere dazu etwa das ausführliche Werk [David 1980] oder als Einführung [Bachmann 1973].

5.2 Die NMAX-Verteilung

Die Testvariable s_{max} stammt also aus einer Reihe stochastisch unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen (die Komponenten des S-Vektors) mit bekanntem Erwartungswert (Null) und bekannter Varianz (1); sie ist als die betragsgrösste unter den Komponenten definiert. Ihre Verteilungsfunktion (Abb. 4) wird NMAX-Verteilung genannt und ist in [Carosio 1983] berechnet und tabelliert. In der gleichen Veröffentlichung ist ein möglicher Rechenablauf mit dem entsprechenden FORTRAN-Programm für die numerische Lösung beschrieben.

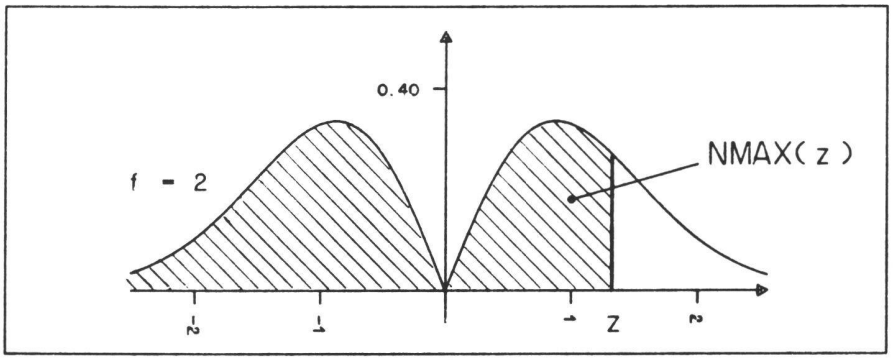

Abb. 4 Die Wahrscheinlichkeitsdichte der NMAX-Verteilung für f = 2

5.3 Rechenbeispiele

Die folgenden Berechnungen zeigen, wie der NMAX-Test durchgeführt werden kann. Besonders wichtig ist dabei der Vergleich mit dem bekannten F-Test, wobei die verschiedenen Empfindlichkeitseigenschaften ersichtlich werden.
Das mehrfache Dreiecksnetz
Ein Netz mit drei Dreiecken (Abb. 5) kann untersucht werden. Die Berechnung ergibt:

$$s_{max}\ (= s_1) = -\,1.15.$$

Winkel	Messwert (Gon)	Verb. (cc)
1	61.6305	-3.3
2	90.3665	-3.3
3	48.0040	-3.3
4	70.5015	1.7
5	80.3065	1.7
6	49.1915	1.7
7	65.2015	-1.7
8	55.2050	-1.7
9	79.5940	-1.7

mittlere Fehler a priori der Beobachtungen = 5cc

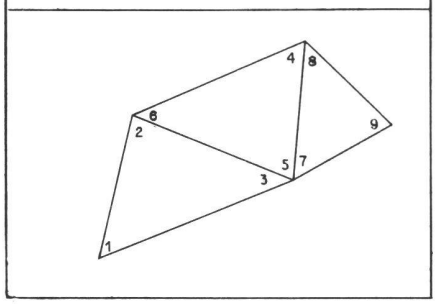

Abb. 5 Ein mehrfaches Dreiecksnetz

Da die Verteilung der dazugehörigen Testvariablen s_{max} bekannt ist, kann die erhaltene Realisierung als Prüfgrösse eingesetzt werden. Der Test mit der NMAX-Verteilung für die Wahrscheinlichkeitsschranke $\alpha = 5\%$ führt zur Annahme des Modells im globalen Test. Der Annahmebereich ist (– 2.4, + 2.4).
Der F-Test führt mit F = 0.67 ebenfalls zur Annahme des Modells, da aus der F-Verteilung die Annahmeschranke für $F_{3,\infty}$ für $\alpha = 5\%$ bei $F_{GR} = 2.6$ liegt.
Falls im Netz eine Beobachtung des ersten Dreiecks um 25cc verfälscht wird, erhält man $v_1 = v_2 = v_3 = 11.66$ und $\hat{\sigma} = 2.38$, da $\sigma = 1$ ist, sind

$$F = \hat{\sigma}^2 / \sigma^2 = 5.66 \text{ und}$$
$$s_{max} = 4.04.$$

Beide Testgrössen führen richtigerweise zur Verwerfung des Modells.
Wenn das Netz noch einmal erweitert wird, bis es 30 unabhängige Dreiecke umfasst (einfachheitshalber werden hier die gleichen Beobachtungen zehnmal wiederholt), ergibt diese Variante ohne grobe Fehler:

$$F = 0.82$$
$$s_{max} = -\,1.15.$$

Falls eine Beobachtung im ersten Dreieck um 25cc verfälscht wird, ist

$$F^* = 0.86.$$

Das Modell wird hier mit einem F-Test trotzdem angenommen. Hingegen führt der Test der standardisierten Bedingungen zu

$$s_{max} = 4.04.$$

Das Modell wird eindeutig verworfen (Annahmebereich zwischen – 3.15 und + 3.15).

Das kombinierte Netz
Das kombinierte Netz in 4.7 kann ebenfalls untersucht werden. In diesem Beispiel ist

$$s_{max} = -\,2.87.$$

Das Modell wird mit dem NMAX-Test (Irrtumswahrscheinlichkeit = 5%) ver-

worfen, da der Annahmebereich (– 2.68, + 2.68) ist. Der F-Test hingegen hätte mit

$F = 1.87$

zur Annahme des Modells geführt, da die Verwerfungsschranke für die gleiche Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ bei 2.01 liegt. In diesem Spezialfall ist eine Verwerfung erwünscht, da eine Messung absichtlich verfälscht wurde.

5.4 Wichtige Eigenschaften des Tests

Die Beispiele zeigen deutlich, dass mit zunehmender Netzgrösse die Empfindlichkeit des NMAX-Tests gegenüber derjenigen des F-Tests immer grösser wird. Der Grund dafür liegt in der Eigenart der Hauptkomponentenanalyse, die die lokalen geometrischen Eigenschaften besser berücksichtigen kann. Die einzelnen Komponenten des Testvektors sind in der Regel nur von wenigen Beobachtungen abhängig. Das bedeutet, dass sie sich auf bestimmte Netzteile beziehen und daher empfindlich reagieren, wenn im eigenen Bereich ein grober Fehler vorkommt.

5.5 Geometrische Bedeutung des NMAX-Tests

Für den Test wird der f-dimensionale Vektor S gebildet mit stochastisch unabhängigen Komponenten, die normalverteilt sind und alle Erwartungswert = 0 und Varianz = 1 aufweisen. Nach der Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit wird die Signifikanzgrenze s_{GR} des Tests der Tabelle der NMAX-Verteilung entnommen.
Wenn

$s_i \leqq s_{GR}$ für $i = 1, 2, \ldots, f$

ist, wird das mathematische Modell angenommen. Wenn hingegen eine einzige Komponente

$s_j > s_{GR}$

ist, dann wird das Modell verworfen.
Für den Fall eines Systems mit Freiheitsgrad 2 (f = 2) ist der Testvektor S zweidimensional und kann daher in einer Ebene dargestellt werden.
Der Annahmebereich ist dann ein Quadrat mit Seitenlängen $2 \cdot s_{GR}$ (Abb. 6).

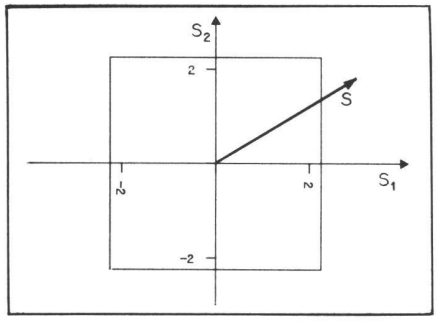

Abb. 6 Annahmebereich für den NMAX-Test

Eine ähnliche Überlegung kann ebenfalls für höhere Freiheitsgrade angestellt werden. Für f = 3 wird der Annahmebereich ein Würfel. Für noch grössere f spricht man von Hyperwürfeln im f-dimensionalen Raum.
Selbstverständlich kann mit dem Testvektor S ebenfalls ein Chi-Quadrat-Test (oder ein gleichwertiger F-Test) durchgeführt werden, indem die Grösse

$$x^2 = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_f^2$$

gebildet wird. Aus der Chi-Quadrat-Verteilung wird x_{GR}^2 für die Irrtumswahrscheinlichkeit berechnet, und wenn

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots s_f^2 \leqq x_{GR}^2$$

ist, wird das Modell angenommen.
Der Fall mit f = 2 kann in der Ebene graphisch dargestellt werden. Der Annahmebereich ist ein Kreis mit Radius x_{GR}. Im dreidimensionalen Fall ist der Bereich eine Kugel, während man für höhere Freiheitsgrade dann von Hyperkugeln spricht.
Man kann als Beispiel die Annahmebereiche des NMAX-Tests (Hyperwürfel) und des Chi-Quadrat-Tests (Hyperkugel) bei einem Freiheitsgrad f = 100 und für $\alpha = 5\%$ vergleichen. Aus den Tabellen der NMAX- bzw. der Chi-Quadrat-Verteilung erhält man darauf für f = 100 und $\alpha = 5\%$ die folgenden Werte:

$s_{GR} = 3.50$ (halbe Quadratseite)
$x_{GR} = 11.15$ (Kreisradius).

Daraus folgt, dass Modellfehler, die sich nur auf wenige Komponenten von S auswirken, besser mit dem NMAX-Test festgestellt werden können als mit dem Chi-Quadrat-Test.
Die groben Fehler haben in guten Netzen eine lokal begrenzte Wirkung und beeinflussen in der Regel nur einen kleinen Teil der Komponenten von S, so dass sich die Hauptkomponentenanalyse für ihre Aufdeckung besser eignet.

5.6 Die Lokalisierung der groben Fehler

Die bisherigen Ausführungen befassten sich ausschliesslich mit der Frage: ‹Ist ein grober Fehler vorhanden?› Absichtlich wurde die für die Praxis ebenso wichtige Fragestellung: ‹Welche Beobachtung ist falsch?› nicht gleichzeitig behandelt.
Diese Trennung der beiden Probleme hat sich in der Geodäsie allgemein durchgesetzt, da mit Hilfe der mathematischen Statistik nur eine Antwort auf die erste Frage gegeben werden kann. Die zur Verfügung stehenden statistischen Tests bieten nur zwei mögliche Antworten: Modell angenommen oder verworfen, grober Fehler vorhanden oder nicht (selbstverständlich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit).
Die Hauptkomponentenanalyse führt zu einem Test für das gesamte Modell, liefert aber ebenfalls Angaben zur Lokalisierung der tatsächlich falschen Beobachtungen. Wenn der Test zu einer Modellverwerfung geführt hat, kann man den linearen Testfunktionen (Eigenvektoren) einige Angaben zur Abgrenzung der Netzteile entnehmen, in welchen ein grober Fehler vermutet werden kann.
Die einzelnen Komponenten des f-dimensionalen Testvektors S sind lineare Funktionen der Verbesserungen, das heisst:

$$s_i = z_{i1} \cdot v_1 + z_{i2} \cdot v_2 + \ldots + z_{in} \cdot v_n,$$

wobei die z_{ij} die Komponenten des i-ten Eigenvektors nach Teilung durch $\sqrt{\lambda_i}$ (Wurzel des dazugehörigen Eigenwerts) sind.
In Matrizenform kann das Gleichungssystem folgendermassen geschrieben werden:

$$S = Z^T V.$$

Die Verbesserungen der Ausgleichung sind ihrerseits lineare Funktionen der Beobachtungen, nämlich

$$V = -Q_{VV} P L.$$

(Q_{VV} ist die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen, P die Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen und L der Beobachtungsvektor), so dass auch S eine lineare Funktion der Beobachtungen ist:

$$S = G^T L, \text{ wenn } G^T = -Z^T Q_{VV} P \text{ ist.}$$

Falls der NMAX-Test zur Verwerfung des mathematischen Modells geführt hat, kann die i-te Zeile von G^T betrachtet werden, die die betragsgrösste Komponente s_i des Testvektors gebildet hat:

$$s_{max} = s_i = g_{i1} l_1 + g_{i2} l_2 + \ldots + g_{in} l_n$$

Da ausschliesslich die Beobachtungen, für welche der Koeffizient $g_{ij} \neq 0$ ist, einen Beitrag zur Bildung von s_i geliefert haben, ist der grobe Fehler vor allem unter diesen Beobachtungen zu suchen. Der Betrag des Koeffizienten g_{ij} ist auch von Bedeutung, da er den Einfluss der einzelnen Beobachtungen und daher des groben Fehlers auf die entsprechende Komponente von S bestimmt. Es ist deshalb zu vermuten, dass sich ein allfälliger grober Fehler der j-ten Beobachtung in der Komponente s_i des Testvektors auswirkt, für welchen g_{ij} einen grossen Absolutbetrag aufweist.
Als Beispiel dafür kann das kombinierte Netz dienen. Das mathematische Modell wird mit dem NMAX-Test verworfen, da die 6. Komponente von S im Betrag grösser ist als die Verwerfungsschranke.

$s_6 = -2.86$
$s_{GR} = 2.68$

In der Matrix G^T, die die lineare Beziehung zwischen den Beobachtungen L und dem Testvektor S darstellt, kann man in der sechsten Zeile die Koeffizienten der linearen Funktion erkennen, die zur stark abweichenden Komponente s_6 und daher zur Verwerfung des Modells geführt haben.

$$s_6 = -0.049\, l_{11} + 0.069\, l_{12} - 0.054\, l_{13}$$

s_6 ist nur Funktion der drei gemessenen Distanzen (Beobachtungen 11, 12, 13) und dabei weist die zweite Distanz (l_{12}) den betragsgrössten Koeffizienten auf und sollte daher als erste untersucht werden. Die beiden anderen Distanzen haben Koeffizienten, die nicht wesentlich kleiner sind, so dass sie ebenfalls als mögliche Fehlerursache in Frage kommen.

Im erwähnten Beispiel erweist sich gerade diese Überlegung als richtig, da die zweite Distanz absichtlich um 25 mm verfälscht wurde.

Ein weiteres Verfahren, die Methode der extremen S-Komponente, kann mit Hilfe von einer Folge von Orthogonalrotationen der Matrix G^T aufgebaut werden und erlaubt möglicherweise eine noch bessere Lokalisierung der groben Fehler. Es wird hier auf die Literatur hingewiesen [Carosio 1983].

Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme (Verfahren a priori)

6. Allgemeines

Im vorherigen Kapitel wurden die Verfahren behandelt, die nach Ausführung der Messungen eine Interpretation der Ergebnisse erlauben. Die Planung der Messanordnung und die vorgängige Beurteilung der zu erwartenden Eigenschaften der Resultate sind ebenfalls sehr wichtig und bilden das Thema der folgenden Abschnitte.

Die erste Phase der geodätischen Arbeit in der Praxis befasst sich mit der Festlegung der Anforderungen an das Vermessungswerk. Diese Anforderungen bilden die übergeordneten Randbedingungen, die in jedem Fall erfüllt werden müssen. Diese Phase bildet die Voraussetzung für die Planung der Messanordnung, für die Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeiten der statistischen Tests sowie für die Wahl der Messinstrumente und der Berechnungsmethoden.

In einer zweiten Phase wird versucht, eine geodätische Messanordnung zu entwerfen und die geeigneten Berechnungsmethoden zu wählen, welche die festgesetzten Randbedingungen erfüllen und mit dem kleinstmöglichen Aufwand und den verfügbaren Mitteln realisiert werden können. In der Praxis geht man heute noch nach dem klassischen Verfahren vor:

- Nach allgemeinen Grundregeln und vor allem aufgrund von Intuition und Erfahrung des Vermessungsingenieurs werden verschiedene geodätische Netze entworfen
- Die Varianten werden verglichen, der Aufwand wird geschätzt und die Einhaltung der übergeordneten Randbedingungen kontrolliert.

Das Vorgehen kann iterativ wiederholt werden, bis man eine befriedigende Lösung für die gestellte Aufgabe gefunden hat. Erst dann kann mit den Messungen begonnen werden.

Die erste Eigenschaft der entworfenen Messanordnungen, die überprüft werden muss, ist die Realisierbarkeit, d. h. die vorgesehenen Beobachtungen sollen im Feld gemessen werden können; ebenfalls müssen die Genauigkeitsanforderungen eingehalten werden. Dies kann mit der Berechnung der Fehlerellipsen a priori und eventuell der relativen Fehlerellipsen überprüft werden.

In der letzten Zeit wird dem Einfluss von möglichen Modellfehlern, z. B. von groben Fehlern, auf die Resultate immer mehr Beachtung geschenkt. Gerade diesem Problem sind die folgenden Kapitel gewidmet. Die Zusammenhänge zwischen statistischen Tests und Zuverlässigkeit werden eingehend untersucht und dargestellt.

Unter den unzähligen denkbaren Modellfehlern gilt der Einfluss von groben Messfehlern bei der Realisierung der Beobachtungen als Grundlage aller folgenden Betrachtungen. Die meisten Verfahren eignen sich jedoch ebenfalls zur Untersuchung der Wirkung und der Entdeckung anderer Modellfehler. Die entsprechenden Herleitungen müssten unter Berücksichtigung der entsprechenden Fehlerhypothese (Alternativhypothese) wiederholt werden.

7. Der Begriff ‹Zuverlässigkeit›

7.1 Grundgedanken

Es ist allgemein bekannt, dass in einem geodätischen Netz Massnahmen getroffen werden müssen, um zu vermeiden, dass grobe Messfehler unbemerkt bleiben und die gesuchten Resultate verfälschen. Daher wird in der klassischen Vermessung nach dem Motto: ‹Eine Messung ist keine Messung› vorgeschrieben, immer ein redundantes Messsystem vorzusehen, um eine genügende Kontrolle zu ermöglichen.

Erst Ende der sechziger Jahre wurde in der Geodäsie das Problem der Zuverlässigkeit mit Hilfe der mathematischen Statistik streng formuliert und quantitativ gelöst [Baarda 1968].

Der Begriff ‹zuverlässig› ist in der Umgangssprache üblich und kann für qualitative Betrachtungen auch in der Geodäsie mit der Bedeutung ‹glaubwürdig›, ‹erprobt›, ‹vertrauenswürdig› verwendet werden.

Die Entwicklung von quantitativen statistischen Verfahren erforderte eine Präzisierung der Definition. Leider hat sich bisher international keine einheitliche Begriffserklärung für die geodätischen Anwendungen durchgesetzt [Grafarend u. a. 1979].

Für die korrekte Entwicklung und das Verstehen der Theorie ist jedoch eine klare und eindeutige Festlegung der Begriffe unerlässlich, und daher kann auf eine Definition hier nicht verzichtet werden.

7.2 Definition der Zuverlässigkeit im Hinblick auf grobe Fehler

Gegeben seien:

- das geodätische Netz mit dem funktionalen und dem stochastischen Modell
- der grösste Fehler Δ_{imax} jeder Beobachtung (bzw. Unbekannten), welcher die Anforderungen an das Vermessungswerk noch nicht in Frage stellt, und die Wahrscheinlichkeit β, die man als noch zumutbares Risiko betrachtet, falls ein grober Fehler Δ_{imax} nicht entdeckt wird
- das gewählte statistische Testverfahren $T(\alpha)$, mit welchem man das Modell nach den Messungen prüfen wird, und die entsprechende Wahrscheinlichkeit α für die irrtümliche Verwerfung des Modells.

Daraufhin nennt man das Messsystem im Hinblick auf allfällige grobe Fehler zuverlässig, wenn für $i = 1, 2, \ldots, n$ ein verborgener Fehler Δ_{imax} der i-ten Beobachtung (bzw. Unbekannte) bei der Durchführung des Tests $T(\alpha)$ mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt wird.

Falls der Fehler Δ_{imax} sich auf die unbekannten Parameter der Ausgleichung (z. B. Koordinaten) bezieht, spricht man von äusserer Zuverlässigkeit. Falls Δ_{imax} als Fehler einer Beobachtung betrachtet wird, wird hingegen von innerer Zuverlässigkeit gesprochen [Baarda 1968].

Gleichwertig ist die Definition, welche die Zuverlässigkeit in Beziehung mit den Grenzfehlern ∇_i setzt, die gerade noch mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt werden können. Die Zuverlässigkeitsbedingung ist dann:

$$\nabla_i \leqq \Delta_{imax}.$$

Mit der Definition der Zuverlässigkeit des Messsystems stellt sich sofort die Frage nach der Systemabgrenzung. Was gehört zum Messsystem? Das heisst, was ist Objekt der Zuverlässigkeit? Die Antwort ist leicht der Definition zu entnehmen:

- das geodätische Netz mit den Modelleigenschaften

- die Fehlerhypothese (Alternativhypothese) mit den Anforderungen an das Vermessungswerk und
- das gewählte statistische Testverfahren.

Beim praktischen Gebrauch wird meist lediglich von der Zuverlässigkeit des geodätischen Netzes gesprochen, und es ist daher nicht verwunderlich, dass man oft glaubt, es handle sich dabei um eine Eigenschaft der reinen Netzgeometrie.

Nur selten wird die direkte Abhängigkeit der Zuverlässigkeit vom gewählten statistischen Testverfahren erwähnt. Bemerkungen diesbezüglich finden sich z. B. etwas implizit im Vorwort von [Baarda 1968] und deutlicher in [Heck 1980].

Wichtig für die folgenden Betrachtungen ist die Bemerkung, dass eine positivere Bewertung der Zuverlässigkeit eines Messsystems erzielt werden kann:

- durch Verbesserung der Netzgeometrie oder
- durch bescheidenere Anforderungen an das Vermessungswerk oder
- durch die Wahl eines empfindlicheren statistischen Testverfahrens.

Die dritte Feststellung ist hier von besonderer Bedeutung, wenn man sie in Zusammenhang mit dem vorgeschlagenen NMAX-Test betrachtet. Der NMAX-Test weist gegenüber den herkömmlichen Verfahren eine grössere Empfindlichkeit in der Entdeckung der lokalen Modellfehler auf, so dass er einen Beitrag zur Verbesserung der Zuverlässigkeit der Messsysteme leisten kann.

8. Einfache Verfahren aus der Praxis

Die moderne Theorie der Zuverlässigkeit, die sich auf statistische Methoden stützt, ist etwas mehr als zehn Jahre alt. Sie ist nicht immer sehr einfach anzuwenden und wird daher noch selten in der schweizerischen Praxis eingesetzt. Die Notwendigkeit, zuverlässige Messsysteme zu entwerfen, ist hingegen keineswegs neu und bildet seit langem eine Voraussetzung des Vermessungswesens.

Die Lösungen, die in der Vergangenheit gewählt wurden, sind nicht grundsätzlich anders als die modernen. Anstatt die genaue Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit welcher kleine Fehler durch statistische Methoden entdeckt werden können, wurden Mustermessanordnungen als Vergleich herangezogen, die erfahrungsgemäss als zuverlässig galten. (Beispiel: Die Instruktion für die Triangulation 4. Ordnung vom 10. Juni 1919.)

Um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass die Zuverlässigkeit eines Messsystems nicht unabhängig von der Art des Testverfahrens und der gestellten Anforderungen ist, wurden immer auch Toleranzformeln oder -tabellen angegeben, welche die Zuverlässigkeit des Systems sicherten. Ein Beispiel dafür sind die Fehlergrenzen der bereits genannten Instruktion. Es ist vermutlich unnötig zu bemerken, dass in diesen alten Methoden die drei Systemelemente der modernen Definition deutlich zu erkennen sind.

9. F-Test und Zuverlässigkeit (nach W. Baarda)

Der eigentliche Durchbruch der Zuverlässigkeitsbetrachtungen in der Geodäsie ist W. Baarda zu verdanken. Seine sehr bekannte Publikation [Baarda 1968] über die Zuverlässigkeit geodätischer Netze gilt heute noch als Grundlage für alle Entwicklungen auf diesem Gebiet. Die Arbeiten von W. Baarda zeigten einen Weg auf, um das Problem der Zuverlässigkeit eines Messsystems nach den strengen Methoden der mathematischen Statistik zu lösen. Als Testverfahren wird der F-Test mit einer Wahrscheinlichkeitsschranke α für die Annahme oder die Verwerfung des Modells gewählt. Nach der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird die Testvariable $F = \hat{\sigma}^2/\sigma^2$ gebildet, welche für normalverteilte Beobachtungen F-verteilt ist. Der Freiheitsgrad f $(= n - u)$ von $\hat{\sigma}$ wird der Ausgleichung entnommen, während für σ der Freiheitsgrad ∞ angenommen wird.

Falls die i-te Beobachtung durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht ist, werden $\hat{\sigma}$ und F ebenfalls verfälscht und ihre Erwartungswerte verändert.

$$E(F^*) = E(F) + \frac{\lambda}{f} = 1 + \frac{\lambda}{f}$$

Für unkorrelierte Beobachtungen ist dann

$$\lambda = \frac{\Delta_i^2}{q_{ii}^{(ii)}} \cdot \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ii}^{(ii)}} \qquad \text{[Conzett 1981].}$$

Die Verteilung der Testgrösse F (ohne grobe Fehler) ist die bekannte F- oder Fisher-Verteilung. Die Verteilung von F* ist hingegen die nichtzentrale F-Verteilung mit λ als Nichtzentralitätsparameter.

Für jeden eventuellen groben Fehler ist es möglich, im voraus zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er entdeckt werden kann, wenn die Grösse $F = \hat{\sigma}^2/\sigma^2$ auf die zentrale F-Verteilung mit Annahmeschranke F_{GR} getestet wird (Abb. 7).

Oder was gleichwertig ist: man kann berechnen, wie gross ein grober Fehler ∇_i sein muss, damit er durch den obengenannten Test mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt wird. Diese Schwellenwerte für die groben Fehler in den einzelnen Beobachtungen werden innere Zuverlässigkeitsgrössen der Beobachtungen im Messsystem genannt [Baarda 1968], [Just 1979].

Die Wahl des F-Tests als Prüfmethode im Messsystem hat den Nachteil, dass nur recht beträchtliche Δ_i entdeckt werden können, wenn der Freiheitsgrad des Netzes gross wird.

10. Zuverlässigkeit und einfache Tests aus der Praxis

Im vorhergehenden Kapitel wurden Vorteile und Nachteile der Wahl des F-Tests als Prüfverfahren im Messsystem beschrieben. Ebenfalls erwähnt wurde, dass für grosse Netze die Empfindlichkeit des F-Tests auf grobe Fehler wesentlich kleiner ist als diejenige der einfachen Testverfahren aus der Praxis (V-Test, geometrische Bedingungen usw.). Darüber wurde im ersten Teil dieser Arbeit bei der Schilderung der Testverfahren a posteriori ausführlich berichtet.

Da in der Praxis oft grosse Netze bearbeitet werden (Hunderte von Unbekannten mit Tausenden von Messun-

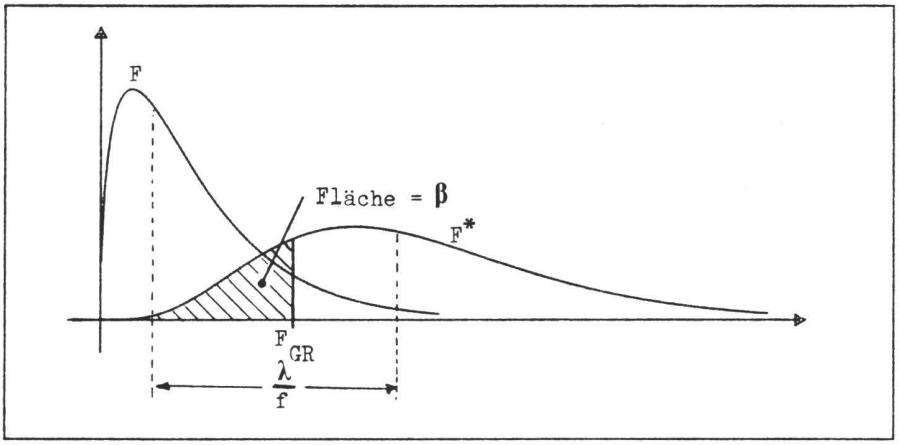

Abb. 7 Wahrscheinlichkeitsdichten der Teststatistik F bei zutreffendem und bei unzutreffendem Modell

gen), stellt sich sofort die Frage, ob es nicht möglich wäre, die Zuverlässigkeit eines Messsystems zu bestimmen, in welchem einer der erwähnten Einzeltests als Prüfverfahren eingesetzt wird. Dies würde zu praxisbezogeneren Zuverlässigkeitskriterien führen. Dank der guten Empfindlichkeit besonders geeignet wäre der Test der standardisierten Verbesserungen, welcher in 3.4 beschrieben ist.
Für eine einzelne Beobachtung der Ausgleichung ist es möglich zu prüfen, ob sie im Messsystem zuverlässig kontrolliert ist. Da aber die standardisierten Verbesserungen w_i unter sich korreliert sind, ist es sehr schwierig, die Wahrscheinlichkeit β zu bestimmen, dass bei Vorhandensein eines groben Fehlers Δ_i für alle Beobachtungen die Ungleichung

$$w_i \leqq w_{GR} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

erfüllt ist.
Mit anderen Worten: Wenn als Prüfverfahren der Test der standardisierten Verbesserungen gewählt wird, kann keine vollständige statistische Zuverlässigkeitsanalyse des Messsystems durchgeführt werden.

11. NMAX-Test und Zuverlässigkeit

11.1 Einführung

In der Beschreibung der Beurteilungsverfahren aufgrund der durchgeführten Messungen wurde darauf verwiesen, dass die Hauptkomponentenanalyse und der NMAX-Test sehr geeignete Prüfverfahren sind, da sie einerseits die lokale Wirkung von eventuellen groben Fehlern berücksichtigen und anderseits auch einen Gesamttest ermöglichen.
Selbstverständlich kann man sich jetzt fragen, ob die Zuverlässigkeit des Messsystems streng berechnet werden kann, wenn die zum System gehörenden Testverfahren die Hauptkomponentenanalyse oder der gleichwertige NMAX-Test sind.

11.2 Die Lösung

In 4.3 und 4.4 wurden die Hauptkomponenten des Verbesserungsvektors berechnet:

$$W = U^T V$$

(V ist der Verbesserungsvektor und U die Eigenvektorenmatrix der Kofaktorenmatrix Q_{vv}.) Für die Durchführung des Tests wurden dann die Hauptkomponenten W standardisiert

$$S = (w_1/\sqrt{\lambda_1}, w_2/\sqrt{\lambda_2}, \ldots),$$

wo die λ_i die Eigenwerte der Matrix Q_{vv} sind. Die Komponenten von S, für welchen $\lambda_i = 0$ ist, werden gestrichen (so dass S nur f-dimensional ist). Wenn die Matrix

$$\Lambda^{-1/2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

eingeführt ist, kann die folgende Beziehung hergestellt werden:

$$S = \Lambda^{-1/2} U^T V$$

Gemäss [Linkwitz 1960] ist für unkorrelierte Beobachtungen

$$V = -Q_{vv} P L,$$

so dass

$$S = -\Lambda^{-1/2} U^T Q_{vv} P L,$$

und

$$S = G^T L \text{ mit } G^T = -\Lambda^{-1/2} U^T Q_{vv} P.$$

Die standardisierten Hauptkomponenten s_i sind die linearen Funktionen der Beobachtungen, welche durch die Matrix G^T (f, n) definiert sind.
Falls ein grober Fehler Δ_i die i-te Beobachtung verfälscht, verändern sich auch die Komponenten s_k von S.
Nach diesen Vorbemerkungen ist es möglich, in Anlehnung an die Herleitungen von W. Baarda die Zuverlässigkeit des Messsystems zu prüfen.
Folgendes wird vorausgesetzt:
Auf die einzelnen Testgrössen s_k wirkt nur ein einziger eventueller grober Fehler, d. h. die Häufigkeit der groben Fehler ist so gering, dass im Einflussbereich jeder Beobachtung höchstens einer zu befürchten ist.
Falls die i-te Beobachtung durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht ist, ist s_k weiterhin normalverteilt, aber mit Erwartungswert

$$\lambda_k = g_{ik} \Delta_i$$

anstatt Null (λ_k = Nichtzentralitätsparameter) (Abb. 8).

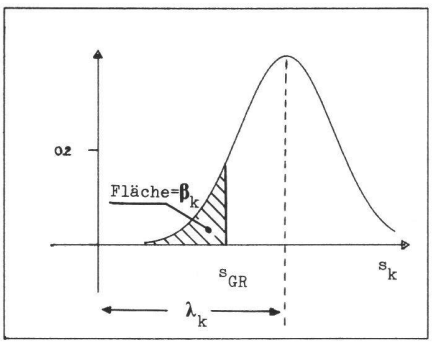

Abb. 8 Wahrscheinlichkeitsdichte einer Komponente des Testvektors S beim Auftreten eines groben Fehlers

Von der Annahmeschranke s_{GR} des NMAX-Tests (siehe Testbeschreibung in 5) und von der Tabelle der Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit β_k abgelesen werden, dass trotz dem groben Fehler Δ_i die k-te Komponente von S* in den Annahmebereich fällt (Fehler 2. Art).
Die angegebenen Beziehungen erlauben es, für jede Komponente zu berechnen, wie gut die Hauptkomponentenanalyse mit der Annahmeschranke α wirkt und wie gross die Wahrscheinlichkeit (β_k) ist, dass trotz dem groben Fehler die k-te Komponente von S in den Annahmebereich fällt.
Ein Fehler zweiter Art (d. h. fälschlicherweise Annahme der Nullhypothese) entsteht, wenn trotz dem groben Fehler alle Komponenten von S in den Annahmebereich fallen. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\beta = \iint \ldots \int_{\text{Annahmebereich}} f(S)\, ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 \ldots$$

wo f die mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte der multivariaten stochastischen Variablen S ist, welche den Erwartungswert $(g_{i1}, g_{i2}, g_{i3} \ldots) \cdot \Delta_i$ aufweist.
Da die einzelnen Komponenten stochastisch unabhängig sind, kann die oben angegebene Gesamtwahrscheinlichkeit aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers 2. Art für jede einzelne Komponente berechnet werden

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \ldots \beta_f$$

$$\beta = \int_{\substack{\text{Annahme-}\\\text{bereich}\\\text{(1-dimensional)}}} f_1(s_1)\, ds_1 \cdot \int_{\substack{\text{Annahme-}\\\text{bereich}\\\text{(1-dimensional)}}} f_2(s_2)\, ds_2 \ldots$$

Die f_k sind die eindimensionalen Normalverteilungen der einzelnen Komponenten von S. Sie haben Varianz = 1 und Erwartungswert

$$E(f_k) = \lambda_k = g_{ik} \cdot \Delta_i.$$

Die Werte der einzelnen Integrale sind der Tabelle der Normalverteilung zu entnehmen.
Nachdem für jede Beobachtung der grösste noch unschädliche grobe Fehler festgelegt worden ist, kann die Wahrscheinlichkeit β berechnet werden, dass der Fehler nicht entdeckt wird (erste Zuverlässigkeitsdefinition).
In ähnlicher Art kann man festlegen, wie gross der Fehler ∇_i ist, der mit einer bestimmten vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta_o)$ aufgedeckt werden kann (zweite Zuverlässigkeitsdefinition).

11.3 Anwendung

Mehrfaches Dreiecksnetz
(100 Dreiecke)
Ein reines Dreiecksnetz wie in 5.3, aber mit 100 Dreiecken, kann ausgeglichen werden. Man kann dann die folgenden Zuverlässigkeitsgrössen für die einzelnen Beobachtungen berechnen.
Zuverlässigkeit (nach dem NMAX-Test) für $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ und $f = 100$

Messung	σ_i	∇_i	∇_i/σ_i
1	5.0	37.4	7.5
2	5.0	37.4	7.5
3	5.0	37.4	7.5
4	5.0	37.4	7.5
5	5.0	37.4	7.5
...			
...			

Das gleiche Beispiel ergab bei der Berechnung der Zuverlässigkeit nach dem F-Test (siehe 9) $\nabla_i/\sigma_i = 11.0$.

Schlussfolgerung

Die vorliegende Arbeit möchte die Aufmerksamkeit der Leser auf eine einfache Feststellung lenken: Für die praktische Tätigkeit gilt selbstverständlich, dass erfahrene, geübte oder einfach bessere Vermesser die Resultate einer geodätischen Arbeit kritischer und wirksamer beurteilen und kleinere Fehler entdecken können, mit anderen Worten zuverlässigere Resultate erzielen.

Das gleiche muss aber auch für die modernen statistischen Methoden gelten: Empfindlichere oder einfach für die Anwendung bessere statistische Tests führen zu einer wirksameren Beurteilung der Resultate geodätischer Arbeiten und erlauben die Entdeckung kleinerer Modellfehler als weniger geeignete Vergleichsmethoden.

Die Wahl des Testverfahrens beeinflusst daher massgebend die Grösse der feststellbaren Modellfehler, d. h. der Zuverlässigkeit, die nicht nur eine Eigenschaft der reinen Messanordnung ist, sondern auch der Berechnungsverfahren (Testverfahren) und der Anforderungen an das Vermessungswerk. Die Entwicklung von besseren Testmethoden hat immer eine Konsequenz auf die Zuverlässigkeitsbetrachtungen: Bessere Tests erhöhen die Zuverlässigkeit ohne jegliche Änderung der Messanordnung. Die vorliegende Veröffentlichung zeigt mit Hilfe der mathematischen Statistik die Zusammenhänge zwischen Test und Zuverlässigkeit einerseits und die Beziehung zwischen den intuitiven Methoden der Praktiker und den moderneren der mathematischen Statistik anderseits. Der neu vorgeschlagene NMAX-Test ist eine mögliche Anwendung dieser Erkenntnisse und soll als Anregung gelten für vermehrte Anstrengungen im Bereich der mathematischen Beurteilungsverfahren.

Literatur

[1] H. R. Andris, 1967: ITRGA05. FORTRAN-Programm für die automatische Berechnung von Dreieckschlussfehlern. Programmbeschreibung. Vermessungsamt Baselland, Liestal.

[2] W. Baarda, 1968: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy 2/5.

[3] W. K. Bachmann, 1973: Estimation stochastique de la précision des mesures. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 4/73.

[4] A. Carosio, 1983: Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme, Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Nr. 35, 1983.

[5] H. Chernoff, 1971: The use of faces to represent points in n-dimensional space graphically. Technical Report 71, Stanford University, Dep. of Statistics.

[6] R. Conzett, 1978: Das Austausch-Verfahren bei der Berechnung geodätischer Netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kulturtechnik an der Technischen Universität Hannover Nr. 83.

[7] R. Conzett, 1981: Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich (Vorlesung).

[8] H. A. David, 1981: Order Statistics. Wiley + Sons Inc. New York.

[9] H. Dupraz, W. Niemeier, 1979: Un critère pour l'analyse des réseaux géodésiques de contrôle. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 4/79.

[10] B. Flury und H. Riedwyl, 1980: Angewandte multivariate Statistik, Vorabdruck.

[11] B. Flury und H. Riedwyl, 1981: Graphical representation of multivariate data by means of asymmetrical faces. Journal of the American Statistical Association, Dec. 1981, vol. 76, number 376.

[12] E. Grafarend, H. Heisler, R. Kelm, H. Kropff, B. Schaffrin, 1979: Optimierung geodätischer Messoperationen. Wichmann, Karlsruhe.

[13] B. Heck, 1980: Statistische Ausreisserkriterien zur Kontrolle geodätischer Beobachtungen. VIII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, Zürich, 24.9.–1.10.1980.

[14] C. Just, 1979: Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer Vermessung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Mitteilung Nr. 27.

[15] K. Kraus, 1975: Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler. Allgemeine Vermessungsnachrichten 1/75.

[16] K. Linkwitz, 1960: Über die Systematik verschiedener Formeln der Ausgleichungsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen 5/60.

[17] W. Maurer, 1979: Multivariate Methoden, Anwendungen und Zusammenhänge, Seminar der Internationalen biometrischen Gesellschaft, Interlaken.

[18] H. J. Oettli, 1960–1975: Formularsammlung für die Berechnung der Triangulation, Bundesamt für Landestopographie, Wabern.

[19] H. Pelzer, 1976: Über die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen. VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision, Darmstadt.

[20] H. R. Schwarz, H. Rutishauser, E. Stiefel, 1972: Matrizen-Numerik. Teubner, Stuttgart.

Adresse des Verfassers:
Dr. Alessandro Carosio
Bundesamt für Landestopographie
CH-3084 Wabern

Die Verwendung von Kunststoffgrenzzeichen in der Parzellarvermessung

W. Ulrich

Die Kosten der Vermarkung bestimmen in grossem Masse die Gesamtkosten einer Parzellarvermessung. Die Reduktion dieser Kosten kann mit günstigem Material, mit geringem Zeitaufwand und mit der Einsparung von Grenzpunkten erreicht werden. Die in den letzten 20 Jahren unternommenen Anstrengungen zur Entwicklung ‹neuer Vermarkungen› orientierten sich vorwiegend an den ersten beiden kostenwirksamen Elementen (Material und Zeit). Wieweit die Gewichte damit richtig gesetzt wurden, steht nicht im Mittelpunkt des nachfolgenden Berichtes, sondern er gibt Aufschluss über die Bewährung von Kunststoffgrenzzeichen. Er wurde als Schlussbericht über die Verwendung von Kunst-

1. Einführung und Absicht

Aufgrund der Änderung der Eidg. Instruktion für die Vermarkung und die Parzellarvermessung vom 19. Dezember 1979 werden bestimmte Kunststoffgrenzzeichen (im folgenden Marken genannt) generell zugelassen. Für die definitive Zulassung sind die einzelnen Marken bei der EMPA prüfen zu lassen.