Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

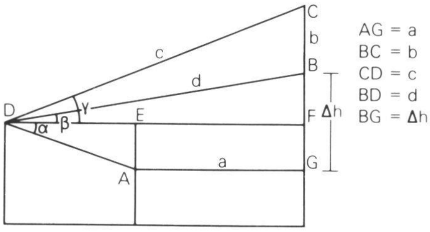
Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 80 (1982)

Heft: 12

Rubrik: Leserbriefe = Courrier des lecteurs

Autor: [s.n.]



Partant de la relation (1), avec laquelle on peut calculer l'altitude du point A, on peut déduire tous les éléments intermédiaires nécessaires:

$H_A = H_G = H_B - \Delta h$; (1)

Mais $\Delta h = BG = BF + FG$; (2)

Les termes BF et FG de la relation (2) peuvent être déduits de deux manières:
I. Dans le triangle rectangle BDF, respectif ADE, on peut écrire:

$BF = d.\sin\beta = d.\cos(90-\beta)$; (3)

$FG = AE = DE.\mathrm{tg}\,\alpha = (DF - a)\mathrm{tg}\,\alpha$; (4)

Continuant avec les substitutions, on obtient:

$FG = (d.\cos\beta - a)\mathrm{tg}\,\alpha$; (5)
parce que $DE = DF - a$; (6) et $DF = d.\cos\beta$; (7)

II. Et dans le triangle rectangle CDF, respectif ADE, on peut écrire:

$BF = CF - b = c.\sin\gamma - b = c.\cos(90-\gamma) - b$; (8)

$FG = (DF - a)\mathrm{tg}\,\alpha = (c.\cos\gamma - a)\mathrm{tg}\,\alpha$; (9)

parce que $DF = c.\cos\gamma$; (10)

Pour les deux côtés inconnus ‹c› et ‹d› du triangle BCD, en appellant les relations connues dans la trigonométrie, on peut écrire deux relations de la forme suivante:

$c = \dfrac{b.\sin(90+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}$; (11) $\quad d = \dfrac{b.\sin(90-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}$; (12)

Substituant ‹d› par la relation (12) dans la (3) et la (5), la relation (2) devient:

$$\text{I. } \Delta h = b.\frac{\sin(90-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}\sin\beta + b.\frac{\sin(90-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}\cos\beta - a.\mathrm{tg}\,\alpha; \quad (13)$$

Et puis après les calculs nécessaires il résulte, pour les degrés sexagésimaux:

$$\boxed{\Delta h = b.\frac{\sin(90-\gamma)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos\alpha} - a.\mathrm{tg}\alpha} \quad (14)$$

(pour les grades centésimaux, on substitue la valeur de l'angle de 90° par 100^g.)

II. De manière analogue, substituant ‹c› par la (11) dans la (8) et la (9), la relation (2) devient:

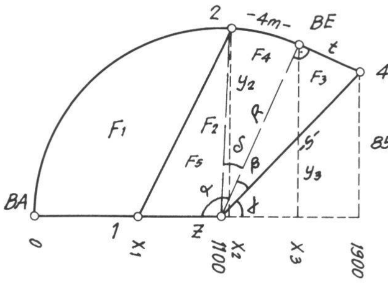
$$\Delta h = b.\frac{\sin(90+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}(\sin\gamma + \cos\gamma\ \mathrm{tg}\,\alpha) - a.\mathrm{tg}\,\alpha - b; \quad (15) \text{ ou, encore:}$$

$$\boxed{\Delta h = b.\left[\frac{\sin(90+\beta)\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)\cos\alpha} - 1\right] - a.\mathrm{tg}\,\alpha;} \quad (16)$$

Avec les données du problème,
$\alpha = 15{,}470^g \quad a = 38$ m $\quad H_C = 630$ m
$\beta = 5{,}890^g \quad b = 10$ m $\quad H_B = 620$ m
$\gamma = 13{,}105^g$
nous obtenons les résultats suivants:
I. utilisant la relation (14):
$100 - \gamma = 86{,}895^g$
$\alpha + \beta = 21{,}360^g$
$\gamma - \beta = 7{,}215^g$
$\Delta h = 19{,}943$ m
II. utilisant la relation (16):
$100 + \beta = 105{,}890^g$
$\alpha + \gamma = 28{,}575^g$
$\Delta h = 19{,}943$ m
$H_A = 620{,}000 - 19{,}943 = 600{,}057$ m
$H_A = 600{,}057$ m

Merci beaucoup pour votre attention,
Ing. Laczkó Mátyás
Aleea Creației nr. 10. ap. 36, 1900 Timișoara, Romania.

Lösung zu Aufgabe 5/82
Solution du problème 5/82



$s = \sqrt{(19-11)^2 + 8.5^2} = 11.673$ m
$t = \sqrt{s^2 - R^2} = 3.906$ m
$\mathrm{tg}\,\gamma = 8.5 : 8 \qquad \gamma = 51.929^g$
$\mathrm{tg}\,\beta = t : R \qquad \beta = 21.722^g$
$\alpha = 200 - (\beta + \gamma), \quad \alpha = 126.349^g$
$F_1 + F_2 = (t \cdot R + R^2 \,\mathrm{arc}\,\alpha) : 2 = 141.56\ m^2$
$\underline{x_3} = R\cos(\beta+\gamma) + 11 = \underline{15.424\ m}$
$\underline{y_3} = R\sin(\beta+\gamma) = \underline{10.071\ m}$
$\delta = 4 \cdot \rho : R = 23.150^g$
$\underline{x_2} = 11 - R\cos(\alpha - \delta) = \underline{11.553\ m}$
$\underline{y_2} = R\sin(\alpha - \delta) = \underline{10.986\ m}$
$F_3 + F_4 + F_5 = F_2 = 70.78\ m^2$
$F_3 = Z, BE, 4, Z = t \cdot R : 2 = 21.48\ m^2$
$F_4 = Z, 2, BE, Z = 4 \cdot R : 2 = 22.00\ m^2$
$F_5 = Z, 1, 2, Z = F_2 - F_3 - F_4 = 27.30\ m^2$
$\underline{x_1} = 11 - (2F_5 : y_2) = \underline{6.030\ m}$

Leserbriefe Courrier des lecteurs

Die räumliche Helmerttransformation in algebraischer Darstellung

Zum Aufsatz von R. Köchle in VPK 9/82, S. 292

As Köchle mentions, this problem has been delt with by other authors too, for instance E. H. Thompson and G. H. Schut.

The formulae have nice properties, one of them being that the computation of the seven unknowns may be split into separate computations of 3 plus 1 plus 3 unknowns. But the formulae from different authors make one assumption, often not clearly mentioned, which is a serious limitation for practical use in digital photogrammetry.
The formulae suppose that *all* the points which are used when computing the seven unknowns, have known (ground) coordinates in x *and* y *and* z. But this is often not the case in photogrammetry. Some points may have known planimetry x, y and unknown height z, and other points may have only known height. In rare cases one might have points with only known x or y. In such cases one can not split the computation into separate computations of rotations, scale and translations.
To show this we may use some of the formulae from Köchle. The formulae

(1.1) $\bar{\mathbf{y}}_i = \mu \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_o$

and

(1.5) $(\Sigma\, \mathbf{v}^T)\, d\mathbf{y}_o = 0$

are still valid.
The formulae (2.1), (2.2) and (2.3) are also correct if we *presume* that the averages are made over the known *coordinates* (not points), i. e.:

$$\mathbf{y}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_x}\sum_x x_K \\ \frac{1}{n_y}\sum_y y_K \\ \frac{1}{n_z}\sum_z z_K \end{pmatrix}$$

where $\sum_x x_K$ is the sum of known x-coordinates, and n_x is the number of such coordinates.
The standard procedure to get formula (2.4) is to sum up formula (1.1) for all points with known coordinates, and including *all* coordinates, in this case known and unknown. This will lead to a value for $\bar{\mathbf{y}}_s$ which may be based on partly other coordinates than $\mathbf{y}_s$ as defined above. From this we can not proceed to (2.4).
An other possibility is to do it in this way:

$$\mathbf{y}_s = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s - \mu \mathbf{A}_1 (\frac{1}{n_x}\sum_x \mathbf{x}) \\ y_s - \mu \mathbf{A}_2 (\frac{1}{n_y}\sum_y \mathbf{x}) \\ z_s - \mu \mathbf{A}_3 (\frac{1}{n_z}\sum_z \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

where $\sum_x \mathbf{x}$ is the sum of measured vectors for points with known x. In our case we often have

$$\frac{1}{n_x}\sum_x \mathbf{x} \neq \frac{1}{n_y}\sum_y \mathbf{x} \neq \frac{1}{n_z}\sum_z \mathbf{x}$$

Even in this case we can not proceed to Köchle's formula (2.4), and to the rest of his nice solution.
It seems to me that the best solution in practical, digital photogrammetry is to use differentiation and iterations, and to compute all the seven unknowns together.

Øystein Andersen, dosent
Department of Surveying
Agricultural University of Norway
N 1432 Ås-NLH

Zum Kommentar von Ø. Andersen

Ø. Andersens Bemerkung trifft zu, die Formeln in meinem Artikel setzen die Kenntnis aller Koordinaten in beiden Punkthaufen voraus. Eine Verallgemeinerung liesse sich durch Anbringen von Gewichten an den einzelnen Punktkoordinaten erreichen, welche bei fehlenden Koordinatenwerten nach Bedarf null gesetzt werden könnten.

Über die Anwendung am Beispiel der Helmerttransformation hinaus lag mir daran zu zeigen, wie sich räumliche Drehungen ohne Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen, insbesondere ohne die explizite Einführung von Drehwinkeln, einzig durch Ausnützen der algebraischen Eigenschaften der Drehmatrix $\mathbf{A}$ *behandeln lassen. Alle bekannten Formeln mit* $\mathbf{A}$, *die auf Linearisierung beruhen, liessen sich nach dem Schema meiner Gleichungen (5.10) und (5.11) entwickeln. Dort wird für kleine Drehungen eine* ***bis und mit auf Glieder erster Ordnung orthogonale*** *Matrix*

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + d\mathbf{I}$$

eingeführt, worin $d\mathbf{I} = d\mathbf{i}_x$ *ist. Der Vektor* $d\mathbf{i}$ *enthält die kleinen Winkelzuschläge der konventionellen Formeln. Konventionell werden dann gewöhnlich diese Zuschläge zu den Näherungswerten der Drehwinkel addiert, und mit Hilfe trigonometrischer Funktionen wird ein besserer Wert für* $\mathbf{A}$ *als Ausgangswert für einen nächsten Iterationsschritt berechnet.*

Ein anderer Weg, auf dem man den Matrixkalkül nicht zu verlassen brauchte, wäre der folgende:

Ein Vergleich mit der linearisierten Formel von Cayley (5.1)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}+\mathbf{S})\,(\mathbf{I}-\mathbf{S})^{-1} \cong (\mathbf{I}+\mathbf{S})\,(\mathbf{I}+\mathbf{S}) \cong \mathbf{I} + 2\mathbf{S} = \overline{\mathbf{A}}$$

ergibt die Beziehung

$$d\mathbf{i}_x = d\mathbf{I} = 2\mathbf{S}$$

Mit $d\mathbf{i}$ *und Gleichung (5.1) kann man eine* ***streng orthogonale*** *Matrix aufbauen als*

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + \tfrac{1}{2} d\mathbf{i}_x)\,(\mathbf{I} - \tfrac{1}{2} d\mathbf{i}_x)^{-1}$$

oder mit Gleichungen (5.2) und (5.5) auch als

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + d\mathbf{i}_x\,(\mathbf{I} - \tfrac{1}{2} d\mathbf{i}_x)^{-1}$$

die nun Ausgangswert für den nächstfolgenden Iterationsschritt ist.

R. Köchle