

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 80 (1982)

**Heft:** 9

**Artikel:** Die räumliche Helmerttransformation in algebraischer Darstellung

**Autor:** Köchle, R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-231178>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

richtig, auch diese mit einem Lohn zu bewerten. Wir unterstellten im Modell hierfür Fr. 26 000.–. Unter diesen Annahmen ergeben sich Nutzen-Kosten-Relationen, wie sie in Tabelle 4 aufgeführt sind.

Varianten	Nutzen/Kosten
Basisvariante	15,8%
Variante mit Subventionskürzung	1,9%
Wachstumsvariante	16,7%

Tab. 4 Deckungsgrad der volkswirtschaftlichen Kosten der Meliorationssubventionen durch Mehreinkommen der subventionierten Faktoren

In der Basisvariante sind also 15,8% der volkswirtschaftlichen Kosten der Meliorationssubventionen durch Mehreinkommen der subventionierten Faktoren gedeckt, d. h. dieser Anteil kann als Einkommenstransfer interpretiert werden. Der Wert der Wachstumsvariante liegt mit 16,7% nur unwesentlich höher. Dies ist einerseits auf die eng vorgegebene Beschränkung des Wirtschaftswachstums und andererseits auf die Annahme konstanter Opportunitätskosten, die unabhängig von der jeweiligen Wirtschaftslage sind, zurückzuführen. Ein Vergleich mit dem bescheidenen Wert von 1,9% bei der Variante mit Subventionskürzung zeigt, wie empfindlich das Nutzen-Kosten-Verhältnis auf die Subventionshöhe reagiert. Es stellt sich nun die Frage, wie die Grössenordnung dieser Koeffizienten zu beurteilen ist. Als erstes ist zu bedenken, dass Gesamtmeliorationen mit Güterzusam-

menlegungen, Wegebauten usw. Werke sind, die nur als kollektive Aktionen durchgeführt werden können. Nun ist aber der individuelle, einzelbetriebliche Nutzen offensichtlich nicht so gross, dass sich, bei voller Kostenfolge, die Gruppe der Betroffenen aus eigener Initiative dazu entschliessen kann, solche Werke durchzuführen. Damit entstehen aber auch jene «Nebennutzen» einer Melioration nicht, an denen die Nicht-Betroffenen, der Staat, die Öffentlichkeit interessiert sind. Als solche Nebennutzen können allgemein angeführt werden: Die bessere Erreichung anerkannter agrarpolitischer Ziele, wie z. B. die Existenzsicherung flächenabhängiger Familienbetriebe mit vergleichbarer Einkommenslage, die Erhaltung einer standortgerechten Produktion und eine kostengünstige Landschaftspflege. Ferner ist die bessere Erreichung gesamtschweizerischer und regionaler öffentlicher Zielsetzungen zu erwähnen, z. B. die Ausscheidung und Erhaltung von Naturschutzgebieten, die Erleichterung der Regionalplanung durch Entflechtung, die Erschliessung als Erholungsraum usw. Will die Öffentlichkeit die erwähnten Zielsetzungen, die grösstenteils den Charakter öffentlicher Güter aufweisen, über eine Gesamtmelioration erreichen, hat sie sich durch Kostenübernahme an dem Werk zu beteiligen. Dies hat in dem Ausmass zu geschehen, dass sich die direkt Betroffenen aufgrund von individuellen Nutzen-Kosten-Überlegungen dazu entschliessen, Meliorationen zuzustimmen. Wie unsere Überlegungen gezeigt ha-

ben, kann das bei der heute üblichen Kostenteilung durchaus der Fall sein. Es besteht u. E. hierfür genügend wirtschaftlicher Anreiz.

Eine schlüssige Nutzen-Kosten-Analyse für die verbleibenden rund 84% der Subventionskosten kann nicht erfolgen, weil die Mehrzahl der angestrebten Nutzen nicht-monetärer Art und nicht quantifizierbar sind. Wir gelangen aber immerhin zu einer indirekten Bewertung, indem wir sagen können, dass ihnen bei ausgeglichener Bilanz mindestens ein Wert im Umfang von ca. 84% der volkswirtschaftlichen Kosten der Meliorationssubventionen zukommen muss.

Ob den angestrebten öffentlichen Zielsetzungen tatsächlich dieser Wert zugemessen wird, ist subjektiv und letztlich ein politischer Entscheid, der nicht Gegenstand unserer Arbeit ist. Zum Schluss sei erwähnt, dass gegen unseren Ansatz, unsere Vorgehensweise, Kritik ins Feld geführt werden kann. Unser Projekt stellt aber immerhin den ersten Versuch dar, die regional- und volkswirtschaftlichen Konsequenzen eines so bedeutenden Werkes, wie es eine Gesamtmelioration darstellt, vor dessen Abschluss quantitativ zu erfassen bzw. abzuschätzen. Dieser methodische Versuch ist sicher noch verbesserungsfähig.

Adresse der Verfasser:  
Beat Looser, Dipl. Ing. agr. ETH,  
Bachtelstrasse 59, CH-8620 Wetzikon  
Dr. Peter Rieder, Prof. ETH, Meierwis 17,  
CH-8606 Greifensee

# Die räumliche Helmerttransformation in algebraischer Darstellung

R. Köchle

Durch rein algebraische Überlegungen, ohne von den Drehwinkeln explizit Gebrauch zu machen, gelangt man zu untenstehendem Formelsatz für die Transformationsparameter der räumlichen Helmerttransformation  $\bar{\mathbf{y}}_i = \mu \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_0$  eines Punkthaufens mit Koordinaten  $\mathbf{x}_i$  auf einen andern Punkthaufen mit Koordinaten  $\mathbf{y}_i$ .

Bei der Herleitung wird dem Operator  $(\times)$  des Vektorproduktes eine andere als die gewohnte Auslegung gegeben, wodurch der fugenlose Einbau des Vektorproduktes in den Matrixkalkül möglich wird.

$\Sigma (\mathbf{A} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)) \times (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_s) = \mathbf{0}$  für die Drehmatrix  $\mathbf{A}$   
pour la matrice de rotation  $\mathbf{A}$

$\mu = \frac{\Sigma (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_s)^T \mathbf{A} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)}{\Sigma (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)}$  für den Massstab  
pour le facteur d'échelle

$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_s - \mu \mathbf{A} \mathbf{x}_s$  für die Schiebung  
pour la translation

$(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s)$ : Koordinaten der Schwerpunkte)  
coordonnées des centres de gravité)

## 1. Ansatz und Aufstellen der Minimumbedingung

Wir gehen vom Bild zweier Haufen einander paarweise zugeordneter (= homologer) Punkte aus, die räumlich getrennt liegen und in ein kartesisches Koordinatensystem eingebettet seien. Die Ortsvektoren des ersten Haufens seien  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  und die des zweiten Haufens  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ . Gesucht ist eine Transformation

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \mu \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_0 \text{ mit } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (1.1)$$

die durch Schieben, Drehen und Ändern des Massstabs den ersten Haufen

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich  
Separata Nr. 37

Au travers de réflexions purement algébriques, sans explicitement faire usage des angles de rotation, on obtient le système d'équations ci-dessus pour les paramètres de la transformation de Helmert dans l'espace  $\bar{\mathbf{y}}_i = \mu \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_0$  d'un ensemble de points avec coordonnées  $\mathbf{x}_i$  sur un autre ensemble de points avec coordonnées  $\mathbf{y}_i$ . Au cours de l'établissement des formules, l'opérateur ( $\times$ ) du produit vectoriel est interprété différemment qu'à l'ordinaire, ce qui rend possible l'introduction du produit vectoriel dans le calcul matriciel.

möglichst gut dem zweiten Haufen annähert. Als Optimierungsprinzip fordert man, dass die Summe der Abstandsquadrate zwischen homologen Punkten des einen und des anderen Haufens minimal werde, was mit den Residuen  $\mathbf{v}_i$  in der Formelsprache lautet

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i = \mu \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_i \quad (1.2)$$

$$\phi = \sum \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = \text{Min.} \quad (1.3)$$

Eine Transformation der Art (1.1) wird als *Ähnlichkeitstransformation* und mit der Zusatzbedingung (1.3) als *Helmerttransformation* bezeichnet.

*Notation:*

$\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{e}}$  seien auf die Schwerpunkte der einzelnen Punkthaufen bezogene  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden künftig die Indizes an den Grössen  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{e}}, \mathbf{v}$  weggelassen; wo diese Symbole unter dem Summenzeichen erscheinen, muss man sie sich über ihre  $n$  Werte summiert denken.

Aus den  $3n + 6$  skalaren Gleichungen (1.1) und mit (1.2), (1.3) gilt es, 7 Transformationsparameter zu finden, nämlich die drei Komponenten von  $\mathbf{y}_0$ , den Massstabsfaktor  $\mu$  und 3 wesentliche Parameter für  $\mathbf{A}$ . Das Problem wurde in der Literatur schon oft behandelt, seine Schwierigkeit liegt in der Nichtlinearität der Orthogonalitätsbeziehungen  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ . Man hat in den frühen Ansätzen den in der Ausgleichsrechnung üblichen Weg der Linearisierung durch Anbringen von kleinen Verbesserungen an Näherungswerten dreier unbekannter Drehwinkel beschränkt (z.B. *Rinner* [1]) und auch den allgemeinen Fall beliebig korrelierter Punktkoordinaten miteinbezogen (*Wolf* [2], S. 455). Die genaue Lösung ist dann das Ergebnis einer Iteration. *M. Tienstra* [3], der mit anderen Parametern als den Drehwinkeln arbeitet, gelang es durch scharfsinnige mathematische Überlegungen, eine iterationsfreie Lösung für  $\mathbf{A}$  zu finden; er zeigt auch, dass sich die Lösung auf ein Eigenwertproblem reduzieren lässt und nicht unbedingt eindeutig zu sein braucht. In der vorliegenden Arbeit wollen wir ganz konventionell vorgehen, durchwegs in Matrixnotation arbeiten und sehen, wohin uns die Formeln führen.

Für einen stationären Wert von  $\phi$  (also auch für ein Minimum) folgt aus (1.3)

$$\frac{1}{2} d\phi = \sum \mathbf{v}^T d\mathbf{v} = \sum d\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

Das Bilden des Differentials  $d\mathbf{v}$  in (1.2) und Einsetzen in (1.4) führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{v}^T d\mathbf{v} &= \sum \mathbf{v}^T (d\mu \mathbf{A} \mathbf{x} + \mu d\mathbf{A} \mathbf{x} + d\mathbf{y}_0) \\ &= d\mu \sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mu \sum \mathbf{v}^T d\mathbf{A} \mathbf{x} + \\ &\quad (\sum \mathbf{v}^T) d\mathbf{y}_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

aus dem sich die unbekannten Parameter berechnen lassen.

## 2. Lösen der Minimumbedingung für die Schiebung und den Massstab

Der Ausdruck in (1.5) muss identisch verschwinden für beliebige zulässige Änderungen in  $\mu, \mathbf{A}$  und  $\mathbf{y}_0$ . Wir wollen daraus die Folgerungen ziehen.

*Das Glied mit  $d\mathbf{y}_0$ :*

Das skalare Produkt  $d\mathbf{y}_0^T \sum \mathbf{v}$  muss zu null werden für beliebige Vektoren  $d\mathbf{y}_0$ . Das kann nur geschehen, wenn

$$\sum \mathbf{v} = \sum \bar{\mathbf{y}} - \sum \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

gilt. Daraus folgt, wenn man die Koordinaten der Schwerpunkte mit

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{n} \sum \mathbf{x}, \mathbf{y}_s = \frac{1}{n} \sum \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}_s = \frac{1}{n} \sum \bar{\mathbf{y}} \quad (2.2)$$

einführt,

$$\bar{\mathbf{y}}_s = \mathbf{y}_s \quad (2.3)$$

Man kann diese bekannte Tatsache ausdrücken als

*Satz 1: Bei der Helmerttransformation wird der Schwerpunkt des beweglichen mit dem Schwerpunkt des festen Punkthaufens zusammengelegt.*

Durch Mitteln von (1.1) über alle Punkte und mit (2.3) ergibt sich für  $\mathbf{y}_0$  der Ausdruck

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_s - \mu \mathbf{A} \mathbf{x}_s \quad (2.4)$$

und (1.1) lässt sich in der Form

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_s + \mu \mathbf{A} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (2.5)$$

darstellen. Führt man die auf die Schwerpunkte bezogenen Koordinaten

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_s, \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_s, \\ \bar{\mathbf{e}} &= \bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_s = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_s \end{aligned} \quad (2.6)$$

ein, so vereinfacht sich (2.5) zur Gleichung

$$\bar{\mathbf{e}} = \mu \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} \quad (2.7)$$

die wir unsern weiteren Entwicklungen zu Grunde legen werden. Aus (1.2) folgt wegen (2.6) und (2.3) auch

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} = \mu \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{e}} \quad (2.8)$$

Das Glied mit  $d\mu$ :

Der Differentialausdruck (1.5) gilt für beliebig liegende Koordinatensysteme, also auch für eines mit dem Ursprung in  $\mathbf{x}_s$  und die darauf bezogenen Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$ . Damit das erste Glied in (1.5) für beliebiges  $d\mu$  verschwinde, muss gelten

$$\sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = 0 \text{ oder auch } \sum \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{e}} = 0 \quad (2.9)$$

der zweite Ausdruck wegen (2.7), weil  $\mu \neq 0$ . Mit (2.8) wird aus (2.9)

$$\sum \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{e}} = \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} - \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} = 0 \quad (2.10)$$

Weiter ergibt vormultiplizieren von (2.8) mit  $\mathbf{v}^T$ , aufsummieren und Berücksichtigung von (2.9)

$$\sum \mathbf{v}^T \mathbf{v} = - \sum \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{e}} = - \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} + \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} \quad (2.11)$$

Die Beziehungen (2.10) und (2.11) lassen sich zu

$$\sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} = \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} = \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} - \sum \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (2.12)$$

zusammenfassen.

Ersetzt man  $\mathbf{v}$  in der linken Gleichung von (2.9) durch die rechte Seite von (2.8) und berücksichtigt  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ , entsteht die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} &= \sum (\mu \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T - \bar{\mathbf{e}}^T) \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} \\ &= \mu \sum \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} - \sum \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} \\ &= \mu \sum \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}} - \sum \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} \\ &= \mu \sum \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}} - \frac{1}{\mu} \sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} = 0 \end{aligned}$$

Damit lassen sich zwei Ausdrücke für  $\mu$  anschreiben, den zweiten in Anlehnung an (2.12)

$$\mu = \frac{\sum \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}}{\sum \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}}} \quad (2.13)$$

$$\mu^2 = \frac{\sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}}}{\sum \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}}} = \frac{\sum \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} - \sum \mathbf{v}^T \mathbf{v}}{\sum \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}}} \quad (2.14)$$

Wir fassen (2.13) in Worte als

*Satz 2: Den Massstabsfaktor einer Helmerttransformation von  $\mathbf{x}$  auf  $\mathbf{y}$  findet man nach folgender Regel: Man bilde für den bereits gedrehten  $\mathbf{x}$ -Punkthaufen und auf die Schwerpunkte bezogene  $\mathbf{x}$ - und  $\mathbf{y}$ -Vektoren die Summe der Skalarprodukte zwischen homologen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  und dividiere durch die Summe der Längenquadrate von  $\mathbf{x}$ .*

Wie ersichtlich, muss man  $\mathbf{A}$  kennen, bevor man  $\mu$  berechnen kann. Allerdings erhält man bei kleinen Residuen  $\mathbf{v}$  schon eine sehr gute Näherung für  $\mu^2$ , wenn man nach (2.14) die durchschnittlichen Längenquadrate der auf die Schwerpunkte bezogenen Ortsvektoren beider Punkthaufen ins Verhältnis setzt.

## 3. Einschaltung:

### Der Operator der Vektormultiplikation (das Vektormal)

Bevor wir mit der Behandlung des Hauptproblems weiterfahren, wollen wir zeigen, wie sich das im Matrixkalkül

als Fremdkörper erscheinende Vektorprodukt durch eine Uminterpretierung des Malzeichens ohne Schwierigkeiten darin einbauen lässt und einige für das Weitere nützliche Rechenregeln angeben. Die tiefere Begründung dafür wird am Ende des Abschnittes hier kurz angedeutet, soll aber ausführlicher in einem spätern Artikel, zusammen mit einigen Beweisen und einem weiteren Anwendungsbeispiel, folgen.

Das *Vektormal* ist ein Operator, der auf die beiden links und rechts von ihm stehenden Vektoren (z.B.  $\mathbf{s} \times \mathbf{u}$ ) wirkt und sie nach den vertrauten Regeln miteinander zu einem Produkt verknüpft. Es ist bekannt (siehe z.B. Thompson [4], dass man im dreidimensionalen Vektorraum  $\mathbf{s} \times \mathbf{u}$  äquivalent als Matrixprodukt  $\mathbf{S} \mathbf{u}$  schreiben darf, worin  $\mathbf{S}$  eine dem Vektor  $\mathbf{s}$  eindeutig zugeordnete, schiefsymmetrische Matrix ist. Wir wollen definieren:

$$\mathbf{s} \times = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \quad (3.1)$$

wobei  $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$ . Wir fassen also das Vektormal als Operator auf, der auf den links von ihm stehenden Vektor wirkt und ihn nach obigem Schema in eine schiefsymmetrische Matrix verwandelt, die von einem (nicht geschriebenen) Matrixmultiplikationszeichen gefolgt ist. Jedem Vektor ist somit im dreidimensionalen Raum eindeutig nach (3.1) eine schiefsymmetrische Matrix und jeder schiefsymmetrischen Matrix eindeutig ein Vektor zugeordnet.

Als Gedankenstütze merken wir uns:

1. Die Elemente der Hauptdiagonale von  $\mathbf{s} \times$  sind alle null.
  2. An der Hauptdiagonale gespiegelte Elemente unterscheiden sich nur im Vorzeichen.
  3. Die Vektorkomponenten sind den beiden Rändern nach mit alternierendem Vorzeichen aufgereiht, beginnend von rechts unten nach links oben. In der rechten, oberen Ecke steht das positive Vorzeichen.
- Das Vektorprodukt darf nach dem Vorgehenden als

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{u} = (\mathbf{s} \times) \mathbf{u} \quad (3.2)$$

gedeutet werden, in Komponenten geschrieben

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 u_3 - s_3 u_2 \\ s_3 u_1 - s_1 u_3 \\ s_1 u_2 - s_2 u_1 \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

Im dreidimensionalen Raum ist das Ergebnis wieder ein Vektor.

Im *zweidimensionalen Vektorraum* erhält man das richtige Ergebnis, wenn man definiert

$$\mathbf{s} \times = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \times = [-s_2, s_1] \quad (3.3)$$

Hier verwandelt der Vektormal-Operator den Spaltenvektor in einen Zeilenvektor, und das Produkt

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{u} = (\mathbf{s} \times) \mathbf{u} = -s_2 u_1 + s_1 u_2 \quad (3.4)$$

wird zu einem Skalar.

Mit dieser Interpretation erhält auch das Vektorprodukt eines Vektors mit einer Matrix einen Sinn:  $\mathbf{a} \times \mathbf{B} = (\mathbf{a} \times) \mathbf{B}$  bedeutet die Multiplikation der Matrix  $(\mathbf{a} \times)$  mit der Matrix  $\mathbf{B}$ . Das Resultat ist eine Matrix, deren Spalten die Vektorprodukte von  $\mathbf{a}$  mit den Spalten von  $\mathbf{B}$  sind.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{B} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1, \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2, \mathbf{a} \times \mathbf{b}_3) \quad (3.5)$$

Zum Beispiel lässt sich  $\mathbf{s} \times$  als  $\mathbf{s} \times \mathbf{I} = (\mathbf{s} \times \mathbf{i}_1, \mathbf{s} \times \mathbf{i}_2, \mathbf{s} \times \mathbf{i}_3)$  deuten, was (3.1) entspricht.

Nun wollen wir die wichtigsten Rechenregeln für das Vektormal zusammenstellen. Wir gliedern die Regeln in solche, die nur im zweidimensionalen ( $n=2$ ), in solche, die nur im dreidimensionalen Vektorraum ( $n=3$ ) und in solche, die allgemein in beiden Räumen gelten, und fangen mit den letzteren an.

*Allgemein für  $n=2$  und  $n=3$  gültige Regeln:*

1. Linearität bezüglich Addition und Multiplikation mit einem Skalar

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times = \mathbf{a} \times + \mathbf{b} \times \quad (3.6)$$

$$(\gamma \mathbf{a}) \times = \gamma \mathbf{a} \times \quad (3.7)$$

2. Vertauschungsregel (Antikommutativität)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (3.8)$$

3. Multiplikation mit sich selber

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Umkehrung: Wenn  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  für  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , dann folgt

$$\mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ oder } \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \quad (3.10)$$

4. Stürzung

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T (\mathbf{a} \times)^T \quad (3.11)$$

5. Wirkung des Vektormals auf ein Vektorprodukt (Entwicklungssatz)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T \quad (3.12)$$

Es gilt auch

$$(\mathbf{a} \times)^T \mathbf{b} \times = (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{I} - \mathbf{b} \mathbf{a}^T \quad (3.12a)$$

$$(\mathbf{a} \times)^T \mathbf{a} \times = (\mathbf{a}^T \mathbf{a}) \mathbf{I} - \mathbf{a} \mathbf{a}^T \quad (3.12b)$$

(3.12b) ist die Formel für den Trägheitstensor eines Punktes mit Ortsvektor  $\mathbf{a}$  und Masse 1.

6. Nichtassoziativität mit dem Matrixprodukt

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) \times \neq \mathbf{A} (\mathbf{b} \times) \quad (3.13)$$

Im allgemeinen darf man die Klammer links nicht weglassen, man beachte aber (3.21) und (3.22). Der Ausdruck rechts ist für  $n=2$  nicht definiert.

*Nur für  $n=3$  gültige Regeln:*

7. Die grundlegende zusätzliche Beziehung im dreidimensionalen Vektorraum ist die schiefe Symmetrie bei der Stürzung.

$$(\mathbf{a} \times)^T = -\mathbf{a} \times \quad (3.14)$$

Neben Formel (3.11) gilt auch

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T = -\mathbf{b}^T \mathbf{a} \times = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \times \quad (3.15)$$

Aus (3.15) folgt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} \times = (\mathbf{a} \times \mathbf{a})^T = \mathbf{0}^T \quad (3.16)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times)^T = \mathbf{b} \times \mathbf{a} \times \quad (3.17)$$

8. Wirkung des Vektormals auf ein Vektorprodukt.

Neben Formel (3.12) gilt auch

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times - \mathbf{b} \times \mathbf{a} \times \quad (3.18)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{I} \quad (3.19)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (3.20)$$

(Lösen der Klammer)

9. Die Multiplikation einer *orthogonalen* Matrix mit einem Vektorprodukt ist distributiv bezüglich der beiden Faktoren des Vektorprodukts.

In Formeln: Wenn  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \mathbf{A} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \pm (\mathbf{A} \mathbf{b}) \times \mathbf{A} \mathbf{c} \\ &+ \text{für } \det \mathbf{A} = +1 \\ &- \text{für } \det \mathbf{A} = -1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die selbe Regel kann auch als

$$(\mathbf{A} \mathbf{b}) \times = \pm \mathbf{A} \mathbf{b} \times \mathbf{A}^T \quad (3.22)$$

geschrieben werden (Lösen der Klammer, vgl. (3.13)).

10. Orthonormale Basis mit Einheitsvektoren.

Ist  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  eine orthogonale Matrix,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ , so ist  $\det \mathbf{A} = |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = \pm 1$  und es gilt für die Spaltenvektoren von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \pm \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 &= \pm \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 &= \pm \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit dem Plus- oder Minuszeichen entsprechend dem Vorzeichen von  $\det \mathbf{A}$ .

11. Spatprodukt, Determinante

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{a}^T \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ &= |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| \text{ Determinante} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Es gelten die bekannten Eigenschaften

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}| = |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}|$$

zyklische Vertauschung der Vektoren

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = -|\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}|$$

gegenseitige Vertauschung zweier Vektoren

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}| = 0$$

Identität zweier Vektoren

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}| = 0$$

lineare Abhängigkeit

*Nur für  $n=2$  gültige Regeln:*

12. Es gilt die Definition (3.3).

13. Die (3.21) entsprechende Formel lautet (mit  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ )

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \pm (\mathbf{A}\mathbf{b}) \times \mathbf{A}\mathbf{c} \quad (3.25)$$

welche auch als Operatorgleichung

$$(\mathbf{A}\mathbf{b}) \times = \pm \mathbf{b} \times \mathbf{A}^T \quad (3.26)$$

(Lösen der Klammer) geschrieben werden kann.

14. Orthonormale Basis

Die (3.23) entsprechende Formel lautet (mit  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ )

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2| = \pm 1 \quad (3.27)$$

15. Determinante

$$\sigma = |\mathbf{a}, \mathbf{b}| = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (3.28)$$

16. Anwendung des Vektormals auf Skalare  $s$  und schiefsymmetrische Matrizen  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{s} \times = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix} \text{Ergebnis: schiefsymmetrische Matrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{S} \times = \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix} \times = s \quad \text{ein Skalar} \quad (3.30)$$

**Das Vektorprodukt im grösseren algebraischen Rahmen.**

Als *Tensorprodukt* zweier Vektoren  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{u}$ , auch *lineare Dyade* genannt, definiert man die Matrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{s}\mathbf{u}^T \quad (3.31)$$

Das *äussere Produkt* der Vektoren  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{u}$  ist als die schiefsymmetrische Matrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{s}\mathbf{u} - \mathbf{C} - \mathbf{C}^T = \mathbf{s}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{s}^T \quad (3.32)$$

definiert. Das *Vektorprodukt* schliesslich ist als die Adjungierte zur Matrix  $\mathbf{P}$  definiert:

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{A} = (\mathbf{s}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{s}^T)\mathbf{A} \quad (3.33)$$

Im dreidimensionalen Vektorraum ist  $\mathbf{p}$  der Vektor (3.2a), im zweidimensionalen Vektorraum der Skalar (3.4). Zum Begriff der *Adjungierung* eines Tensors sei auf *Lichnerowicz* [8] verwiesen. Die Verallgemeinerung zum oben erklärten äussern Produkt und weitere Sätze der sogenannten *äussern Algebra* findet man in [9] vom gleichen Verfasser. Schreibt man (3.33) skalar aus und formt etwas um, wird daraus das Matrixprodukt

$$\mathbf{p} = (\mathbf{s}\mathbf{A})^T \mathbf{u}, \quad (3.34)$$

worin wir den ersten Faktor symbolisch als

$$(\mathbf{s}\mathbf{A})^T = \mathbf{s} \times \quad (3.35)$$

bezeichnen.  $\mathbf{s} \times$  für  $n = 3$  wird zur schiefsymmetrischen Matrix (3.1), für  $n = 2$  zum Zeilenvektor (3.3).

#### 4. Die Minimumbedingung für die Drehmatrix

Wir wollen den Faden aus Abschnitt 2 wieder aufgreifen und eine Lösung für  $\mathbf{A}$  suchen.

*Das Glied mit  $d\mathbf{A}$ :*

Das zweite Glied rechterhand in (1.5), jetzt in Schwerpunktkoordinaten geschrieben

$$\mu \sum \mathbf{v}^T d\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (4.1)$$

muss für alle  $d\mathbf{A}$  verschwinden, die der Nebenbedingung  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$  genügen. Differenzieren der Nebenbedingung ergibt

$$d\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T d\mathbf{A} = 0 \quad (4.2)$$

Wenn man abkürzt  $d\mathbf{B} = \mathbf{A}^T d\mathbf{A}$  wird durch Transponieren

$$d\mathbf{B}^T = d\mathbf{A}^T \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T d\mathbf{A} = -d\mathbf{B}$$

$d\mathbf{B}$  ist also eine schiefsymmetrische Matrix, enthält drei wesentliche Elemente und darf nach (3.1) als  $d\mathbf{b} \times$  geschrieben werden. Dann gilt

$$d\mathbf{A} = \mathbf{A} d\mathbf{B} = \mathbf{A} d\mathbf{b} \times \quad (4.3)$$

was man in (4.1) einsetzen darf mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{v}^T d\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} &= \sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} d\mathbf{b} \times \boldsymbol{\xi} \\ &= -\sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \times d\mathbf{b} = -(\sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \times) d\mathbf{b} = 0 \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von (3.8). Der Ausdruck rechterhand, ein Skalarprodukt zweier Vektoren, kann, entsprechend der Minimumbedingung, für beliebige Werte von  $d\mathbf{b}$  (drei, jetzt freie Parameter) nur verschwinden, wenn

$$\sum \mathbf{v}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} \times = 0^T$$

ist. Transponieren, Einsetzen von (2.8) für  $\mathbf{v}$  und Umformen unter Bezug von (3.14),  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$  und (3.9) führt auf

$$\begin{aligned} -\sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T \mathbf{v} &= -\sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T (\mu \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= -\mu \sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= -\mu \sum \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi} + \sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung lässt sich auch auf die Form

$$-\sum \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum (\mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \times \boldsymbol{\xi} = \pm \sum \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = \pm \mathbf{A}^T \sum \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = 0$$

bringen, wobei von (3.8) und (3.22) Gebrauch gemacht wurde. Weil die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}^T$  im homogenen Gleichungssystem rechterhand regulär ist, det  $\mathbf{A} = \pm 1$ , hat dieses für  $\sum \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\xi}$  nur den Nullvektor als Lösung.

$$\boxed{\sum \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}} \quad (4.4)$$

oder nach Multiplikation mit dem Massstabsfaktor

$$\sum (\boldsymbol{\varepsilon} \times \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad (4.5)$$

Das Gleichungssystem (4.4) liefert 3 lineare und 6 wesentliche, quadratische Gleichungen zur Lösung für die 9 Elemente von  $\mathbf{A}$ . Im nächsten Abschnitt ist ein indirekter, aber doch ganz praktikabler Weg für die Lösung von  $\mathbf{A}$  angegeben.  $\mathbf{A}$  in die Gleichungen für  $\mu$  und  $\mathbf{y}_0$  eingesetzt, löst das Problem vollständig.

Die Gleichung (4.4) lässt sich formulieren als

**Satz 3:** Bei der Helmerttransformation wird der bewegliche Punkthaufen so lange gedreht, bis die Summe der Vektorprodukte aus einander zugeordneten beweglichen und festen, je auf den Schwerpunkt bezogenen Ortsvektoren null ist.

Dieser Satz gilt auch im Zweidimensionalen. Er ist dort von geringerer Bedeutung, weil für  $n = 2$  ein anderer Weg direkt zur Lösung führt (siehe Abschnitt 6).

Es ist bemerkenswert, dass in (4.4) ein Massstabsfaktor nirgends, auch nicht implizit, auftritt.

Wir formulieren das im

**Zusatz:** Die Bestimmung der Drehmatrix  $\mathbf{A}$  einer Helmerttransformation ist von der Wahl des Massstabsfaktors unabhängig.

Insbesondere führt eine Transformation  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}_0$  bei der nur gedreht und geschoben, der Massstab aber festgehalten wird, auf das selbe  $\mathbf{A}$ .

#### 5. Iterative Lösungen für die Drehmatrix

##### 5.1 Über die Cayleysche Faktorisierung

Man gelangt zu einer iterativen Lösung für die Gleichung (4.4), wenn man die orthogonale Matrix  $\mathbf{A}$  nach Cayley (siehe [4], S. 116) in zwei Faktoren zerlegt

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \quad (5.1)$$

In der Cayleyschen Formel steht  $\mathbf{S}$  für eine schiefsymmetrische Matrix. Eine kleine Umformung mit der Abkürzung

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \quad (5.2)$$

bringt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{I} + \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \\ &= (2\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{S}))(\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \\ &= 2\mathbf{C} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Vormultiplizieren von (5.2) mit  $\mathbf{I} - \mathbf{S}$  führt auf

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{C} \quad (5.4)$$

und dies in (5.3) eingesetzt auf

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + 2\mathbf{S}\mathbf{C} \quad (5.5)$$

Sind die Ausgangsvektoren  $\boldsymbol{\xi}$  zu Beginn der Helmerttransformation schon einigermaßen gut vororientiert (z.B. nach dem Verfahren in [5]), so wird die Matrix  $\mathbf{A}$  nicht zu weit ab von der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  liegen, und in der Matrix  $\mathbf{S}\mathbf{C}$  werden alle Elemente klein sein. Das heisst nach (5.4), dass auch  $\mathbf{C}$  durch  $\mathbf{I}$  gut angenähert wird und legt nahe, mit den Formeln (5.4) und (5.5) ein Näherungsverfahren aufzubauen. Zu diesem Zweck setzen wir (5.5) in (4.4) ein mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} &= \sum \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{I} + 2\mathbf{S}\mathbf{C}) \boldsymbol{\xi} \\ &= \sum \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\xi} + 2 \sum \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{S}\mathbf{C} \boldsymbol{\xi} = 0 \end{aligned}$$



und versuchen  $\mathbf{S}$  daraus zu berechnen. Das gelingt wegen der schiefen Symmetrie mit der Schreibweise  $\mathbf{S} = \mathbf{s} \times$  nach (3.1). Damit entsteht unter Beziehung von (3.8)

$$\frac{1}{2} \sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{\xi} = - \sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{s} \times \mathbf{C} \mathbf{\xi} = \sum \mathbf{\varepsilon} \times (\mathbf{C} \mathbf{\xi}) \times \mathbf{s} = (\sum \mathbf{\varepsilon} \times (\mathbf{C} \mathbf{\xi}) \times) \mathbf{s}$$

Mit der Abkürzung

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{\varepsilon} \times (\mathbf{C} \mathbf{\xi}) \times = \mathbf{C} \sum \mathbf{\xi} \mathbf{\varepsilon}^T - (\sum \mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{C} \mathbf{\xi}) \mathbf{I} \quad (5.6)$$

(die rechte Seite nach 3.19)) muss man also das Gleichungssystem

$$\mathbf{M} \mathbf{s} = \frac{1}{2} \sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{\xi} \quad (5.7)$$

nach dem unbekannten Vektor  $\mathbf{s}$  lösen. Weil  $\mathbf{C}$  im Ausdruck für  $\mathbf{M}$  unbekannt ist, fängt man mit  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{I}$  an und durchläuft dann iterierend die Gleichungen

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M}_i = \sum \mathbf{\varepsilon} \times (\mathbf{C}_i \mathbf{\xi}) \times$$

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{M}_i^{-1} \cdot \frac{1}{2} \sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{\xi} \quad (\text{oder ohne die Inverse nach (5.7)}) \quad (5.8)$$

$$\mathbf{C}_{i+1} = \mathbf{I} + \mathbf{s}_{i+1} \times \mathbf{C}_i$$

für  $i = 0, 1, 2, \dots$  (Iterationsindex)

Mit dem daraus ermittelten  $\mathbf{C}$  geht man in (5.3) ein und findet  $\mathbf{A}$ . Dieses in (2.13) eingesetzt, liefert den Massstabsfaktor  $\mu$ , und  $\mathbf{A}$  mit  $\mu$  in (2.4) eingesetzt, liefert die Schiebung  $\mathbf{y}_0$ .

### Geometrische Deutung von $\mathbf{s}$

Das Iterationsverfahren liefert automatisch den Vektor  $\mathbf{s}$ , der einer einfachen geometrischen Deutung fähig ist (siehe z. B. bei Thompson [4], S.155). Bei einer eigentlichen orthogonalen Transformation ( $\det \mathbf{A} = +1$ ) zeigt der Vektor  $\mathbf{s}$  in Richtung der Drehachse, und seine Länge ist gleich dem Tangens des halben Drehwinkels.

$$\mathbf{s} = -\tan \frac{\Theta}{2} \mathbf{r} \quad (5.9)^*$$

$\mathbf{r}$  Einheitsvektor in Richtung der Drehachse

$\Theta$  Drehwinkel

### Konvergenz der Iteration

Ohne das Konvergenzverhalten streng zu untersuchen, sollen hier dazu einige heuristische Überlegungen gemacht werden. Der rekursive Ausdruck für  $\mathbf{C}_i$  in (5.8) lässt sich als Funktion der  $\mathbf{S}$  auf den sukzessiven Iterationsstufen anschreiben als

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{I} + \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i-1} + \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{S}_{i-2} + \dots + \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i-1} \mathbf{S}_{i-2} \dots \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1$$

Besteht Konvergenz, so werden sich die  $\mathbf{S}_i$  für grosse  $i$  dem Sollwert  $\mathbf{S}$  annähern, so dass im Grenzfalle

\* In [4] steht noch der Faktor 2, weil Thompson sein  $\mathbf{S}$  mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  versieht, auch definiert er sein  $\mathbf{S}$  mit dem umgekehrten Vorzeichen.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{C}_i = \mathbf{I} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \dots = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{C}$$

entsteht. Dies ist die *Neumannsche Reihe*, das Matrixäquivalent einer geometrischen Reihe (siehe Zurmühl [6], S.238), von der bekannt ist, dass sie konvergiert, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{S}$  dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Eine einfache Rechnung ergibt die Eigenwerte von  $\mathbf{S}$  als 0,  $i|\mathbf{s}|$ ,  $-i|\mathbf{s}|$  (hier  $i = \sqrt{-1}$ ) und den Betrag des zweiten und dritten Eigenwertes als  $|\mathbf{s}|$ . Das bedeutet nach (5.9) Konvergenz für Drehwinkel  $\Theta < \pi/2$ , also einen sehr grossen Konvergenzbereich.

Durchgerechnete Zahlenbeispiele scheinen diese Überlegung zu bestätigen. Praktisch hat man bei guter Vororientierung die Koeffizienten von  $\mathbf{A}$  nach 2 bis 3 Iterationen auf 6 Stellen genau.

### 5.2 Durch Linearisieren

Wir gehen von einer guten Näherungslösung  $\mu_0, \mathbf{A}_0$  für Massstab und Drehmatrix aus und berechnen Näherungskordinaten  $\mathbf{\varepsilon}_0 = \mu_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{\xi}$  nach (2.7). Eine weitere kleine Drehung wird die Näherungskordinaten in die endgültigen Werte überführen, was wir als

$$\bar{\mathbf{\varepsilon}} = (\mathbf{I} + d\mathbf{I}) \mathbf{\varepsilon}_0 \quad (5.10)$$

schreiben.  $\mathbf{I} + d\mathbf{I}$  ist eine Orthogonalmatrix, die nur wenig von der Einheitsmatrix abweicht. Aus der Orthogonalitätsbedingung folgt analog zu (4.2)

$$d\mathbf{I}^T \mathbf{I} + \mathbf{I} d\mathbf{I}^T = d\mathbf{I}^T + d\mathbf{I} = \mathbf{0}, \text{ also } d\mathbf{I}^T = -d\mathbf{I}.$$

Somit ist  $d\mathbf{I}$  eine schiefsymmetrische Matrix und darf als

$$d\mathbf{I} = d\mathbf{i} \times \quad (5.11)$$

geschrieben werden. Die drei Komponenten von  $d\mathbf{i}$  können als kleine Drehwinkel bezüglich dreier orthogonaler Achsen gedeutet werden, was uns weiter aber nicht zu kümmern braucht. Wir setzen (5.10) in (4.5) ein und erhalten den Ausdruck

$$\sum (\mathbf{\varepsilon} \times \bar{\mathbf{\varepsilon}}) = \sum \mathbf{\varepsilon} \times (\mathbf{I} + d\mathbf{i} \times) \mathbf{\varepsilon}_0 = \sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{\varepsilon}_0 + \sum \mathbf{\varepsilon} \times d\mathbf{i} \times \mathbf{\varepsilon}_0 = - \sum \mathbf{\varepsilon}_0 \times \mathbf{\varepsilon} - (\sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{\varepsilon}_0 \times) d\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

Daraus ergibt sich  $d\mathbf{i}$  durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{N} d\mathbf{i} = \sum \mathbf{\varepsilon}_0 \times \mathbf{\varepsilon} \quad (5.12)$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{N} = - \sum \mathbf{\varepsilon} \times \mathbf{\varepsilon}_0 \times = \sum (\mathbf{\varepsilon}_0^T \mathbf{\varepsilon} \mathbf{I} - \mathbf{\varepsilon}_0 \mathbf{\varepsilon}^T) \quad (5.13)$$

worin (3.19) berücksichtigt ist.

Einen etwas ungenaueren Wert für  $d\mathbf{i}$  erhält man durch Gleichsetzen  $\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{\varepsilon}_0$  in (5.13).  $\mathbf{N}$  wird dann zur symmetrischen Matrix

$$\mathbf{N} = \sum (\mathbf{\varepsilon}_0^T \mathbf{\varepsilon}_0 \mathbf{I} - \mathbf{\varepsilon}_0 \mathbf{\varepsilon}_0^T) \quad (5.14)$$

#### Ein Zahlenbeispiel

Punkthaufen  $W_0$  aus 8 Punkten in den Ecken eines Einheitswürfels angeordnet. Streuung der Punktkordinaten mit Amplitude von 10% der Kantenlänge. Dehnung mit Massstabsfaktor 1.5. Drehung um die Achsen  $x, y, z$  in dieser Reihenfolge um

0,3 rad, 0,6 rad, 0,9 rad  
(17,2°, 34,4°, 51,6°).

Drehmatrix

$$\begin{array}{ccc} .513037 & .852065 & -.103822 \\ -.646508 & .463138 & .606243 \\ .564642 & -.243903 & .788473 \end{array}$$

Ergebnis: Punkthaufen  $W_1$ .

Transformieren von  $W_0$  auf  $W_1$  nach Helmert.

1. Direkt nach Iterationsverfahren (5.8).

Abbruchkriterium:

$$|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n-1}| < 10^{-5}$$

Ergebnis nach 17 Schritten:

$$\text{Vektor } \mathbf{s} \quad \begin{array}{ccc} -.318709 & -.221801 & -.545450 \end{array}$$

Drehwinkel  $\Theta$

67,6078°

Drehmatrix  $\mathbf{A}$

$$\begin{array}{ccc} .521214 & .850854 & -.066233 \\ -.655617 & .448881 & .607187 \\ .546356 & -.273052 & .791795 \end{array}$$

Massstabsfaktor  $\mu$

1,489097

Standardabweichung einer Koordinate

$\pm 0,0429$

2. Indirekt über eine Näherungslösung.

Genäherte Drehmatrix  $\mathbf{A}_0$  aus 3 Punkten nach [5]

$$\begin{array}{ccc} .486256 & .872802 & -.042092 \\ -.680345 & .408383 & .608567 \\ .548348 & -.267282 & .792385 \end{array}$$

Punkthaufen mit  $\mathbf{A}_0$  transformieren, anschliessend Iterationsverfahren (5.8). Abbruchkriterium wie 1. Ergebnis nach 4 Schritten:

Vektor  $\mathbf{s}_1$

$$\begin{array}{ccc} -.000751 & .002973 & .023730 \end{array}$$

Drehwinkel  $\Theta_1$

2,7413°

Drehmatrix  $\mathbf{A}_1$

$$\begin{array}{ccc} .998857 & -.047438 & .005907 \\ .047429 & .998873 & .001642 \\ -.005979 & -.001360 & .999981 \end{array}$$

Gesamtdrehung  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_0$

$$\begin{array}{ccc} .521214 & .850853 & -.066232 \\ -.655615 & .448880 & .607186 \\ .546356 & -.273051 & .791794 \end{array}$$

Massstabsfaktor  $\mu$

1,489094

Gleichung (5.12) mit  $\mathbf{N}$  aus (5.14) findet man in [1], [7]. Das Verfahren lässt sich zu einem Iterationsverfahren ausbauen. Es sei darauf hingewiesen, dass  $\mathbf{N}$  in (5.14) der Trägheitstensor des beweglichen Punkthaufens bezüglich eines Schwerpunktsystems ist, vgl. (3.12b). Auf weitere mechanische Analogien im Zusammenhang mit Gleichung (4.5) machen Schmid und Scherrer in [10], S. 66f. aufmerksam.

## 6. Die Helmerttransformation in der Ebene

Als weitere Anwendung und Bestätigung der Rechentechnik mit dem Vektormal wollen wir die bekannten Formeln für die *ebene* Helmerttransformation herleiten. Der Ansatz ist der selbe wie im 2. Abschnitt, hingegen kommt man einfacher zum Ziel, wenn man den Faktor  $\mu$  in die Matrix  $\mathbf{A}$  einmultipliziert und schreibt

$$\mathbf{H} = \mu \mathbf{A} \quad (6.1)$$

wobei wegen der Orthogonalität von  $\mathbf{A}$  gilt

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mu^2 \mathbf{I} \quad \text{und} \quad |\mathbf{H}|^2 = \mu^4 \quad (6.2)$$

Nennen wir der Kürze halber eine Matrix vom Typ  $\mathbf{H}$  *Helmertmatrix*.

Wie man durch einfache skalare Rechnung anhand von (6.2) oder auch mit Hilfe von (5.1) verifiziert, lässt sich eine Helmertmatrix im zweidimensionalen Vektorraum durch zwei frei wählbare, skalare Parameter charakterisieren und mit der zusätzlichen Bedingung  $\det \mathbf{H} > 0$  als

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

darstellen. Wegen (6.2) gilt für reelle  $\mu$

$$\mu^2 = + \det \mathbf{H} = \alpha^2 + \beta^2 \quad (6.4)$$

Für die weitere Rechnung wollen wir  $\mathbf{H}$  als

$$\mathbf{H} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{1} \times \quad (6.5)$$

schreiben. In der Formel ist das Vektormal auf die Eins (einen Skalar) angewandt, was nach (3.29) im Zweidimensionalen die schiefsymmetrische Matrix

$$\mathbf{1} \times = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

ergibt. Aus Komponentenrechnung folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{1} \times \mathbf{b} &= \mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a}^T \mathbf{1} \times \mathbf{a} &= \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{a} \times \mathbf{1} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Genau wie in (2.7) vereinfacht sich der Ansatz für *Schwerpunktkoordinaten* zu

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y} = \bar{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.8)$$

Die Minimumbedingung der kleinsten Quadrate ergibt den Ausdruck (1.4), den wir weiter entwickeln.

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{v}^T \mathbf{d} \mathbf{v} &= \sum \mathbf{v}^T \mathbf{d} \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \sum \mathbf{v}^T (\mathbf{d} \alpha \mathbf{I} + \mathbf{d} \beta \mathbf{1} \times) \bar{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \mathbf{d} \alpha \sum \mathbf{v}^T \bar{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{d} \beta \sum \mathbf{v}^T \mathbf{1} \times \bar{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \mathbf{d} \alpha \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{v} + \mathbf{d} \beta \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

Wiederum muss der letzte Ausdruck für beliebige  $\mathbf{d} \alpha$  und  $\mathbf{d} \beta$  identisch zu null werden, was nur möglich ist, wenn gilt

$$\begin{aligned} \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{v} &= 0 = \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\xi}} - \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \alpha \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \bar{\boldsymbol{\xi}} + \beta \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{1} \times \bar{\boldsymbol{\xi}} - \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \alpha \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \bar{\boldsymbol{\xi}} - \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \\ \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{v} &= 0 = \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times (\mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\xi}} - \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \alpha \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \bar{\boldsymbol{\xi}} + \beta \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{1} \times \bar{\boldsymbol{\xi}} - \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \beta \sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \bar{\boldsymbol{\xi}} - \sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \end{aligned}$$

Hierin wurde (6.7) berücksichtigt. Explizit erhalten wir daraus die Elementen  $\alpha$  und  $\beta$  als

$$\alpha = \frac{\sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{\sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \bar{\boldsymbol{\xi}}}, \quad \beta = \frac{\sum \bar{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\varepsilon}}{\sum \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \bar{\boldsymbol{\xi}}} \quad (6.8)$$

Der Massstab  $\mu$  berechnet sich nach (6.4) und der Drehwinkel  $\Theta$ , weil bekanntermassen  $\alpha = \mu \cos \Theta$ ,  $\beta = \mu \sin \Theta$  ist, als

$$\Theta = \arctg \frac{\beta}{\alpha} \quad (6.9)$$

In der Symbolik noch einfacher als mit dem Vektormal wird die Herleitung der Helmerttransformation für  $n=2$ , wenn die Ortsvektoren und die Helmertmatrix beide als *komplexe Zahlen* geschrieben werden.

### Literatur:

- [1] Rinner K.: Über räumliche Drehungen. Deutsche Geod. Komm., Reihe A, Nr. 25, München 1957.
- [2] Wolf, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmler, Bonn 1968.
- [3] Tienstra, M.: Orthogonal Transformation Matrices. Proefschrift, Technische Hogeschool Delft, Waltmann, Delft 1969.
- [4] Thompson, E.H.: An introduction to the algebra of matrices with some applications. The University of Toronto Press, 1969.
- [5] Köchle, R.: Eine einfache Formel zur absoluten Orientierung. Bildmessung und Luftbildwesen 2/80.
- [6] Zurmühl, R.: Matrizen. Springer, Berlin 1950.
- [7] Albertz/Kreiling: Photogrammetrisches Taschenbuch. Wichmann, Karlsruhe 1975.
- [8] Lichnerowicz, A.: Eléments de calcul tensoriel. Armand Collin, Paris 1950.
- [9] Lichnerowicz, A.: Einführung in die Tensoranalysis. Bibliographisches Institut, Mannheim 1966. (Deutsche Übersetzung des Vorhergehenden.)
- [10] Schmid/Scherrer: Vom freien zum gelagerten Netz. Mitteilung Nr. 29, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETHZ, Zürich 1980.

Adresse des Verfassers:

Richard Köchle  
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich

## SVVK / SSMAF

Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik  
Société suisse des mensurations et améliorations foncières

## Präsidentenkonferenz des SVVK vom 31. März 1982 in Bern

### Kurzfassung des Protokolls:

Unter dem Vorsitz von Zentralpräsident Jules Hippenmeyer haben die Präsidenten der Sektionen und verschiedener Kommissionen

ihre statutarische Versammlung abgehalten. Die Traktandenliste für die Hauptversammlung vom 18.6.1982 in Engelberg wurde genehmigt und im Detail wie folgt behandelt:

Der Jahresbericht 1981 des Zentralvorstandes wurde gutgeheissen. Ebenso wurden die Jahresrechnung 1981, das Budget 1983 sowie der Jahresbeitrag 1983 angenommen. Die Wahlvorschläge für Zentralvorstand, Rechnungsrevisoren, Standeskommission und Chefredaktor wurden sanktioniert. Ausserdem wurde der Vorschlag des Zentralvorstandes, die Mitglieder des FIG-Büros Schweiz zu Ehrenmitgliedern zu ernennen, mit Applaus gutgeheissen und zum Antrag der Präsidentenkonferenz erhoben.

Ferner hat sich die Präsidentenkonferenz damit einverstanden erklärt, dass sich der Zentralvorstand weiterhin für die Beibehaltung der interkantonalen Fachkurse für Vermessungszeichnerlehrlinge der deutschsprachigen Schweiz einsetzt. Zudem soll der Zentralvorstand Kompetenz erhalten, einer Kostenbeteiligung des SVVK bzw. der Lehrfirmen im Sinne von Art. 34 des BBG in einem vom BIGA allenfalls zu erlassenden Reglement zuzustimmen.

Der Zentralpräsident orientierte abschliessend, dass die Statutenrevision des SVVK verabschiedet werden konnte und der Entwurf für die neuen Statuten demnächst zur Vernehmlassung zugestellt werde.

Für das Protokoll: *Sekretariat SVVK*