

<b>Zeitschrift:</b>	Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)
<b>Band:</b>	80 (1982)
<b>Heft:</b>	12
<b>Artikel:</b>	Kleinste Quadrate und andere Ausgleichverfahren
<b>Autor:</b>	Kubik, K.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-231187">https://doi.org/10.5169/seals-231187</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Kleinste Quadrate und andere Ausgleichungsverfahren

K. Kubik

Die Methode der kleinsten Quadrate verhält sich bei groben Fehlern ungünstig. Es werden robuste Schätzungen gezeigt, die diesen Nachteil nicht haben, insbesondere die sog. Dänische Methode.

*En cas d'erreurs grossières, la méthode des moindres carrés se comporte de façons défavorables. Les estimations robustes, qui sont présentées ci-après, ne possèdent pas ce désavantage, tout particulièrement la méthode dite Danoise.*

## 1. Einleitung

Wir möchten in dieser Abhandlung die Allgemeingültigkeit der Methode der kleinsten Quadrate in Frage stellen und mögliche alternative Ausgleichungsverfahren angeben. Diese Abhandlung enthält nicht so sehr fertige Lösungen, sondern vielmehr Anregungen für künftige Forschung in Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung.

## 2. Warum nicht die Methode der kleinsten Quadrate?

Nennen wir zuerst die positiven Eigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate: Sie hat sich seit vielen Jahrzehnten in der Praxis bewährt, und sie ist rechentechnisch einfach durchzuführen.\*

Die Nachteile: Die Methode ist ungeeignet, Ausreißer (grobe Fehler) in den Messdaten zu entdecken; die Resultate der Ausgleichung (Schätzwerte) werden durch die Ausreißer stark beeinflusst (vgl. Abb. 1 und 2).

### Kleinste Quadrateschätzung

Gegeben:  
5 Messwerte für eine Distanz:  
10 m, 11 m, 12 m, 12 m, 20 m

Gesucht:  
Schätzwert für Distanz  
Lösung:

Mit der Methode der kleinsten Quadrate erhalten wir den Schätzwert aus dem arithmetischen Mittel:  
 $D = 13 \text{ m}$

Abb. 1 Schätzung des Mittelwertes

In vielen Fällen werden Ausreißer durch die Methode der kleinsten Quadrate so erfolgreich verborgen, dass diese auch durch statistische Tests nicht mehr entdeckt werden können (vgl. Abb. 2).

\* Mit Ausdrücken der Statistik: Wir erhalten unverzerrte und effiziente lineare Schätzfunktionen.

Ausreißer sind allerdings wegen der automatischen Registrierung ein wesentlicher Anteil der Messdaten. So berichtet das Geodätische Institut Dänemark von 1% Ausreißern in den Messdaten. Automatische Fehlersuch- und Eliminationsverfahren sind daher unerlässlich. Die Methode der kleinsten Quadrate ist hierfür nicht geeignet.

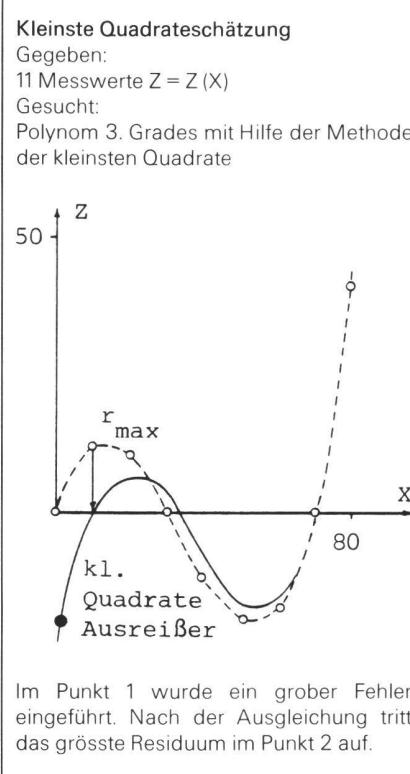


Abb. 2 Polynom Regression

Ein weiterer Nachteil: Aufgrund der verfeinerten Messmethoden sind die verbleibenden Fehler in den Messdaten nicht mehr normalverteilte Zufallsgrößen, sondern zeigen ein kompliziertes und verfahrensgeprägtes Verhalten. Mit der Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhält man nicht mehr optimale Genauigkeiten; ein Be-

schreiben dieser Fehler durch «zufällige» (normalverteilte) und «systematische» Fehleranteile ist nicht mehr möglich. Die Abbildungen 3 bis 5 zeigen Beispiele für Fehlerverhalten. In allen Fällen ist das Fehlerverhalten wohl aus dem Messverfahren her verständlich, kann aber nicht durch die uns vertrauten einfachen Modelle beschrieben werden. Auch das Konzept der Korrelation ist hierfür nicht ausreichend.

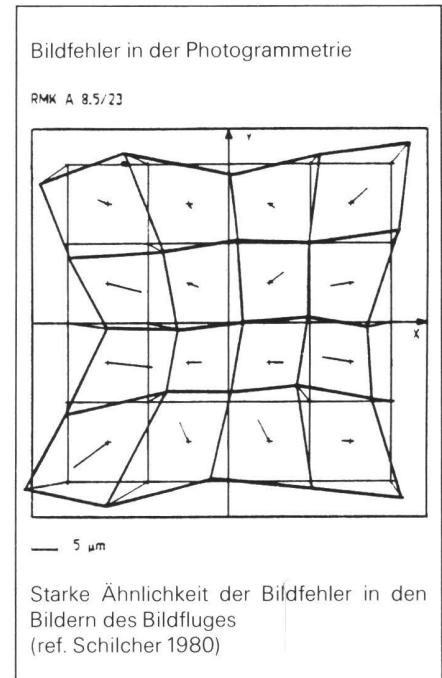


Abb. 3

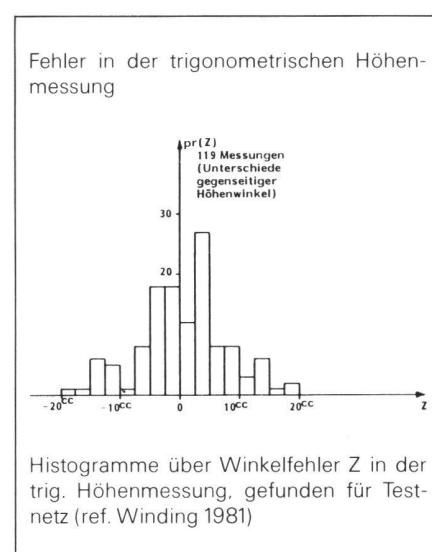
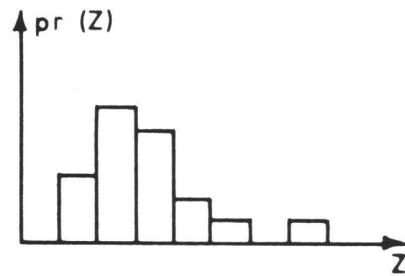


Abb. 4

### Fehler in der Radionavigation



Histogramme von Messung einer Teststrecke mit Hilfe von Radioabstandsmessung (Phasenvergleich, 400-MHz-System) (ref. Kubik 1981)

Abb. 5

Eine Analyse der Messverfahren ist notwendig, um eine Fehlertheorie aufzustellen, und geeignete Ausgleichungsverfahren sind notwendig, um diesem Fehlerverhalten Rechnung zu tragen. Speziell für Zuverlässigkeitssagen ist es notwendig, sich auf die tatsächliche Fehlerverteilung und nicht auf Normalverteilung zu beziehen, da sonst ganz falsche Schlüsse gezogen werden.

### 3. Was nun?

Ideal wären Ausgleichungsverfahren, welche ungeachtet des tatsächlichen Fehlerverhaltens nahezu optimale Resultate erzielen. Wir möchten diese Ausgleichungsverfahren robuste Verfahren nennen. Für ein Beispiel einer robusten Schätzung des Mittelwertes vgl. Abb. 6.

#### Robuste Schätzung des Mittelwertes

Gegeben:

5 Messwerte für eine Distanz:  
10 m, 11 m, 12 m, 12 m, 20 m

Gesucht:

Robuster Schätzwert für Distanz

Lösung:

Der Median (zentraler Messwert nach Rangordnung der Messwerte) ist unbeeinflusst von der Grösse der Ausreisser.  
Median  $\bar{D} = 12 \text{ m}$

Abb. 6

Die robusten Schätzverfahren wurden in den Siebzigerjahren besonders in der Schweiz, und zwar in Zürich, gefördert.\* Hier sind besonders zu nennen die Verfahren von Huber, 1972, und Hampel, 1978. Für die Anwendung dieser Verfahren innerhalb des Vermessungswesens vgl. Carosio, 1979.

\* Ich trage deshalb „Eulen nach Athen“.

Das Wesen dieser Methoden besteht darin, dass nicht die Quadratsumme der Residuen minimiert wird, sondern eine geeignete gewählte Funktion

$$\Sigma \Phi(r) \rightarrow \min.$$

Ein einfaches Beispiel hiervon ist:  $\Phi(r) = |r|$ , welches Verfahren auf die Schätzung des Mittelwertes mittels des Medians führt (vgl. Abb. 6).\* Gegenwärtig gibt es viele verschiedene Vorschläge für die Wahl der Funktion  $\Phi(r)$  (vgl. Andrews et al., 1972), aber es fehlt eine übergeordnete Theorie für Klassifikation und Vergleich dieser Methoden. Nur eines ist sicher, die Methode der kleinsten Quadrate gibt die schlechtesten Resultate bei Auftreten von Ausreisern oder Abweichungen von der Normalverteilung (Andrews et al., 1972).

Die numerische Lösung des Ausgleichungsprinzips  $\Sigma \Phi(r) \rightarrow \min.$  kann iterativ geschehen, und zwar mittels wiederholter Durchführung der Methode der kleinsten Quadrate: Das Gleichungssystem

$$\Sigma \frac{\delta \Phi}{\delta x}(r) = \Sigma \Psi(r) = 0; x \text{ Unbekannte}$$

kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\Sigma p(r) \cdot r = 0$$

wobei  $p(r) = \frac{\Psi(r)}{r}$  ist. Es wird jeweils eine gewichtete kleinste Quadrate-Ausgleichung vorgenommen, wobei die Gewichte  $p(r)$  aus obiger Formel und den Residuen der vorhergehenden Iteration berechnet werden. Als Startwerte werden die gebräuchlichen Gewichte verwendet.

Für unser Beispiel  $\Sigma |r| \rightarrow \min.$  ergibt sich die numerische Lösung zu:

- 1)  $p = 1$
- 2) Gewichtete kleinste Quadrate-Ausgleichung
- 3) Berechnung neuer Gewichte  
 $p = \frac{1}{|r| + \epsilon}; \epsilon \text{ kleiner Wert}$
- 4) Zurück zu 2.

Üblicherweise sind etwa 10 Iterationen für die Konvergenz des Verfahrens notwendig.

Abb. 7 zeigt die Anwendung dieser Methode auf das in Abb. 2 genannte Beispiel.

In den meisten hier genannten robusten Schätzmethoden werden Ausreisser nicht vollständig verworfen; sie erhalten lediglich ein viel geringeres Gewicht als in der Methode der kleinsten Quadrate.

#### Robuste Schätzung $\Sigma |r| \rightarrow \min.$

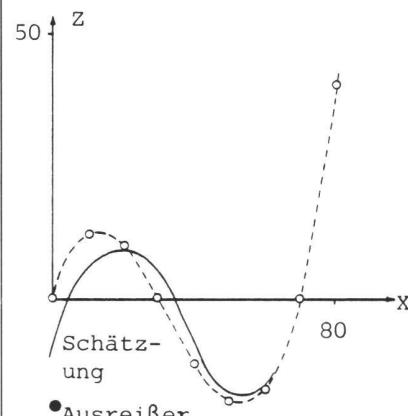
Gegeben:

11 Messpunkte, wovon 1 Ausreisser

Gesucht:

Polynom 3. Grades

Lösung:



Die Methode zeigt den Ausreißer in Punkt 1 deutlich auf, kann ihn aber nicht völlig eliminieren.

Abb. 7 Polynom Regression

### 4. Was ist die Dänische Methode?

In der Dänischen Methode (Krarup, 1967; Krarup et al., 1980) werden die Unbekannten aus der grösstmöglichen Anzahl miteinander konsistenter Messdaten geschätzt. Ausreisser, welche in der Minderzahl sind, werden verworfen. Abb. 8 zeigt das Prinzip der Dänischen Methode für die Berechnung des Mittelwertes. Der Rechenalgorithmus für die Dänische Methode ist wie folgt:

$$\Sigma (pr^2)_\alpha \rightarrow \min.$$

$$p_{\alpha+1} = p_\alpha \cdot f(r_\alpha)$$

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{|r| \sqrt{p_0}}{\sigma} < c \\ \exp - \left( \frac{|r| \sqrt{p_0}}{c \cdot \sigma} \right) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha = 0, 1, 2, \dots$$

#### Schätzung des Mittelwertes Dänische Methode

Gegeben:

6 Messwerte für eine Distanz:  
10 m, 11 m, 12 m, 12 m, 20 m, 22 m

Messgenauigkeit:  $\sigma = \pm 1 \text{ m}$

Gesucht:

Schätzwert für Distanz.

Lösung:

Die Messwerte werden in Gruppen von Werten eingeteilt, welche sich untereinander um weniger als  $\pm 2\sigma$  unterscheiden:

(10, 11, 12, 12) und (20, 22).

Der Schätzwert für die Distanz wird aus der grössten Gruppe als arithm. Mittel berechnet:  $\bar{D} = 11,25 \text{ m}$ .

Abb. 8

\* Diese Methode wurde von Edgeworth, 1887, vorgeschlagen, hat sich aber wegen damaliger rechentechnischen Schwierigkeiten nicht durchgesetzt.

Es handelt sich also wieder um einen iterativen Kleinste-Quadrat-Algorithmus mit Anpassung der Gewichte. Die Konstante  $c$  wird üblicherweise 2 oder 3 gewählt,  $\sigma$  bezeichnet die Standardabweichung der Messung (mittlerer Fehler der Gewichtseinheit) und  $p_0$  die gebräuchlichen Gewichte. Üblicherweise sind 6–10 Iterationen für die Konvergenz des Verfahrens notwendig. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist abhängig von der Konditionierung (Stabilität) des Problemes. Für verschiedene Aufgabenklassen erwiesen sich daher auch verschiedene Gewichtsfunktionen als am besten geeignet (Kubik, 1982). Ihnen allen gemeinsam ist das Verwerfen von Messwerten ausserhalb eines Vertrauensintervall. Das Verfahren wird seit 1967 als Standard-Rechenverfahren vom Dänischen Geodätischen Institut verwendet. Als weiteres Beispiel zur Dänischen Methode sei genannt, dass in der Polynom-Regression von Abb. 2 der Ausreißer in seiner vollen Grösse gefunden und verworfen wird.

## 5. Vergleich der verschiedenen Schätzverfahren

Wir betrachten als Beispiel eine lineare Regression mit 4 Messpunkten (vgl. Abb. 9). Als zulässige Lösungen betrachten wir hier lediglich 10 Geraden  $Z = a + bx$  mit verschiedenen Konstanten  $a$  und Neigungen  $b$ , und wir werden untersuchen, welche Variante optimal für verschiedene Ausgleichskriterien ist. Intuitiv werden wir wohl eine Gerade, welche durch die ersten 3 Messpunkte geht, als die meist geeignete Lösung empfinden.

Die Koeffizienten der 10 Lösungsmöglichkeiten sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt. Für jede Gerade ergeben sich

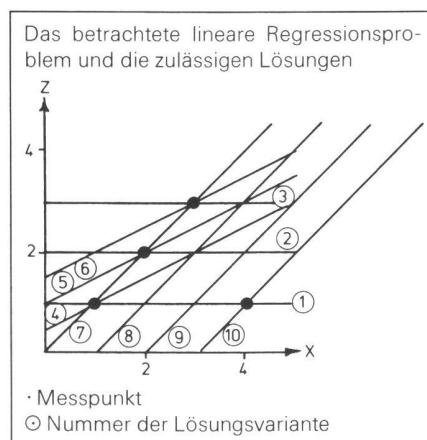


Abb. 9 Vergleich verschiedener Ausgleichungsmethoden

Residuen an den 4 Messpunkten (vgl. Tabelle 1.2). Aus diesen Residuen werden die Werte für die verschiedenen Schätzkriterien ausgerechnet und die optimale Gerade ermittelt (vgl. Tabelle 1.3).

Wir sehen, dass das Kriterium  $\sum |r_i| \rightarrow \min$  keine eindeutige Lösung besitzt. Nicht weniger als fünf Geraden ergeben den niedrigsten Funktionswert 3. Die horizontale Gerade ② ist optimal für die Methode der kleinsten Quadrate. Die Gerade ⑦ ist optimal für alle anderen Kriterien. Diese Gerade entspricht unserer intuitiven Lösung.

## 6. Eine Parabel und abschliessende Empfehlungen

Nehmen wir an, dass Galilei und Newton erst jetzt lebten und nun die Ptolemäische Theorie der Planetenbewegungen mit der Erde als Zentrum umstossen müssten. Diese Theorie ist inzwischen durch Hinzufügen von Korrektionsgliedern (Korrektur für systemati-

sche Fehler) in Computerprogrammen so verfeinert worden, dass die Planetenbewegungen genügend gut beschrieben werden. Etwaige Abweichungen in Beobachtungen werden als Ausreisser klassifiziert (dies ist tatsächlich zur Zeit von Ptolemäus mit richtigen Beobachtungen von arabischen Astronomen geschehen). Haben nun Galilei und Newton eine Chance, mit ihren ganz andersartigen Ideen durchzudringen? Sie hätten es jedenfalls sehr schwer – «Wir müssten ja alle unsere Computerprogramme ändern» und «Wir müssten alle Ptolemäischen Ingenieure umschulen». Und doch ist es wesentlich, diese Theorien von Galilei und Newton einzuführen.

Ich sehe die Fehlertheorie und die Ausgleichungsrechnung in einer ähnlichen Situation. Viele Konzepte liegen aus praktischen Gründen fest. Und doch ist es wesentlich, dass man es wagt, neue Wege einzuschlagen, um ein tieferes Verständnis zu erreichen. In meinen Augen ist eine erneute Analyse der Messprozesse für die verschiedenen geodätischen Aufgaben notwendig, um darauf die Entwicklung von neuen Ausgleichungsmethoden aufzubauen. Diese kleine Abhandlung möge dafür als Anregung dienen.

### Literatur

- Andrews et al. (1972): Robust Estimation of Location. Princeton University Press.
- Carosio, A. (1979): Robuste Ausgleichung. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 11/1979, S. 293.
- Edgeworth, F.Y. (1887): A New Method for Reducing Observations Relating to Several Quantities. Phil. Mag. (5th Series), 24 p. 222–224.
- Hampel, F.R. (1978): Modern Trends in the Theory of Robustness. Math. Operationsforschung Statist. Ser. Statistics Vol. 9 No. 3, 425–442.
- Huber, P.J. (1972): Robust Statistics: A Review. The Annals of Math. Stat., Vol. 43 No. 4, pp. 1041–1067.
- Krarup, T. (1967): Personal Communications.
- Krarup, T., K. Kubik and J. Juhl (1980): Götterdämmerung over Least Squares Adjustment. Proceedings, 14th Congress of Int. Soc. Photogr., Hamburg.
- Kubik, K. (1982): An Error Theory for the Danish Method. Proceedings, Symposium of Comm. III of Int. Soc. of Photogr., Helsinki.
- Kubik, K. (1981): Test of Syledis Radio Navigation Equipment. Report, Aalborg University Centre, 1981.
- Schilcher, M. (1980): Empirisch-statistische Untersuchungen zur Genauigkeitsstruktur des photogrammetrischen Luftbildes. Deutsche Geod. Komm. Reihe C, Nr. 262.
- Winding, P. (1981): On the accuracy of trigonometric levelling. Publication of the Institute for geodesy and photogrammetry, Aalborg University, 1981.

Adresse des Verfassers:  
Prof. K. Kubik

Aalborg Universitetscenter  
Fibigerstrasse 4, DK-9220 Aalborg Ost

Tab. Nr.	Gerade Nr.	Zulässige Geraden durch die Messpunkte									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.1	Koeffizient a	1	2	3	0.5	1	1.5	0	-1	-2	-3
	Koeffizient b	0	0	0	0.5	0.5	0.5	1	1	1	1
1.2	Residuen										
	1	0	-1	-2	0	0.5	-1	0	-1	-2	-3
	2	1	0	-1	0.5	0	-0.5	0	-1	-2	-3
	3	2	+1	0	1	0.5	0	0	-1	-2	-3
	4	0	-1	-2	-1.5	-2	-2.5	3	+2	+1	0
1.3	Schätzkriterien										
	$\sum  r_i  \rightarrow \min$	3	3	5	3	3	4	3	5	6	9
	$\sum r_i^2 \rightarrow \min$	5	3	9	3.5	4.5	7.5	9	7	13	27
	$\sum r_i^{1/2} \rightarrow \min$	2.4	3	3.8	3	2.8	3.3	1.7	4.4	5.2	5.1
	$\sum r_i^{-1/2} \rightarrow \min$	2.2	3.0	3.4	2.9	2.9	3.1	1.3	4.2	4.6	3.9
	Dänische Methode	0.9	1.1	1.5	1.0	0.9	1.8	0.4	1.6	2.0	1.3
	$N(r_i > 0.5) \rightarrow \min^*$	2	3	3	3	3	1	4	4	4	3
	$N(r_i > 1) \rightarrow \min$	2	3	3	2	1	2	1	4	4	3

Tabelle 1 Beispiel einer linearen Regression; \*  $N(r_i \geq a)$  bedeutet: Anzahl der Residuen kleiner oder gleich  $a$