

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 81 (1983)

Heft: 7

Artikel: Neues Altes in der Ausgleichsrechnung

Autor: Wolf, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-231639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Neues Altes in der Ausgleichsrechnung

H. Wolf

Die Vielzahl der modernen Ideen und Verfahren, die sich heute dem Geodäten in der Ausgleichsrechnung darbieten, auf ihren Gehalt an klassischen Komponenten zu untersuchen und zu betrachten, war – nach einem Vorschlag von Herrn Prof. Dr. Matthias – der Gegenstand eines am 18.2.1983 vor dem Geodätischen Kolloquium der ETH Zürich abgehaltenen Vortrages, der den nachfolgenden Ausführungen zu Grunde gelegt ist.

Etudes et considérations sur le contenu en composants classiques des idées et méthodes récentes qui s'offrent aux géodésiens pour le calcul compensatoire: tel était le thème du colloque de géodésie organisé à l'EPFZ le 18 février 1983 à l'initiative du Prof. Dr Matthias et qui sert de fondement à l'exposé suivant.

Zeichnet man einen Querschnitt durch die aktuelle Methodenlehre der geodätischen Datenverarbeitung, insbesondere der Ausgleichsrechnung, so zeigt sich ein vielgestaltiges Bild von ganz neuartigen Modellen und Prozessen, denen gegenüber die klassischen Verfahren als sehr viel weniger differenziert und flexibel erscheinen. Dennoch bestehen gewisse Gemeinsamkeiten, die sie miteinander verbinden, wobei allerdings nur schwer zu sagen ist, inwieweit in dem einen die Wurzel des anderen zu sehen ist. Entsprechend dem hier gesteckten Rahmen ist die Darstellungsweise nur eine exemplarische und kann sich nur auf eine begrenzte Anzahl von ausgewählten Sachverhalten beziehen.

1. Ausgleichungs-Prinzipien Ω

Vor Beginn jeder Ausgleichung – oder «Parameterschätzung» im Sprachgebrauch der Statistik – ist die Frage nach dem dabei anzuwendenden Grundprinzip, d. h. nach der Zielfunktion Ω , klarzustellen.

1.1 Die Methode der kleinsten Quadrate (= MdkQ)

Sie steht auch heute noch im Mittelpunkt aller Ausgleichungsprobleme und drückt sich bekanntlich aus durch

$$\Omega_1 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min, \text{ Gauss (1794)} \quad (1.1-1)$$

wobei die Gewichtsmatrix \mathbf{P} bei Gauss eine Diagonalmatrix war; \mathbf{v} ist der Vektor der Verbesserungen (= Residuen).

Eigenschaften: Ω_1 besitzt zwei bereits von Gauss nachgewiesene Eigenschaften:

a) Wenn die der Ausgleichung zu unterwerfenden Beobachtungen eine Normalverteilung besitzen, so ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{const} \cdot \exp -\Omega_1$ des Gesamtsystems ein Maximum (Gauss 1809).

b) Wie auch immer die Beobachtungen verteilt sein mögen (normal oder anormal), die Anwendung von (1.1-1) führt in jedem Fall zu kleinsten mittleren Fehlern der Unbekannten bzw. von linearen Funktionen von ihnen (Gauss 1821).

Neu: Die moderne Literatur, vgl. Koch (1980), welche die MdkQ als statistisches Schätzverfahren darstellt, entwickelt diese aus dem Prinzip der (normalen) «Maximum Likelihood» (Fisher 1912) oder aus dem Prinzip der «minimalen Varianz». Wir erkennen darin die beiden «Gauss'schen» Eigenschaften a) und b) wieder. Während Gauss im Fall von a) die Ausgleichungsergebnisse als «wahrscheinlichste» und im Fall von b) als «plausibelste» bezeichnete, heissen sie modern «beste lineare unverzerrte Schätzungen», und «MdkQ» wird in der Funktionalanalysis als «Prinzip der minimalen L_2 -Norm» bezeichnet.

1.2 Die Methode der kleinsten Absolutsumme

Noch aus der vor-Gauss'schen Zeit stammend, lautet sie

$$\Omega_2 = \sum |v| = \min \quad (1.2-1)$$

erstmalig von Bošcović (1770) und dann auch von Laplace (1799) benutzt, der allerdings noch die Bedingung $\sum v = 0$ hinzugenommen hat.

Neu: Unter der Bezeichnung «Minimale L_1 -Norm» ist das Verfahren z. B. von Fuchs (1980) neu erarbeitet worden. Es eignet sich besonders zur Auffindung grob fehlerhafter Beobachtungen.

1.3 Die Methode der kleinsten Maximalverbesserung

Wie bereits von Gauss (1809) erkannt, kann man die auf Tschebyscheff (1853) zurückgehende Ausgleichungsforderung gemäss

$$\Omega_3 = v_{\max} = \min \quad (1.3-1)$$

als aus der MdkQ hervorgehend ansehen, indem man das zu v_{\max} gehörende Gewicht gleich Unendlich annimmt.

Neu: Unter der Bezeichnung «Minimax-Methode», vgl. Heindl/Reinhart (1976), oder L_∞ -Norm wird das Tschebyscheff-Verfahren im Zusammenhang mit Problemen der Einhaltung von vorgegebenen Toleranzen verwendet.

1.4 Die Methoden der höheren Fehlerpotenz-Summen

Beckenbach (1916) diskutiert Ausgleichungen gemäss

$$\Omega_4 = \sum v^4 = \min \quad (1.4-1)$$

bzw. allgemein: nach Potenzsummen mit geradzahligem Exponenten.

1.5 Robuste Ausgleichungsmethoden

Sind die letzten k (von insgesamt n) Beobachtungen grob fehlerhaft, so dass man sie aus der Ausgleichung ausschliessen muss, so braucht man nur deren Gewichte gleich Null zu setzen: $p_k = p_{k+1} = \dots = p_n = 0$, so dass

$$\Omega_5^0 = \sum_1^{k-1} p v v = \min \quad (1.5-1)$$

Neu: Den Einfluss der fehlerhaften Beobachtungen kann man mindern, indem man eine «robuste» Ausgleichung, vgl. Carosio (1979), durchführt, wobei in

$$\Omega_5 = \sum_1^n f(v) = \min \quad (1.5-2)$$

gewisse Funktionen der v einbezogen werden, was – genau wie bei (1.5-1) – eine iterative Berechnung notwendig macht, um die v_k bis v_n zu lokalisieren.

2. Beobachtungsgleichungen, Gewichte

2.1 Aufstellung und Linearisierung der Beobachtungsgleichungen

Bei Anwendung der vorgenannten Grundprinzipien auf eine spezielle Aufgabe hat man den jeweiligen geometrischen oder physikalischen Sachverhalt durch die Beobachtungsgleichungen (Fehler- bzw. Bedingungsgleichungen) wiederzugeben. Falls nichtlinear, hat man sie zu linearisieren, zumeist durch Taylorisierung. Bei komplizierteren funktionalen Zusammenhängen, so bei Bahnbestimmungen in der Astronomie, gelegentlich auch in der Photogrammetrie, ersetzt man neuerdings die Bildung der erforderlichen Differentialquotienten durch die Bildung von Differenzenquotienten, indem man die betr. Funktion noch an einer Nachbarstelle ent-

wickelt und dann die Änderung der Funktion durch die Änderung des jeweiligen Argumentes dividiert – ein Verfahren, das sich bereits bei Gerling (1843) findet. Eine ähnliche empirische Taylorisierung hat Tewinkel (1959) für die Justierungsausgleichung eines Präzisionspantographen angegeben.

Eine andere (Taylorisierungs-freie) Art der Linearisierung ist die Methode des Parameter-Austausches, bei der gewisse Unbekannte x_1, x_2, \dots durch eine gleich grosse Anzahl von funktional abhängigen Parametern y_1, y_2, \dots ersetzt werden. Die Abhängigkeiten

$$(x_1, x_2, \dots) = f(y_1, y_2, \dots)$$

können dann aber keine linearen Funktionen sein, vgl. z. B. Helmert (1872).

2.2 Wahl der Gewichte

Bei bekannten Kovarianzen Σ_l bzw. Kofaktoren Q_l der Beobachtungen l gilt* für die Gewichte

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_l^{-1} = Q_l^{-1} \quad (2.2-1)$$

worin σ_0^2 die Varianz der Gewichtseinheit ist.

Sonderfälle:

a) Lässt man einzelne Gewichte p (so für fehlerfrei angenommene Beobachtungen) gegen Unendlich anwachsen, so gehen die zugehörigen Verbesserungen v gegen Null, und die Fehlergleichungen gehen damit in «Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten» (= Restriktionen) über. Dieser Gedanke stammt von Seidel (1874), vgl. auch Koch und Pope (1969).

Als Problem-Umkehr ergibt sich daraus die Möglichkeit, die Aufgabe der «vermittelnden Beobachtungen mit Restriktionen» so zu lösen, dass man die Restriktionsgleichung als Fehlergleichung mit einem sehr hohen, aber endlichen Gewicht behandelt, so dass man alles im Schema der vermittelnden Beobachtungen ausgleichen kann.

b) Prof. H. H. Schmid (1965) hat gezeigt, wie durch Nullsetzen einzelner Gewichte die betr. Beobachtungsgrösse den Charakter einer Unbekannten annimmt, so dass man alle Aufgaben im System der bedingten Beobachtungen lösen kann – auch im numerischen Sinne, indem man jenen Beobachtungen ein sehr kleines, endliches Gewicht beimisst.

3. Korrelierte Beobachtungen

In der Geodäsie ist diese Bezeichnung etwa seit dem Erscheinen von Tienstras grundlegender Publikation, auf deren

*Bitte den Unterschied zwischen l und 1 (eins) in diesem Aufsatz beachten.

hohen geometrischen Ideengehalt kürzlich Prof. Moritz (1979) hinwies, gebräuchlich geworden. (Früher: «untereinander abhängige Beobachtungen».) Das Mass der gegenseitigen – zufallsbedingten – Abhängigkeiten wird ausgedrückt durch die (als symmetrisch angenommenen) Kovarianzmatrizen Σ_l der Beobachtungen $l = [L_1, L_2, \dots, L_n]^T$:

$$\Sigma_l = \text{cov}(l) = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots \\ Q_{12} & Q_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \sigma_0^2 Q_l \quad (3-1)$$

oder in moderner Darstellung (worin E die Erwartungswerte bezeichnet):

$$\text{cov}(l) = E\{\epsilon\epsilon^T\}, \text{ mit } \epsilon = l - E\{l\} \quad (3-2)$$

3.1 Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz

Für lineare Funktionen der l , z. B. $f = Al$, lautet es:

$$\text{cov}(f) = \text{cov}(Al) = A \text{cov}(l)A^T \quad (3.1-1)$$

Es ist dies keine Schöpfung der Neuzeit, sondern findet sich schon bei Gauss (1821), Art. 18, auch mit Bildung der Kovarianzterme Q_{ik} , ($i \neq k$), in (3-1)

3.2 Das Primärfehler-Konzept,

vgl. Pelzer (1974), Brückner (1981) Hängt eine Messungsgrösse l^* nicht nur von den Ablesungen l^0 ab, sondern auch noch von gewissen Einflussgrössen x (Eichkonstanten, Refraktionskoeffizienten u. a. m.), linearisiert zu

$$l^* = l^0 + Rx, \text{ wobei } \text{cov}(l^0) = \Sigma_{l^0}, \text{ cov}(x) = \Sigma_x,$$

$$\text{so gilt: } \Sigma_{l^*} = \Sigma_{l^0} + R\Sigma_x R^T,$$

was sich aber als ein besonderer Fall von (3.1-1) darstellt, indem

$$A = [l, R], \text{ cov}(l^*) = \begin{bmatrix} \Sigma_{l^0} & 0 \\ 0 & \Sigma_x \end{bmatrix}$$

(l = Einheitsmatrix).

3.3 Tienstras «Standard-Problem I»

(= bedingte Beobachtungen) Mit den Bedingungsleichungen $Bv + w = 0$, (mit $w = Bl$), worin B eine Koeffizientenmatrix und w der Widerspruchsvektor ist, erhält man mit (1.1-1) und (2.2-1) die Normalgleichungen

$$BQ_l B^T k + w = 0 \quad (3.3-1)$$

worin k der Vektor der Korrelaten (= Lagrange-Multiplikatoren) ist. Die Relation (3.3-1) ist nicht neu, sondern findet sich bereits bei Bessel (1838); die Fehlerrechnung dazu stammt von Zech (1857) und Andrae (1867).

Dabei bestimmt Bessel die Kofaktoren Q_l der aus den Stationsausgleichungen erhaltenen Winkel $\hat{x}_{\text{Stat.}} = l_N$ (ihre An-

zahl = $u_{\text{Stat.}}$) durch Inversion der Stationsnormalgleichungs-Koeffizientenmatrix $N_{\text{Stat.}}$:

$$Q_l = N_{\text{Stat.}}^{-1} \quad (3.3-2)$$

so dass die Normalgleichungen (3.3-1) nunmehr lauten:

$$BN_{\text{Stat.}}^{-1} B^T k + w = 0 \quad (3.3-3)$$

womit

$$v = Q_l B^T k = -N_{\text{Stat.}}^{-1} B^T (BN_{\text{Stat.}}^{-1} B^T)^{-1} w \quad (3.3-4)$$

(Die $N_{\text{Stat.}}^{-1} B^T$ hiessen die «Übertragungsgrössen», und $B^T k$ waren die «Hilfsgrössen».)

Anwendung: In dieser Weise, also nach korrelierten Beobachtungen, ist das Schweizerische Dreiecksnetz I. Ordnung (Gradmessungsnetz) bereits 1884 ausgeglichen worden – also mehr als 60 Jahre vor Tienstra; vgl. Schweiz (1884).

Zuvor jedoch hatten Hansen (1867) und Helmert (1872) gezeigt, dass es gar nicht nötig ist, die Inverse (3.3-2) explizit mit allen Elementen zu bilden, sondern dass man (3.3-1) viel einfacher auf folgende Weise erhält: Gelegentlich der Auflösung der Stationsnormalgleichungen fügt man dem Schema noch die Matrix B^T sowie die Nullmatrix O bei:

$$N_{\text{Stat.}} \begin{bmatrix} B^T \\ O \end{bmatrix}$$

Dann gewinnt man, z.B. nach dem Gaussischen Algorithmus, als Nebenprodukt die Matrix $R^T = (O \cdot u_{\text{Stat.}})$, und die Reduktionsfaktoren werden in der Matrix

$$\bar{P} = \text{diag} \left[[paa]_{\text{Stat.}}, [pbb \cdot 1]_{\text{Stat.}}, \dots \right]$$

gesammelt. Dann erhält man für (3.3-3):

$$BN_{\text{Stat.}}^{-1} B^T = R\bar{P}R^T \quad (3.3-5)$$

Bei Tienstra (1947), der den Rechengang (3.3-3), (3.3-4) als «Standard-Problem III in two steps» beschreibt, findet sich jedoch der Zusammenhang (3.3-5) nicht.

3.4 Tienstras «Standard-Problem II»

(= vermittelnde Beobachtungen) Aus den Fehlergleichungen $v = A\hat{x} - l$ fliessen mit (1.1-1) und (2.2-1) die Normalgleichungen

$$A^T Q_l^{-1} A \hat{x} - A^T Q_l^{-1} l = 0 \quad (3.4-1)$$

worin A die Koeffizientenmatrix und \hat{x} die Schätzwerte der unbekannt Parameter sind, Tienstra (1947).

Werden im Fall der geodätischen Stations- und Netzausgleichung wieder die Kovarianzen gemäss (3.3-2) aus den Stationsnormalgleichungen entnommen, so findet beim Einsetzen in (3.4-1) eine doppelte Inversion statt, so dass man nur die originäre (unaufgelöste) Matrix \mathbf{N}_{Stat} als Gewichtsmatrix benötigt:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{N}_{\text{Stat}} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \mathbf{N}_{\text{Stat}} \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (3.4-2)$$

Auf diesen einfachen, rechnerisch sehr bequem zu handhabenden Zusammenhang bezogen sich schon Schreiber (1876) und Helmert (1880), S. 509, während bei Tienstra überall die vollständige Inversion, d.h. \mathbf{Q}_i^{-1} , verlangt wird.

3.5 Koordinaten als korrelierte Beobachtungen

Für die Vielzahl von trigonometrischen Folgearbeiten hat sich das von Jordan (1882) angegebene Prinzip als sehr fruchtbar erwiesen: Man betrachte die aus einer Vor-Ausgleichung erhaltenen Koordinatenwerte als korrelierte Beobachtungen, wenn man sie in eine Folge-Ausgleichung einführt. Jordan gibt auch genau die (richtige) Rechenvorschrift an, nach der man die zugehörige Kovarianzmatrix für die korrelierten Beobachtungen (z. B. die Koordinaten x_i, y_i des Punktes Nr. i) erhält: Man eliminiere im Normalgleichungssystem der Vor-Ausgleichung, z. B. mit dem Gausschen Algorithmus, alle anderen Unbekannten bis auf $[x_i, y_i]^T = \mathbf{x}_i$, so dass das reduzierte Normalgleichungssystem $\mathbf{N}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{w}_i$ verbleibt. Dann haben die korrelierten Beobachtungen $\mathbf{x}_i = \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{w}_i$ die (gesuchte) Kovarianzmatrix

$$\text{cov}(\mathbf{x}_i) = \sigma_0^2 \mathbf{N}_i^{-1} \quad (3.5-1)$$

Jordan (1882) liefert sogleich ein Anwendungsbeispiel hierzu: Liegen für \mathbf{x}_i zwei verschiedene Bestimmungen vor, nämlich

$$\text{a) } \mathbf{x}_i' = \mathbf{N}_i'^{-1} \mathbf{w}_i' \text{ mit } \text{cov}(\mathbf{x}_i') = \sigma_0'^2 \mathbf{N}_i'^{-1}$$

$$\text{b) } \mathbf{x}_i'' = \mathbf{N}_i''^{-1} \mathbf{w}_i'' \text{ mit } \text{cov}(\mathbf{x}_i'') = \sigma_0''^2 \mathbf{N}_i''^{-1},$$

so gehören dazu die neuen Fehlergleichungen

$$\text{a) } \mathbf{x}_i' + \mathbf{v}_{x_i'} = \hat{\mathbf{x}}_i, \text{ oder } \mathbf{v}_{x_i'} = \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i', \text{ mit } \mathbf{P}_i' = \text{cov}^{-1}(\mathbf{x}_i')$$

$$\text{b) } \mathbf{x}_i'' + \mathbf{v}_{x_i''} = \hat{\mathbf{x}}_i, \text{ oder } \mathbf{v}_{x_i''} = \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i'', \text{ mit } \mathbf{P}_i'' = \text{cov}^{-1}(\mathbf{x}_i'')$$

worin $\mathbf{v}_{x_i'}$ und $\mathbf{v}_{x_i''}$ die neuen Verbesserungen sind, welche von \mathbf{x}_i' bzw. \mathbf{x}_i'' zu $\hat{\mathbf{x}}_i$ hinführen. Bildet man hieraus die Normalgleichungen, so erhält man das nach $\hat{\mathbf{x}}_i$ aufzulösende System

$$(\sigma_0'^{-2} \mathbf{N}_i' + \sigma_0''^{-2} \mathbf{N}_i'') \hat{\mathbf{x}}_i - (\sigma_0'^{-2} \mathbf{N}_i' \mathbf{x}_i' + \sigma_0''^{-2} \mathbf{N}_i'' \mathbf{x}_i'') = \mathbf{0} \quad (3.5-2)$$

eine Rechenweise, die man auch als «Additionstheorem für reduzierte Normalgleichungen», Wolf (1968) S. 75, bezeichnet hat, oder als «Helmertsche Blockmethode», vgl. Helmert (1880), S. 559. Sie wurde auch für die Ausgleichung des europäischen Dreiecksnetzes «RETrig» vorgeschlagen und in Anwendung gebracht.

3.6 Zurückführung der Ausgleichung korrelierter Beobachtungen auf eine nicht korrelierte Ausgleichung

Wird im Falle von korrelierten Beobachtungen die Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11}, Q_{12}, \dots \\ Q_{12}, Q_{22}, \dots \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.6-1)$$

nach einem Vorschlag von Helmert (1907) zerlegt in $\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{K}^T$, so dass

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{Q_{11}}, Q_{12}/\sqrt{Q_{11}}, \dots \\ 0, \sqrt{Q_{22} - 1}, \dots \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix}^{-1}, \text{ dann ist}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{v} = \\ &= (\mathbf{K}^T \mathbf{v})^T (\mathbf{K}^T \mathbf{v}) = \\ &= \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{v}}, \text{ wobei } \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{K}^T \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.6-2)$$

Nach Helmert heissen dann die zu $\bar{\mathbf{v}}$ gehörenden $\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{K}^T \mathbf{l}$ die «äquivalenten» Beobachtungen, welche nach (3.6-2) die Kovarianzmatrix

$$\text{cov}(\bar{\mathbf{l}}) = \sigma_0^2 \mathbf{I} \quad (3.6-3)$$

besitzen, d.h. die (den korrelierten Beobachtungen \mathbf{l} zugeordneten) äquivalenten Beobachtungen $\bar{\mathbf{l}}$ sind korrelationsfrei und besitzen alle das Gewicht $p = 1$. Mit $\mathbf{v} = \mathbf{K}^T \bar{\mathbf{v}}$ konnte Helmert jede Ausgleichung korrelierter Beobachtungen auf eine Ausgleichung nicht korrelierter Beobachtungen $\bar{\mathbf{l}}$ zurückführen (und mit diesen dann in klassischer Weise weiterrechnen).

Die Matrix \mathbf{K} ist später bei Cholesky (1924) im Zusammenhang mit der Auflösung von Normalgleichungen aufgetreten. Die Zerlegung $\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{K}^T$ wird heute als «Cholesky-Faktorisierung» bezeichnet (geht aber auf Helmert zurück).

4. Prädiktion und Kollokation

Diese von Prof. Moritz bereits 1963 entwickelten Verfahren stellen mit ihren Erweiterungen auf den Hilbertschen Raum vollkommene Neuschöpfungen dar. Dabei wird die Prädiktion als eine Form der Inter- bzw. Extrapolation verstanden, und die (geodätische) Kollokation nimmt zusätzlich noch die Bestimmung einer Trendfunktion mit hinzu.

Legt man die einfache Form

$$\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \mathbf{s} + \mathbf{n}, \text{ mit } \mathbf{L}_0 = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad (4-1)$$

zugrunde (wegen der allgemeineren Form $\mathbf{l} = \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{n}$ vgl. Wolf [1974]), so bedeuten hier \mathbf{L} den Vektor der Beobachtungen, \mathbf{L}_0 ist der Trend (in linearer Abhängigkeit von den Trendparametern $\hat{\mathbf{x}}$), \mathbf{s} ist der Vektor der Signale (= unregelmässiger systematischer Anteil), und \mathbf{n} ist – als «noise» – der Vektor der unregelmässigen Messungsfehler. Die Bestimmung der einzelnen Elemente von $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \hat{\mathbf{x}}$ wird dann so durchgeführt, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{n} + \mathbf{s}^T \Sigma_{ss}^{-1} \mathbf{s} &= \\ = [\mathbf{n}^T, \mathbf{s}^T] \begin{bmatrix} \Sigma_{nn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} &= \min \end{aligned} \quad (4-2)$$

woraus

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}^T (\Sigma_{nn} + \Sigma_{ss})^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T (\Sigma_{nn} + \Sigma_{ss})^{-1} \mathbf{L} \\ \mathbf{n} &= \Sigma_{nn} (\Sigma_{nn} + \Sigma_{ss})^{-1} \mathbf{l}, \\ \mathbf{s} &= \Sigma_{ss} (\Sigma_{nn} + \Sigma_{ss})^{-1} \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (4-4)$$

Die Prädiktionsaufgabe besteht dann darin, an einer nichtgemessenen Stelle \mathbf{x}^* den zugehörigen Signalwert \mathbf{s}^* zu interpolieren (= vorherzusagen), wofür gilt (mit $\mathbf{n}^* = 0$):

$$\mathbf{s}^* = \Sigma_{s^*s} \Sigma_{ss}^{-1} \mathbf{s} \quad (4-5)$$

worin $\Sigma_{nn}, \Sigma_{ss}, \Sigma_{s^*s}$ die zugehörigen Kovarianzen sind.

Von Schwarz (1976) ist statt (4-3) eine andere, numerisch bequemer zu handhabende Form gefunden worden:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \Sigma_{nn}^{-1} \bar{\mathbf{P}}^{-1} \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T (\mathbf{I} - \Sigma_{nn}^{-1} \bar{\mathbf{P}}^{-1}) \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{l} \quad (4-6)$$

$$\text{worin } \bar{\mathbf{P}} = \Sigma_{nn}^{-1} + \Sigma_{ss}^{-1} \quad (4-7)$$

Diese Form ist im klassischen Sinn sehr leicht verifizierbar, wenn man nach Helmert (1907) die Signale \mathbf{s} als unbekannte Parameter $\hat{\mathbf{s}}$ behandelt und (4-1) in der Form von Fehlergleichungen anschreibt:

$$\begin{aligned} -\mathbf{n} &= \hat{\mathbf{s}} + \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}, \text{ Gewicht} = \Sigma_{nn}^{-1} \\ \mathbf{s} &= \hat{\mathbf{s}}, \text{ Gewicht} = \Sigma_{ss}^{-1} \end{aligned} \quad (4-8)$$

Dann lauten die nach (4-2) hieraus fliessenden Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{s}} + \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{l} \\ \dots + \mathbf{A}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{l} \end{aligned} \quad (4-9)$$

Die Auflösung liefert dann sogleich (4-6) sowie $\hat{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{P}}^{-1} \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{l}$ (4-10)

4.1 Die Interpolation nach quasi-systematischen Fehlern

Sie kann – in gewisser Weise – als eine Vorform der Prädiktion angesehen werden und war von Thiele (1880), vgl. Helmert (1907), angegeben worden, wobei man sich auf den Fall bezog, dass die L sich nach einem Parameter t ordnen lassen. Der wesentliche Unterschied zur Prädiktion besteht darin, dass die quasystematischen Fehler δ jeweils die *Unterschiede* zweier Signalwerte s sind:

$$\delta_{i,i+1} = s_{i+1} - s_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{d. h. } \delta = Hs = \begin{bmatrix} -1 & +1 & \dots & \dots \\ & -1 & +1 & \dots \\ & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \end{bmatrix}^T$$

An die Stelle von (4–8) treten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} -n &= \hat{s} + A\hat{x} - L, & \text{Gewicht} &= \Sigma_{nn}^{-1} \\ \delta &= H\hat{s}, & \text{Gewicht} &= \Sigma_{\delta\delta}^{-1} \end{aligned} \quad (4.1-1)$$

Dann ergeben sich die \hat{x} und \hat{s} aus

$$n^T \Sigma_{nn}^{-1} n + \delta^T \Sigma_{\delta\delta}^{-1} \delta = \min \quad (4.1-2)$$

genau wie in (4–6) bzw. (4–10), nur dass \bar{P} durch $\bar{P}_\delta = \Sigma_{nn}^{-1} + H^T \Sigma_{\delta\delta}^{-1} H$ zu ersetzen ist, woraus sich für den gesuchten Interpolationswert s^* ergibt:

$$s^* = \bar{\Sigma}_{i,i+1}^{-1} \bar{\Sigma}_{\delta\delta}^{-1} \bar{s} \quad (4.1-3)$$

Für die Kovarianzen wurden damals nur Diagonalmatrizen benützt, insbesondere war:

$$\begin{aligned} \Sigma_{nn}^{-1} &= \text{diag}[g_1, g_2, \dots], \\ \Sigma_{\delta\delta}^{-1} &= \text{diag}[g'_1, g'_2, \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{i,i+1} &= a^T / a^T \bar{\Sigma}_{\delta\delta}^{-1} a, \quad \bar{\Sigma}_{\delta\delta}^{-1} = \text{diag}[g'_i, g'_{i+1}], \\ a &= [1, 1]^T, \quad \bar{s} = [\hat{s}_i, \hat{s}_{i+1}]^T. \end{aligned}$$

4.2 Benützung der Kollokation zur Verbindung von stochastischen mit physikalischen Grössen

Treten innerhalb einer Aufgabe sowohl mit Messfehlern behaftete Beobachtungen wie auch unregelmässig variierende physikalische Grössen auf, wie dies Prof. Moritz in seinen fundamentalen Darlegungen für die Funktionale des terrestrischen Schwerfeldes gezeigt hat, so hat man die Messfehler durch den noise n und physikalische Zufallsvariablen durch die Signale s bzw. ihre Differenzen δ auszudrücken.

Die dabei anzuwendenden Prinzipien (4–2) bzw. (4.1–2) sind auch früher schon, insbesondere zur Berechnung von Trendparametern \hat{x} , benützt worden.

Beispiele:

Typ A (mit Signalen s):

Helmert (1877), S. 233: n = Messungsfehler von Horizontalwinkeln, s = Seitenrefraktionseinflüsse,

Helmert (1886), (1906): n = Messungsfehler, s = Lotabweichungen,

Wolf (1949): Berechnung des «Europäischen Datums» (auch für ED79 geltend): n = Laplace-Widersprüche, s = Lotabweichungen.

Typ B (mit quasisystematischen Fehlern δ):

Helmert (1907): n = Uhr-Ablesefehler, δ = Uhr-gang-Störungen

Schildheuer (1961): n = Schwingungs-Ablesefehler, δ = Dämpfungs-Störungen

Hermanowski (1963): n = Nivellierfehler, δ = vertikale Erdkrustenbewegungen

Serbetçi (1968): n = Gravimeter-Ablesefehler, δ = Gravimeter-«Fahrgang»-Störungen.

4.3 Inversionsfreie Prädiktion

Zur Umgehung der lästigen Inversionen in (4–3), (4–4), (4–6) hat man Prädiktionverfahren vorgeschlagen, die ohne Matrizeninversion auskommen, vgl. Bjerhammar (1973), Sünkel (1980), Svensson (1981), die sämtlich auf die Bildung von gewogenen Mittelwerten l^* (aus den gegebenen l) hinauslaufen (mit den Gewichten p):

$$l^* = \sum_i p_i l_i / \sum_i p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3-1)$$

Eine geometrische Anwendung ergibt sich, wenn die l Koordinaten-Klaffungen $l_i = [\Delta x_i, \Delta y_i]^T$ darstellen, die sich zwischen zwei geodätischen Netzen an den gemeinsamen Stützpunkten zeigen und die dann auf gewisse Neupunkte $[\Delta x^*, \Delta y^*]^T$ interpoliert werden sollen:

$$\Delta x^* = \sum_i p_i \Delta x_i / \sum_i p_i;$$

$$\Delta y^* = \sum_i p_i \Delta y_i / \sum_i p_i \quad (4.3-2)$$

wobei für die Gewichte

$$p_i = 1/S_i \lambda \quad (4.3-3)$$

gesetzt wird, wenn S_i gleich der Entfernung des betreffenden Neupunktes vom Stützpunkt Nr. i gesetzt wird; λ spielt dabei die Rolle eines «latenten Parameters», vgl. Wolf (1981).

In dieser Weise wurde bereits 1895/97 bei der preussischen Landesaufnahme in der Ausgleichung des «Niederrheinischen Dreiecksnetzes» (mit $\lambda = 1$) verfahren, vgl. v. Schmidt (1895), (1897): Die $\Delta x_i, \Delta y_i$ waren dabei die nach einer Drehstreckung des zwangsfrei ausgeglichenen Netzes erhaltenen Klaffungen.

Nennt man den mit λ_j aus (4.3–1) fließenden Mittelwert l_j^* , so hat Bjerhammar (1973) noch eine bedeutsame Erweiterung durch Bildung eines allgemeineren Mittelwertes l^{**} zu

$$l^{**} = (k_1 l_1^* + k_2 l_2^* + \dots + k_m l_m^*) / (k_1 + k_2 + \dots + k_m) \quad (4.3-4)$$

angegeben, worin die k empirisch zu ermittelnde Koeffizienten (Gewichte) sind, und wobei

$p_i = 1/(\sqrt{S_i^2 + c^2}) \lambda_i$. Ausserdem ist c eine willkürlich zu wählende Glättungskonstante.

5. Freie Ausgleichungen

Die «freien Ausgleichungen» stellen, was ihren algebraischen Hintergrund anbelangt, eine vollkommene Neuentwicklung in der Ausgleichungsrechnung dar. Vor allem sind es die von Prof. Bjerhammar geschaffene Theorie der verallgemeinerten Matrix-Inversen bei singulären Fällen sowie der Inversion rechteckiger Matrizen, die hier eine besondere Würdigung verdienen.

Von der Anwendungsseite her gesehen, ergeben sie sich immer dann, wenn der Fall einer «Überparametrisierung» vorliegt, d. h. wenn bei einer Ausgleichung mehr (unabhängige) Unbekannte x eingeführt werden, als zur eindeutigen Lösung des speziellen Problems erforderlich sind.

Beispiele:

- Stationsausgleichungen mit Richtungsunbekannten,
- Skalenteilungsuntersuchungen mit Strich-Unbekannten,
- Geodätische Netze aller Art mit Datums- und Konfigurationsdefekten.
- Trigonometrische Höhennetze mit einseitigen Höhenwinkeln, wenn eine Refraktionsunbekannte eingeführt wird.

5.1 Lösungen zur freien Ausgleichung

Im Falle von Überparametrisierung weist die Koeffizientenmatrix **A** der Verbesserungsgleichungen

$$v = A\hat{x} - l, \quad \text{Gewichtsmatrix} = P \quad (5.1-1)$$

keinen vollen Spaltenrang u auf, sondern es ist $\text{rg}(A) = q$, so dass ein Rangdefekt $d = u - q$ auftritt. Dann ist auch $\text{rg}(A^T P A) = \text{rg}(N) = q$. Zur Behebung des Defektes d kann man

– entweder a)

die d Zusatzbedingungen

$$G^T \hat{x} = o \quad (5.1-2)$$

eingeführen, wie sie aus $x^T x = \min$ (5.1–3) folgen, vgl. 6.1,

– oder b)

die d zusätzlichen Fehlergleichungen

$$\bar{v} = G^T \hat{x} \quad (5.1-4)$$

noch hinzugeben,

wodurch die Aufgabe eindeutig lösbar wird, vgl. Pelzer (1974). Das System der ausgeglichenen Grösse verbleibt («verschmierungsfrei»), solange gilt:

$$AG = 0, \quad \text{oder} \quad NG = 0 \quad (5.1-5)$$

Lösungen von singulären Problemen der Art a) und b) gab es früher schon: zu a): Hansen (1867) führt bei Stationsausgleichungen mit Richtungsunbekannten $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_s$ die Zusatz-Bedingung (Restriktion) ein:

$$\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_s = 0.$$

Dies führt, wie Hansen (1839) gezeigt hat, zu den Normalgleichungen (mit den Korrelaten k):

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G} \mathbf{k} &= \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (5.1-6)$$

Bei der numerischen Auflösung bzw. Inversion muss man wegen $\det(\mathbf{N}) = 0$ die Reihenfolge der Unbekannten verändern, indem die k vor die letzten d der Parameter x zu stellen sind; eine Erkenntnis, die man Helmert (1907) verdankt. Aus der Inversion von (5.1-6) erhält man auch die Pseudoinverse \mathbf{N}^+ ; zu b): Thiele (1903) hat bei seinen singulären Systemen bereits mit den d Zusatz-(oder Pseudo-)Beobachtungsgleichungen $\bar{\mathbf{v}}$ gearbeitet. Seine Aussage, diese müssten jedoch so gewählt werden, dass das Innere der Ausgleichung nicht verändert wird, trifft genau die Bedingungen (5.1-5). Stellt man dann aus (5.1-1) und (5.1-4) das Gesamtnormalgleichungssystem auf, so erhält man

$$(\mathbf{N} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (5.1-7)$$

dessen Inversion jedoch nicht die Pseudoinverse liefert:

$$(\mathbf{N} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} = \mathbf{N}_0^{-1} \neq \mathbf{N}^+$$

Will man von \mathbf{N}_0^{-1} auf \mathbf{N}^+ übergehen, so gilt, nach Koch (1980):

$$\mathbf{N}^+ = \mathbf{N}_0^{-1} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$$

oder wenn man mit Pelzer (1974) die \mathbf{G} auf $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}$ normiert:

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{N} + \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} - \mathbf{G} \mathbf{G}^T.$$

5.2 Zur «inneren» Fehlertheorie

Die innere Fehlertheorie, geschaffen von Prof. Meissl (1962), benutzt die Pseudoinverse, deren Spur minimal ist, als Träger der Genauigkeitsinformation. Doch ist die Berechnung der inneren Genauigkeit nicht notwendig an die Berechnung des Lösungsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ der freien Ausgleichung gebunden, vgl. Wolf (1981).

Dividiert man die Spur von \mathbf{N}^+ durch die Anzahl u der unbekannt Parameter, so erhält man in

$$\bar{\sigma}_u^2 = \text{Sp}(\mathbf{N}^+)/u \quad (5.2-1)$$

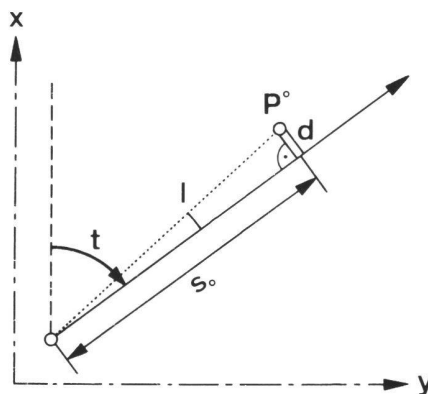
ein Kriterium für die Güte eines ausgeglichenen Systems. Dagegen ist die

Meinung über die praktische Bedeutung der Einzelwerte für die inneren Parametervarianzen (und der inneren Fehlerellipsen) geteilt, vgl. Bossler (1972), Gotthardt (1975), Pelzer (1980), S. 290.

Weiteres zur Anwendung der freien Ausgleichung in 6.

5.3 Zwei Lösungsbeispiele für die freie Ausgleichung bei Konfigurationsdefekten

Um das Wesen der Überparametrisierung infolge von fehlenden Messungen, d.h. bei Konfigurationsdefekten, deutlich herauszustellen, seien nachstehend die Lösungen für 2 einfache Beispiele angegeben.



a) Vorwärtseinschneiden mit nur 1 Zielstrahl ($d = 2 - 1 = 1$)

Gemessen: der Richtungswinkel t
Fehlergleichung (mit dem Gewicht 1):

$$\mathbf{v} = -\frac{\sin t}{s_0} \delta \hat{x} + \frac{\cos t}{s_0} \delta \hat{y} - l = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - l$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{N}) &= \det(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = \\ &= \frac{1}{s_0^2} \begin{bmatrix} \sin^2 t & -\sin t \cos t \\ -\sin t \cos t & \cos^2 t \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Daher: Pseudoinverse

$$\mathbf{N}^+ = \begin{bmatrix} \sin^2 t & -\sin t \cos t \\ -\sin t \cos t & \cos^2 t \end{bmatrix} s_0^2$$

$$\text{Lösung: } \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \delta \hat{x} \\ \delta \hat{y} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^+ \begin{bmatrix} -l \sin t \\ l \cos t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} s_0 l, \text{ so dass } \sqrt{\delta \hat{x}^2 + \delta \hat{y}^2} = s_0 l.$$

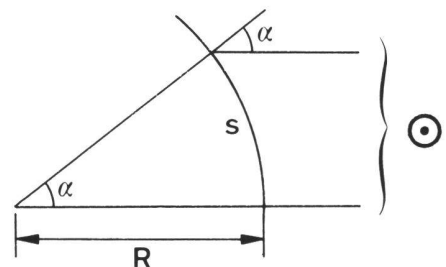
$$\text{Eigenschaft: } \sqrt{\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}}} = \sqrt{\delta \hat{x}^2 + \delta \hat{y}^2} = \min.$$

Geometrische Deutung: Man muss vom Näherungspunkt P_0 das Lot (mit der Länge $s_0 l$) auf den gemessenen Strahl fallen, um den ausgeglichenen Punkt zu

erhalten. (Wohin aber P_0 gelegt werden soll, bleibt unendlich-vieldeutig; also gibt es unendlich-viele Lösungen.)

Helmert (1907) bereits formulierte es so: Bei «unvollständigen Bestimmungen» kann man die Unbekannten nicht alle getrennt voneinander bestimmen, sondern nur Aggregate von ihnen (hier: $\delta \hat{y} / \delta \hat{x} = \tan t$, was von unendlich vielen Punktlagen P_0 erfüllt wird).

b) Das Eratosthenes-Problem ohne Kamel-Karawanen ($d = 2 - 1 = 1$)



Gemessen: der Zentriwinkel α .
Beobachtungsgleichung: $R \alpha = s$, oder $\ln R + \ln \alpha = \ln s$, (mit $R = \text{Erdradius}$, $s = \text{Bogenlänge des Kreissektors}$).
Fehlergleichung:

$$\mathbf{v}_{\ln \alpha} = \ln \hat{s} - \ln \hat{R} - \ln \alpha, \quad \mathbf{P} = 1$$

oder

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - l, \text{ mit } \mathbf{A} = [1, -1], \\ \hat{\mathbf{x}} = [\ln \hat{s}, \ln \hat{R}]^T, l = \ln \alpha$$

so dass

$$\det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\text{Daher: Pseudoinverse } \mathbf{N}^+ = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \ln \hat{s} \\ \ln \hat{R} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^+ \begin{bmatrix} \ln \alpha \\ -\ln \alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \ln \alpha \\ -\frac{1}{2} \ln \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \sqrt{\alpha} \\ \ln (1/\sqrt{\alpha}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3-1)$$

so dass $\hat{s} = \sqrt{\alpha}$, $\hat{R} = 1/\sqrt{\alpha}$.

Probe: Die Relation $\hat{R} \hat{\alpha} = \hat{s}$ wird erfüllt.

Eigenschaft:

$$\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}} = \ln^2 s + \ln^2 R = \min \quad (5.3-2)$$

Helmert (1907): Es kann in Wirklichkeit nur ein Aggregat der Unbekannten bestimmt werden, hier $\hat{s}/\hat{R} = \alpha$. Die Lösung (5.3-1) existiert nur, wenn Gl. (5.3-2) als Bedingung gefordert ist, die nur algebraisch-formalen Charakter be-

sitzt und mit der Geometrie des Erdbestimmungsproblems nichts zu tun hat. (Ausserdem müsste bei der Logarithmierung genau über die Einheiten entschieden werden, in denen \hat{s} und \hat{R} im Vergleich zu α auszudrücken sind.)

6. Koordinaten-Transformationen auf der Grundlage von Netzausgleichungen

6.1 Helmerts Ähnlichkeits-Transformation (1893)

Sie wurde von Helmert in der Form einer «Zwei-Stufen-Ausgleichung» durchgeführt:

1. *Stufe*: Nicht-singuläre Ausgleichung des betr. geodätischen Netzes, entweder nach bedingten oder nach vermittelnden Beobachtungen. Aus einer Koordinatenberechnung (mit vorgegebenen Werten für die Lagerung, den Massstab und die Orientierung) ergeben sich die Koordinaten $[\bar{x}, \bar{y}] = \bar{x}^T$ mit ihren Kovarianzen $\mathbf{Q}_{\bar{x}}$.

2. *Stufe*: Herstellung einer mittleren Lagerung bzw. Orientierung und eines mittleren Massstabes durch Vergleich mit den vorgegebenen «Fremd-Koordinaten» x^0, y^0 . Hieraus ergeben sich die endgültigen Koordinaten \hat{x}, \hat{y} . Der Vorgang wird als «Anfelderung» der (\bar{x}, \bar{y}) auf die (x^0, y^0) bezeichnet.

Dabei wird in der «2. Stufe» zum Übergang der \bar{x}, \bar{y} auf die \hat{x}, \hat{y} eine Ähnlichkeits-Transformation (= lineare konforme Abbildung) gemäss

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\hat{\mathbf{t}} \quad (6.1-1)$$

benutzt. Hierin sind:

$$\hat{\mathbf{x}} = [(\hat{x} - x^0)_1, (\hat{y} - y^0)_1, (\hat{x} - x^0)_2, (\hat{y} - y^0)_2, \dots]^T$$

$$\bar{\mathbf{x}} = [(\bar{x} - x^0)_1, (\bar{y} - y^0)_1, (\bar{x} - x^0)_2, (\bar{y} - y^0)_2, \dots]^T$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{G} genügt den Cauchy-Riemannschen Bedingungen:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, 0, -\bar{y}, \bar{x} \\ 0, 1, \bar{x}, \bar{y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.1-2)$$

und in $\hat{\mathbf{t}}$ sind die 4 äusseren Transformationselemente (= «Datumsparameter») untergebracht:

$$\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_1, \hat{t}_2, \hat{t}_3, \hat{t}_4]^T \quad (6.1-3)$$

deren geometrische Bedeutung durch

$$\hat{t}_1 = \Delta x_0, \hat{t}_2 = \Delta y_0, \arctan(\hat{t}_3/\hat{t}_4) = \alpha_0,$$

$$\sqrt{\hat{t}_3^2 + \hat{t}_4^2} = k_0$$

definiert ist, wobei $\Delta x_0, \Delta y_0$ die Verschiebungsparameter, α_0 der Verdrehungswinkel und k_0 der Massstabparameter ist. Der Übergang von α_0 und k_0 auf t_3 und t_4 stellt eine einfache Form

des «Parameter-Austausches» dar, vgl. 2.1, so dass $\hat{\mathbf{x}}$ nach (6.1-1) linear in den $\hat{\mathbf{t}}$ ist (nicht aber bzgl. α_0).

Bei Helmert treten indessen nicht alle n Netzpunkte als Vergleichs- oder Stützpunkte auf, sondern nur \mathbf{v} von ihnen ($\mathbf{v} < n$). Formal lässt sich das so ausdrücken, dass man den $n \times 1$ Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ mit der Auswahl-Matrix \mathbf{R} multipliziert, wobei

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^T = \text{diag}[1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots] = \mathbf{R}\mathbf{R}$$

so dass

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_v, 0, 0, \dots]^T \quad (6.1-4)$$

In die Zielfunktion \mathbf{Q} werden dann nur die $\bar{\mathbf{x}}$ einbezogen, indem

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}_{\bar{x}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{R} \mathbf{Q}_{\bar{x}}^{-1} \mathbf{R} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} = \min, \quad (6.1-5)$$

mit $\tilde{\mathbf{Q}}^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{Q}_{\bar{x}}^{-1} \mathbf{R}$

(bei Helmert ist $\mathbf{Q}_{\bar{x}} = \mathbf{I}$). (6.1-1) als Fehlergleichungen aufgefasst, liefert mit (6.1-5) die Normalgleichungen

$$\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{G} \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \text{ so dass}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = -(\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \quad (6.1-6)$$

woraus durch Einsetzen in (6.1-1):

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}) \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{S} \bar{\mathbf{x}} \quad (6.1-7)$$

$$\text{womit } \text{cov}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{S} \text{cov}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{S}^T \quad (6.1-8)$$

$$\text{Ausserdem ergibt sich } \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (6.1-9)$$

(6.1-7) bezeichnet die \mathbf{S} -(similarity-) Transformation, während (6.1-9) unter dem Namen «Helmert-Bedingungen» bekannt geworden ist.

Helmert hat u. a. das Verfahren auch in dem Sinne benützt, dass die x^0, y^0 durch die astronomischen Koordinaten bestimmte Punktlagen waren, so dass die $(\hat{x} - x^0), (\hat{y} - y^0)$ den Lotabweichungen entsprachen. Mit (6.1-5) wurde dann eine solche «Datumsbestimmung» herbeigeführt, welche die Lotabweichungsquadratsumme zum Minimum machte. Neuerdings wird die Bestimmung der äusseren (oder Datums-)Elemente $\hat{\mathbf{t}}$ (und die sich darauf gründende Bestimmung von $\hat{\mathbf{x}}$ nach [6.1-7]) als Lösung des «Designs nullter Ordnung» bezeichnet, vgl. Grafarend u. a. (1979).

6.2 Mittermayers freie Netzausgleichung

Sie ist eine völlig neue Form der geodätischen Netzausgleichung, indem (in Anlehnung an Prof. Bjerhammars Theorie der verallgemeinerten Inversen) alle Punkte eines geodätischen Netzes variabel gehalten werden, so dass ein singuläres Gleichungssystem auftritt. Zu

dessen Lösung werden nach Mittermayer (1972) ausser den (auf alle n Punkte sich beziehenden) Fehlergleichungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}, \text{ mit } \mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0 \quad (6.2-1)$$

noch die Helmert-Bedingungen (6.1-9) mit $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$ aufgestellt:

$$\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (6.2-2)$$

wobei $\text{rg}(\mathbf{A}) = q < u$. Die Ausgleichung wird so durchgeführt, dass neben $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$ auch $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \min$ gilt, was nach 6.1 zu (6.2-2) geführt hat. Daraus folgt dann wieder das Normalgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}, \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T, \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.2-3)$$

Damit die \mathbf{v} invariant gegenüber allen $\hat{\mathbf{t}}$ sich ergeben, muss gelten:

$\mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{G} = \mathbf{0}$, was für alle Ähnlichkeitstransformationen (nicht für die Affin-Transformation) zutrifft. In (6.2-3) wird $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ und

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \text{ sowie } \text{cov}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \quad (6.2-4)$$

worin $\hat{\sigma}_0^2$ = der Schätzwert für die Varianz der Gewichtseinheit ist:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / (n_L - q)$$

mit n_L = Anzahl der Messungen L . Gl. (6.2-4) stellt wieder die Lösung des Datumsproblems nullter Ordnung dar. Es leuchtet ein, dass eine solche Lösung des Optimierungsproblems nicht eindeutig ist, denn wie (6.2-1) zeigt, ist der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ eine Folge der gewählten Näherungskordinaten. Diese können aber vollkommen willkürlich angenommen werden, so dass es unendlich viele Lösungen des Datumsproblems gibt – je nach Wahl der x^0 . (Anders dagegen, wenn die x^0 eindeutige astronomische Koordinaten sind oder eindeutige Koordinaten aus einem übergeordneten System.)

6.3 Weiterführungen der Koordinaten-Transformationen

Hier sind vor allem die Arbeiten der Zürcher Schule zu nennen:

a) Die allgemeine lineare Transformation nach Prof. Conzett

Sie besteht in einer affinen Transformation des auszugleichenden, variablen Netzes, beschrieben durch 6 Parameter $\hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_6$. Soll zur Ähnlichkeitstransformation übergegangen werden, muss dies noch durch 2 Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten $\hat{\mathbf{t}}$ (= «Restriktionsgleichungen») ausge-

drückt werden. Anders als bei der Helmert-Transformation werden hier sowohl die \bar{x} wie auch die x^0 , vgl. 6.1, als Zufallsvariable (= korrelierte Beobachtungen) behandelt, womit sich eine Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten ergibt – gegebenenfalls noch mit den o.g. Restriktionen. Die Helmert-Transformation war dann ein spezieller Fall davon. Numerisch wurde über die quasivermittelnden Beobachtungen gerechnet, vgl. Conzett (1975).

b) Die «Allgemeine Vermittelnde Netzgleichung» nach Prof. Matthias (1981)

Hierbei wurden als Ausgangsrelationen gewählt:

- a) die «Konfigurationsgleichungen» (= Fehlergleichungen für die gemessenen Winkel und Strecken, Gewicht: P_1)
- b) die «Datumsgleichungen» (= Fehlergleichungen für die gegebenen Koordinaten als korrelierte Beobachtungen, wie von Jordan (1882) angegeben, und durch den Einfluss der Datumparameter \hat{t} noch ergänzt, Gewicht: P_k).

Das Gesamtnormalgleichungssystem (für die Nebenunbekannten \hat{s} , die Koordinatenunbekannten \hat{x} und die Datumunbekannten \hat{t}) zerfällt im Falle einer Ähnlichkeitstransformation (nicht jedoch bei einer Affintransformation) automatisch in 2 Teile, so dass dann nach der Helmerischen «Zweistufen-Methode», vgl. 6.1, gerechnet werden kann: 1. Berechnung der \hat{s} und \hat{x} (bei festgehaltenen äusseren Parametern \hat{t}), 2. Bestimmung der \hat{t} (bei festgehaltener Netzgestalt). Sonderfälle ergeben sich a) für $\hat{t} = \mathbf{0}$, b) für $P_k = \mathbf{0}$, c) für $P_k = \infty I$.

c) Dreidimensionale Helmert-Anfelderungen

Auf Grund der bekannten Relationen aus der analytischen Geometrie des 3D-cartesischen Raumes, vgl. z.B. Laggally (1928), wurden dreidimensionale Anfelderungen im Helmerischen Sinne entwickelt:

Rinner (1954) für die Einpassung photogrammetrischer Modelle und Modellstreifen,

Wolf (1963) mit Übergang zu dreidimensionalen ellipsoidisch-geographischen Koordinaten für Landesvermessungszwecke,

Rinner (1969): 3D-Anfelderung im Zusammenhang mit einer freien Ausgleichung des Netzes,

Schmid (1980): 3D-Anfelderung unter Entwicklung von 2 Grundtypen für die Lösung:

- a) $\mathbf{v}^T \mathbf{Pv} = \min$ und $\mathbf{x}^T \mathbf{P_x x} = \min$ (= freie Ausgleichung)
- b) $\mathbf{v}^T \mathbf{Pv} + \mathbf{x}^T \mathbf{P_x x} = \min$ (= gezwängte Ausgleichung),

wobei beide Typen (und zusätzlich einige Sonderfälle davon) aus einem allgemein aufgestellten Normalgleichungssystem hervorgehen.

Köchle (1982): Unter Verwendung des äusseren Vektorproduktes werden die Formeln der 3D-Anfelderung und der hiernach sich ergebenden Helmert-Transformation entwickelt, und zwar unter Bezugnahme auf endliche Drehwinkel, was durch Benützung eines Iterationsverfahrens zu erreichen ist.

7. Das Neueste zum Gauss-Helmert-Modell

7.1 Die klassische Konzeption

Das Gauss-Helmert-Modell drückt sich durch die Bedingungsgleichungen mit Unbekannten

$$\mathbf{Bv} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (7.1-1)$$

mit $\mathbf{w} = \mathbf{B}l$, $D(l) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$

aus. Mit $\mathbf{v}^T \mathbf{Pv} = \min$ erhält man die folgenden Normalgleichungen, worin \mathbf{k} der Vektor der Korrelaten ist.

$$\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{k} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (7.1-2)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

deren Auflösung \mathbf{k} und $\hat{\mathbf{x}}$ liefert, woraus

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{k}$$

Eliminiert man \mathbf{k} aus (7.1-2), so erhält man

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T(\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Diese reduzierten Normalgleichungen kann man sich auch entstanden denken aus den fingierten Fehlergleichungen

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}, \quad \text{mit dem Gewicht} \quad (7.1-3)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = (\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)^{-1}$$

(= «quasivermittelnde Beobachtungen»). Als Sonderfälle ergeben sich aus dem Gauss-Helmert-Modell (7.1-1):

- a) mit $\mathbf{B} = -\mathbf{I}$ die «vermittelnden Beobachtungen» (= Gauss-Markov-Modell),
- b) mit $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ die «bedingten Beobachtungen». Im «gemischten Modell», vgl. Koch (1980), nämlich

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}(-\mathbf{v}) = (-\mathbf{w}) \quad (7.1-4)$$

spielen die $(-\mathbf{w})$ die Rolle von Beobachtungen (= \mathbf{y}), mit $D(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathbf{Z}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}^T = \sigma_0^2 \bar{\mathbf{P}}$ (wie bei den quasivermittelnden Beobachtungen in (7.1-3), da $\mathbf{Z} = -\mathbf{B}$).

Dabei wird – als neugeschaffener Begriff – vielfach der des Zufalls-Parameters benützt, so dass im neueren Schrifttum die Verbesserungen \mathbf{v} bei vermittelnden Beobachtungen mit $\hat{\mathbf{e}}$ (= Residuen) und bei bedingten Beob-

achtungen mit $-\hat{\mathbf{y}}$ (= Zufalls-Parameter) bezeichnet werden, womit sich die ausgeglichenen Beobachtungen

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathbf{v}$$

durch

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{e}}$$

bei vermittelnden Beobachtungen

und durch

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{y}}$$

bei bedingten Beobachtungen

darstellen lassen, so dass – wie von Prof. Koch (1980) gezeigt – die $\hat{\mathbf{y}}$ auch als (negative) Residuen verstanden werden können.

7.2 Die moderne Auffassung

Hierbei wird von den vermittelnden Beobachtungen (= Gauss-Markov-Modell) mit den Fehlergleichungen

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{l} \quad (7.2-1)$$

ausgegangen. Dann werden nach dem Vorgang von Schaffrin (1983) beide Seiten von (7.2-1) mit einer passenden Matrix \mathbf{R} multipliziert,

$$\text{so dass} \quad \mathbf{Rv} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{Rl}, \quad (7.2-2)$$

woraus mit $\mathbf{Rl} = \bar{\mathbf{w}}$ und $\mathbf{R}\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{C}$

eine Gauss-Helmert-Form wie in (7.1-1) erhalten wird, nämlich

$$\mathbf{Rv} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (7.2-3)$$

wobei hier jedoch die Zerlegung (7.2-2) vorgeschrieben ist. Dem ist, im Vergleich zu Gauss-Helmert, die folgende Situation gegenüberzustellen:

a) Entweder man kennt die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ in (7.2-1); dann ist der Rechenweg über $\mathbf{C} = -\mathbf{R}\bar{\mathbf{A}}$ und über die «Bedingungsgleichungen mit Unbekannten» (7.2-3) gemäss (7.1-2) in jedem Fall ein Umweg, um $\hat{\mathbf{x}}_1$ zu erhalten (das viel kürzer aus (7.2-1), d.h. nach vermittelnden Beobachtungen, zu gewinnen ist).

b) Oder man kennt \mathbf{C} in (7.2-3); dann ist die Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen (7.2-1) durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{C} + \bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad (7.2-4)$$

nach den Elementen der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ und Weiterrechnung nach (7.2-1) ein – sicherlich noch grösserer – Umweg zur Lösung des Problems der «bedingten Beobachtungen mit Unbekannten», wofür der einfache Lösungsweg (7.1-2) zur Verfügung steht, der zugleich den Allgemeinfall (s. o.) beschreibt.

8. Schluss

Wie es im Strom der wissenschaftshistorischen Entwicklung nicht anders sein kann, liess sich auch im Fall der Ausgleichsrechnung zeigen, dass – bei entsprechender Aufbereitung – das alte, klassische Ideengut in eine enge Verbindung zu den bedeutenden Neuschöpfungen unserer Tage gebracht werden kann. So fügen sich die Dinge zu einer grossen Vielheit zusammen; ein Reichtum im Ideellen, dessen wir immer eingedenk bleiben sollten.

Literatur

- Andrae, C.G.: Den danske Gradmaaling, Bd. I. Kopenhagen 1867
- Beckenbach, J.: Ein Beitrag zur Frage: Ist die Fehlertheorie der kleinsten Quadrate die von der Natur geforderte? Zschr. Math. u. Phys. 64 (1916), S. 168ff.
- Bessel, F.W./ (Baeyer): Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit russischen Dreiecksketten. Dümmlers Verlag, Bonn 1838
- Bjerhammar, A.: Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Amsterdam/London/New York 1973
- Bošćović, R.G.: De litteraria expeditione per pontificium diditonem ad dimitendos duos meridiani gradus. Rom/Paris 1770
- Bossler, J.D.: A Note on the Meaning of Generalized Inverse Solutions in Geodesy. Journ. Geophys. Res., vol. 78, S. 2616f. 1973
- Brückner, R.: Das stochastische Modell einer Ausgleichung nach dem Primärfehlerkonzept. ZfV 1981, S. 246ff.
- Carosio, A.: Robuste Ausgleichung. VPK 1979, S. 293ff.
- Cholesky-Benoit: Note sur une méthode de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieure à celui des inconnues. Bull. Géodés. 1924, S. 67ff.
- Conzett, R.: Über lineare Transformationen von Triangulationsnetzen. VPK 1975, S. 265ff.
- Fisher, R.A. (1912): vgl. Linnik, Z.W.: Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. Berlin 1961, S. 79
- Fuchs, H.: Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Verbesserungs-Absolutsumme. DGK-Arb.-Krs. f. theor. Geodäsie, 4. Sitzg., vgl. ZfV 1980, S. 291
- Gauss, C.F. (1794): vgl. Gauss' Werke, Bd. VIII. Göttingen 1900, S. 138f.
- Gauss, C.F.: Theoria motus corporum caelestium in sectionibus conicis solem ambientium, I. Teil. Hamburg 1809
- Gauss, C.F.: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, I. Teil. Göttingen 1821
- Gerling, C.L.: Die Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate. Hamburg/Gotha 1843
- Gotthardt, E.: Über die Ergebnisse freier Netzausgleichungen und ihre Deutung. VPK (Prof. Kobold – Festschrift) 1975, S. 246ff.
- Grafarend, E./Heister, H./Kelm, R./Kropff, H./Schaffrin, B.: Optimierung Geodätischer Messoperationen. Karlsruhe 1979
- Hansen, P.A.: Von der Methode der kleinsten Quadrate. Abh. math.-phys. Cl., Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., VIII. Leipzig 1867
- Hansen, P.A.: Auflösung einer allgemeinen Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Astron. Nachr., Bd. 16, Nr. 361. 1839
- Heindl, G./Reinhart, E.: Eine allgemeine Methode zur Berechnung von Minimax-Fehlern, Teil I. ZfV 1976, S. 126ff.
- Helmert, F.R.: Den danske Gradmaaling, die dänische Gradmessung. Vierteljahrsschr. d. Astron. Ges., 1877, S. 184ff.
- Helmert, F.R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 1. Auflage Leipzig 1872, 2. Auflage Leipzig 1907, 3. Auflage Leipzig/Berlin 1924
- Helmert, F.R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I. Teil. Leipzig 1880
- Helmert, F.R.: Lotabweichungen, Heft I. Berlin 1886
- Helmert, F.R.: Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite. Berlin 1893
- Helmert, F.R. (zusammen mit A. Börsch): Lotabweichungen, Heft III. Berlin 1906
- Hermanowski, A.: Strenge Methode zur Ausgleichung und Berechnung von vertikalen Änderungen der Erdkruste auf Grund von Wiederholungsnivellements hoher Präzision (polnisch). Zes. Nauk. Politechn. Warsz. No. 70, Geodez. No. 8. Warschau 1963, S. 1ff.
- Jordan, W.: Höhere Geodäsie und Topographie des Deutschen Reiches. In: Jordan/Steppes: Das deutsche Vermessungswesen, I. Band, Stuttgart 1882, S. 127ff.
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Bonn 1980
- Koch, K.R./Pope, A. J.: Least Squares Adjustment with zero variances. ZfV 1969, S. 390ff.
- Köchle, R.: Die räumliche Helmertransformation in algebraischer Darstellung. VPK 1982, S. 292ff.
- Lagally, M.: Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig 1928
- Laplace, S.: Traité de mécanique céleste, tome 2. Paris 1799
- Matthias, H.J.: Allgemeine vermittelnde Netzausgleichung. IGP-Mitteilg. Nr. 30. Zürich 1981
- Meissl, P.: Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. Öst. ZfV 1962, S. 159f.
- Mittermayer, E.: Zur Ausgleichung freier Netze. ZfV 1972, S. 481ff.
- Moritz, H.: Statistische Methoden in der gravimetrischen Geodäsie. ZfV 1963, S. 409f.
- Moritz, H.: The Geometry of Least Squares. Veröf. Finn. Geod. Inst. No. 89. Helsinki 1979, S. 134ff.
- Pelzer, H.: Zur Behandlung singularer Ausgleichungsaufgaben. ZfV 1974, S. 181ff.
- Pelzer, H.: Beurteilung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit geodätischer Netze. In: «Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung». Stuttgart 1980, S. 273ff.
- Rinner, K.: Über räumliche Drehungen. DGK, Reihe A, Nr. 25, München 1957, S. 27f.
- Rinner, K.: Über die Ausgleichung von Prüfnetzen. Nachr. Kart.- u. Vermw. (Prof. Gigas – Festschr.) Frankfurt a. M. 1969, S. 115ff.
- Schaffrin, B.: Varianz-Kovarianz-Komponentenschätzung bei der Ausgleichung heterogener Wiederholungsmessungen. DGK, C 277. München 1983.
- Schildheuer, E.: Analyse und Ausgleichung von Schwingungsbeobachtungen. Diss. Bonn 1960
- Schmid, H.H.: Ein allgemeiner Ausgleichsalgorithmus zur Auswertung von hybriden Messanordnungen. Bul. 1965, S. 93ff.
- Schmid, H.H.: Vom freien zum gelagerten Netz. IGP-Mittlg. Nr. 29. Zürich 1980
- v. Schmidt: Die Kgl. Preussische Landestriangulation, Hauptdreiecke. 7. Teil, Berlin 1895; 9. Teil, Berlin 1897
- Schreiber, O.: Die Kgl. Preussische Landestriangulation, Hauptdreiecke. 3. Teil, Berlin 1876, S. 111
- Schwarz, K.P.: Least Squares Collocation for Large Systems. Boll. di Geod. e Sc. Aff. 1976, S. 309ff.
- Schweiz: «Das schweizerische Dreiecksnetz», 2. Band: Die Netzausgleichung und die Anschlussnetze der Sternwarten. Zürich 1884
- Seidel, L.: Über die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte solcher Unbekannten, zwischen welchen Bedingungsgleichungen bestehen. Astron. Nachr. Bd. 84, Nr. 2005, Sp. 193. 1874
- Şerbetçi, M.: Bestimmung und Berücksichtigung von algebraischen Korrelationen bei Gravimetermessungen. Diss. Bonn 1968
- Sünkel, H.: Local Representation of the Gravity Field. Österr. Beitr. z. 17. Gen.-Vers. ZUGG. Wien 1981, S. 200ff.
- Svensson, L.: Inversion-Free Bjerhammar Predictors in Geodesy, VIII. Hotine Sympos. Como 1981, Stockholm 1981
- Tewinkel, G.C.: Pantograph Adjustment. Washington D. C. 1959
- Thiele, T.N.: Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés. Copenhague 1880
- Thiele, T.N.: Theory of observations. London 1903
- Tienstra, J.M.: An Extension of the Technique of the Methods of Least Squares to Correlated Observations. Bull. Géodés. 1947, S. 301ff.
- Tienstra, J.M.: The Foundation of the Calculus of Observations and the Method of Least Squares. Bull. Géodés. 1948, S. 289ff.
- Tienstra, J.M.: Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations. Amsterdam 1956
- Tschebyscheff (1853): vgl. Behnke, H./Tietz, H.: Mathematik II, Frankfurt a. M. 1966, S. 9; sowie: Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart 1961, S. 47ff.
- Wolf, H.: Die Lotabweichungsausgleichung für das zentraleuropäische Netz. Veröf. Inst. f. Erdmess., Heft 6. Bamberg 1959, S. 21ff.
- Wolf, H.: Geometric Connection and Reorientation of Threedimensional Triangulation Nets. Bull. Géodés. 1963, S. 165ff.
- Wolf, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968
- Wolf, H.: Über verallgemeinerte Kollokation. ZfV 1974, S. 475ff.
- Wolf, H.: Zur Grundlegung der Kollokationsmethode. ZfV 1977, S. 237
- Wolf, H.: Latente Parameter. ZfV 1981, S. 517ff.
- Wolf, H.: Innere Genauigkeit und Gausscher Algorithmus. ZfV 1981, S. 217
- Zech, J.: Zur Methode der kleinsten Quadrate. Tübingen 1857.

Adresse des Verfassers:
Helmut Wolf, Dr.-Ing., em. o. Professor
an der Universität Bonn
Nuss-Allee 17, D-5300 Bonn 1