

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 80 (1982)

Heft: 12

Rubrik: Leserbriefe = Courrier des lecteurs

Autor: [s.n.]

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

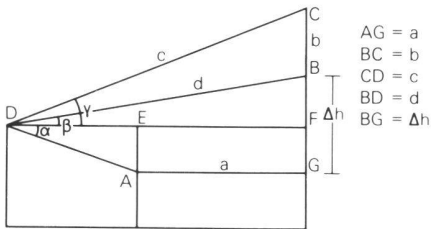
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>



Partant de la relation (1), avec laquelle on peut calculer l'altitude du point A, on peut déduire tous les éléments intermédiaires nécessaires:

$$H_A = H_G = H_B - \Delta h; (1)$$

$$\text{Mais } \Delta h = BG = BF + FG; (2)$$

Les termes BF et FG de la relation (2) peuvent être déduits de deux manières:

I. Dans le triangle rectangle BDF, respectif ADE, on peut écrire:

$$BF = d \cdot \sin \beta = d \cdot \cos (90 - \beta); (3)$$

$$FG = AE = DE \cdot \tan \alpha = (DF - a) \tan \alpha; (4)$$

Continuant avec les substitutions, on obtient:

$$FG = (d \cdot \cos \beta - a) \tan \alpha; (5)$$

$$\text{parce que } DE = DF - a; (6) \text{ et } DF = d \cdot \cos \beta; (7)$$

II. Et dans le triangle rectangle CDF, respectif ADE, on peut écrire:

$$BF = CF - b = c \cdot \sin \gamma - b = c \cdot \cos (90 - \gamma) - b; (8)$$

$$FG = (DF - a) \tan \alpha = (c \cdot \cos \gamma - a) \tan \alpha; (9)$$

$$\text{parce que } DF = c \cdot \cos \gamma; (10)$$

Pour les deux côtés inconnus <c> et <d> du triangle BCD, en appelant les relations connues dans la trigonométrie, on peut écrire deux relations de la forme suivante:

$$c = \frac{b \cdot \sin (90 + \beta)}{\sin (\gamma - \beta)}; (11) \quad d = \frac{b \cdot \sin (90 - \gamma)}{\sin (\gamma - \beta)}; (12)$$

Substituant <d> par la relation (12) dans la (3) et la (5), la relation (2) devient:

$$I. \Delta h = b \cdot \frac{\sin (90 - \gamma)}{\sin (\gamma - \beta)} \sin \beta +$$

$$b \cdot \frac{\sin (90 - \gamma)}{\sin (\gamma - \beta)} \cos \beta - a \cdot \tan \alpha; (13)$$

Et puis après les calculs nécessaires il résulte, pour les degrés sexagésimaux:

$$\Delta h = b \cdot \frac{\sin (90 - \gamma) \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\gamma - \beta) \cos \alpha} - a \cdot \tan \alpha; (14)$$

(pour les grades centésimaux, on substitue la valeur de l'angle de 90° par 100°.)

II. De manière analogue, substituant <c> par la (11) dans la (8) et la (9), la relation (2) devient:

$$\Delta h = b \cdot \frac{\sin (90 + \beta)}{\sin (\gamma - \beta)} (\sin \gamma + \cos \gamma$$

$$\tan \alpha) - a \cdot \tan \alpha - b; (15) \text{ ou, encore:}$$

$$\Delta h = b \cdot \left[\frac{\sin (90 + \beta) \sin (\alpha + \gamma)}{\sin (\gamma - \beta) \cos \alpha} - 1 \right] - a \cdot \tan \alpha; (16)$$

Avec les données du problème,

$$\alpha = 15,470^\circ \quad a = 38 \text{ m} \quad H_C = 630 \text{ m}$$

$$\beta = 5,890^\circ \quad b = 10 \text{ m} \quad H_B = 620 \text{ m}$$

$$\gamma = 13,105^\circ$$

nous obtenons les résultats suivants:

I. utilisant la relation (14):

$$100 - \gamma = 86,895^\circ$$

$$\alpha + \beta = 21,360^\circ$$

$$\gamma - \beta = 7,215^\circ$$

$$\Delta h = 19,943 \text{ m}$$

II. utilisant la relation (16):

$$100 + \beta = 105,890^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 28,575^\circ$$

$$\Delta h = 19,943 \text{ m}$$

$$H_A = 620,000 - 19,943 = 600,057 \text{ m}$$

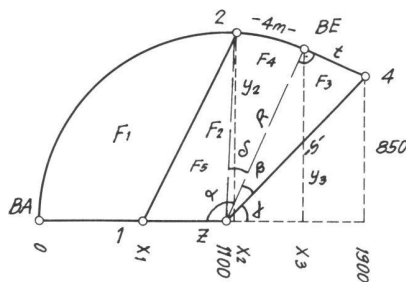
$$H_A = 600,057 \text{ m}$$

Merci beaucoup pour votre attention,

Ing. Laczko Mátyás

Aleea Creației nr.10. ap.36, 1900 Timișoara, Romania.

Lösung zu Aufgabe 5/82 Solution du problème 5/82



$$s = \sqrt{(19-11)^2 + 8.5^2} = 11.673 \text{ m}$$

$$t = \sqrt{s^2 - R^2} = 3.906 \text{ m}$$

$$\tan \delta = 8.5 : 8 \quad \delta = 51.929^\circ$$

$$\tan \beta = t : R \quad \beta = 21.722^\circ$$

$$\alpha = 200 - (\beta + \delta), \quad \alpha = 126.349^\circ$$

$$F_1 + F_2 = (t \cdot R + R^2 \arccos \alpha) : 2 = 141.56 \text{ m}^2$$

$$x_3 = R \cos (\beta + \delta) + 11 = 15.424 \text{ m}$$

$$y_3 = R \sin (\beta + \delta) = 10.071 \text{ m}$$

$$\delta = 4 \cdot \delta : R = 23.150^\circ$$

$$x_2 = 11 - R \cos (\alpha - \delta) = 11.553 \text{ m}$$

$$y_2 = R \sin (\alpha - \delta) = 10.986 \text{ m}$$

$$F_3 + F_4 + F_5 = F_2 = 70.78 \text{ m}^2$$

$$F_3 = Z, BE, 4, Z = t \cdot R : 2 = 21.48 \text{ m}^2$$

$$F_4 = Z, 2, BE, Z = 4 \cdot R : 2 = 22.00 \text{ m}^2$$

$$F_5 = Z, 1, 2, Z = F_2 - F_3 - F_4 = 27.30 \text{ m}^2$$

$$x_1 = 11 - (2F_5 : y_2) = 6.030 \text{ m}$$

Leserbriefe Courier des lecteurs

Die räumliche Helmerttransformation in algebraischer Darstellung

Zum Aufsatz von R. Köchle
in VPK 9/82, S. 292

As Köchle mentions, this problem has been dealt with by other authors too, for instance E. H. Thompson and G. H. Schut.

The formulae have nice properties, one of them being that the computation of the seven unknowns may be split into separate computations of 3 plus 1 plus 3 unknowns. But the formulae from different authors make one assumption, often not clearly mentioned, which is a serious limitation for practical use in digital photogrammetry.

The formulae suppose that *all* the points which are used when computing the seven unknowns, have known (ground) coordinates in *x* and *y* and *z*. But this is often not the case in photogrammetry. Some points may have known planimetry *x*, *y* and unknown height *z*, and other points may have only known height. In rare cases one might have points with only known *x* or *y*. In such cases one can not split the computation into separate computations of rotations, scale and translations.

To show this we may use some of the formulae from Köchle. The formulae

$$(1.1) \quad \bar{y}_i = \mu A x_i + y_0$$

and

$$(1.5) \quad (\sum v^T) dy_0 = 0$$

are still valid.

The formulae (2.1), (2.2) and (2.3) are also correct if we *presume* that the averages are made over the known *coordinates* (not points), i.e.:

$$y_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_x} \sum x_K \\ \frac{1}{n_y} \sum y_K \\ \frac{1}{n_z} \sum z_K \end{pmatrix}$$

where $\sum x_K$ is the sum of known *x*-coordinates, and n_x is the number of such coordinates.

The standard procedure to get formula (2.4) is to sum up formula (1.1) for all points with known coordinates, and including *all* coordinates, in this case known and unknown. This will lead to a value for \bar{y}_s which may be based on partly other coordinates than y_s as defined above. From this we can not proceed to (2.4).

An other possibility is to do it in this way:

$$y_s = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s - \mu A_1 \left(\frac{1}{n_x} \sum x \right) \\ y_s - \mu A_2 \left(\frac{1}{n_y} \sum y \right) \\ z_s - \mu A_3 \left(\frac{1}{n_z} \sum z \right) \end{pmatrix}$$

where $\sum x$ is the sum of measured vectors for points with known *x*. In our case we often have

$$\frac{1}{n_x} \sum x \neq \frac{1}{n_y} \sum y \neq \frac{1}{n_z} \sum z$$

Even in this case we can not proceed to Köchle's formula (2.4), and to the rest of his nice solution.

It seems to me that the best solution in practical, digital photogrammetry is to use differentiation and iterations, and to compute all the seven unknowns together.

Øystein Andersen, dosent
Department of Surveying
Agricultural University of Norway
N 1432 Ås-NLH

Zum Kommentar von Ø. Andersen

Ø. Andersen's Bemerkung trifft zu, die Formeln in meinem Artikel setzen die Kenntnis aller Koordinaten in beiden Punkthaufen voraus. Eine Verallgemeinerung liesse sich durch Anbringen von Gewichten an den einzelnen Punktkoordinaten erreichen, welche bei fehlenden Koordinatenwerten nach Bedarf null gesetzt werden könnten.

Über die Anwendung am Beispiel der Helmerttransformation hinaus lag mir daran zu zeigen, wie sich räumliche Drehungen ohne Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen, insbesondere ohne die explizite Einführung von Drehwinkeln, einzig durch Ausnützen der algebraischen Eigenschaften der Drehmatrix \mathbf{A} behandeln lassen. Alle bekannten Formeln mit \mathbf{A} , die auf Linearisie-

rung beruhen, liessen sich nach dem Schema meiner Gleichungen (5.10) und (5.11) entwickeln. Dort wird für kleine Drehungen eine *bis* und mit auf Glieder erster Ordnung orthogonale Matrix

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + d\mathbf{I}$$

eingeführt, worin $d\mathbf{I} = d\mathbf{i}_x$ ist. Der Vektor $d\mathbf{i}_x$ enthält die kleinen Winkelzuschläge der konventionellen Formeln. Konventionell werden dann gewöhnlich diese Zuschläge zu den Näherungswerten der Drehwinkel addiert, und mit Hilfe trigonometrischer Funktionen wird ein besserer Wert für \mathbf{A} als Ausgangswert für einen nächsten Iterationsschritt berechnet.

Ein anderer Weg, auf dem man den Matrixkalkül nicht zu verlassen brauchte, wäre der folgende:

Ein Vergleich mit der linearisierten Formel von Cayley (5.1)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}) (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \cong (\mathbf{I} + \mathbf{S}) (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \cong \mathbf{I} + 2\mathbf{S} = \bar{\mathbf{A}}$$

ergibt die Beziehung

$$d\mathbf{i}_x = d\mathbf{I} = 2\mathbf{S}$$

Mit $d\mathbf{i}_x$ und Gleichung (5.1) kann man eine streng orthogonale Matrix aufbauen als

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + \frac{1}{2} d\mathbf{i}_x) (\mathbf{I} - \frac{1}{2} d\mathbf{i}_x)^{-1}$$

oder mit Gleichungen (5.2) und (5.5) auch als

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + d\mathbf{i}_x (\mathbf{I} - \frac{1}{2} d\mathbf{i}_x)^{-1}$$

die nun Ausgangswert für den nächstfolgenden Iterationsschritt ist. R. Köchle

Nous engagerions dès que possible, un jeune

Ingénieur rural et géomètre EPF

titulaire du brevet fédéral d'ingénieur géomètre, pour assumer des responsabilités en matière d'améliorations foncières de génie rural et urbain et de mensuration cadastrale.

En cas de convenance, nous offrons la possibilité d'accéder à une situation indépendante.

Prière d'adresser les offres manuscrites à P. Milliet et J. Weidmann, ingénieurs géomètres officiels 10, rue de la Maison Rouge, 1400 Yverdon

Wir suchen per sofort oder nach Vereinbarung jüngeren, einsatzfreudigen

Vermessungszeichner

für Nachführung, Neuvermessung, Güterzusammenlegung, Tiefbau

Gerne erwarten wir Ihre Bewerbung

Armin Wenger, dipl. Ing. ETH/SIA, Ingenieurbüro, Sternenstrasse 25, 3360 Herzogenbuchsee 063/61 12 17 G, 063/61 22 88 P

Bureau d'ingénieurs-géomètres à Morges cherche un

Ingénieur ETS en mensuration et génie rural

ayant pratique en informatique et en remaniement parcellaire semi-urbain.

Faire offre manuscrite au Bureau GUEISSAZ & BINER, rue Saint-Louis 1, 1110 Morges.

26, mit Praxis in Vermessung, Güterzusammenlegung, allg. Tiefbau, sucht neue Stelle.

B. Kunz, Mühlemattweg 9
5036 Oberentfelden AG
Tel. Geschäft: 064/22 31 62

Vermessungstechniker FA

Dipl. Kulturingenieur ETH (28)

mit Geometerpatent sucht nach zweijähriger Tätigkeit in der Grundbuchvermessung neuen Wirkungskreis in der Vermessung oder im Bereich der Kulturtechnik.

Offerte bitte unter Chiffre VK 121 an Cicero-Verlag AG, Postfach, 8021 Zürich

Modernes, vielseitiges Vermessungsbüro in Genf sucht:

jungen, qualifizierten Vermessungszeichner

Arbeitsbereich: Zeichnen von Grundbuchplänen neuvermessener Gemeinden, topographischen Plänen und allgemeiner Tiefbau, Nachführung.

Wir bieten: Angenehmes Arbeitsklima, 40-Stunden-Woche, gute Möglichkeit zum Erlernen der französischen Sprache.

Offerten sind zu richten an: MORAND & BOVIER, Ingénieurs Géomètres Officiels 33, route de Troinex, 1234 Genève, Téléphone: (022) 43 66 88/43 66 87

Dipl. Kulturingenieur ETH

mit Erfahrung in Vermessung sucht auf Anfang 1983 eine Stelle vorzugsweise im Meliorationswesen.

Offerten unter Chiffre VR 012 Cicero-Verlag AG, Postfach, 8021 Zürich

Nous cherchons

Technicien-géomètre

Entrée à convenir.

Bureau technique Claude THURLER, Ing.-géom. off. Av. du Clos d'Aubonne 17, 1814 La Tour-de-Peilz. Tél. 021/54 53 34.

Vermessungszeichner

35, mit abgeschlossenem Fachpraktikum in NV, Erfahrung in Nachführung und Bauabsteckung, sucht interessante Stelle in GBV.

Evtl. auch Bauvermessung oder Leitungskataster, in Privat- oder Verwaltungsbetrieb.

Region Bern-Thun-Emmental Stellenantritt: Anfang 1983 oder nach Vereinbarung.

Ihr Angebot erreicht mich unter Chiffre VD 121 Cicero-Verlag AG, Postfach, 8021 Zürich