

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 79 (1981)

**Heft:** 6

**Artikel:** Zur Fehlertheorie von Messreihen mit pseudosystematischen Fehlern

**Autor:** Keiser, O.M. / Matthias, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-230661>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Fehlertheorie von Messreihen mit pseudosystematischen Fehlern\*

O. M. Keiser, H. Matthias

Beim Messen und Vermessen in der industriellen Messtechnik und im Vermessungswesen können Messreihen vorkommen, deren einzelne Beobachtungen mit sogenannten einseitigen oder pseudosystematischen Fehlern behaftet sind. In der Regel werden die Erwartungswerte der Zufallsgrößen in diesen Fällen nicht korrekt geschätzt.

In dieser Arbeit wird der Einfluss solcher Fehler an drei idealisierten Modellbeispielen behandelt, die in der Praxis auf konkrete Messprozesse angewendet werden können. Zum Schluss folgt im Anhang ein Überblick über die verschiedenen Arten von systematischen Fehlern und deren Bezeichnungsweise. Inhalt: 1. Einseitige oder pseudosystematische Fehler, 2. Mehrmalige direkte Längenmessung mit einem Mikrometer, 3. Längenmessung einer Teilstrecke mit Stab, Band oder Draht, 4. Zusammengesetzte einmalige und wiederholte Staffelmessung, 5. Andere mögliche Anwendungen, 6. Anhang: Überblick über Arten von systematischen Fehlern.

*Ce travail présente l'influence de telles erreurs sur 3 modèles, qui peuvent être appliqués à des cas concrets de mesures. Enfin, en annexe sont énumérés les différents types d'erreurs systématiques ainsi que leur description. Sommaire: 1. Erreurs unilatérales ou pseudo-systématiques, 2. Mesure répétée d'une longueur avec un micromètre, 3. Mesure de la longueur d'un tronçon avec latte, cheville, fil invar, 4. Mesure unique ou répétée d'une distance par ressauts horizontaux, 5. Autres applications possibles, 6. Annexe: aperçu des différents types d'erreurs systématiques.*

## 1. Einseitige oder pseudosystematische Fehler

Aus [1] entnehmen wir: «Bei einseitigen Fehlern ist nur das Vorzeichen systematisch, nämlich stets konstant, während ihr Grössenbetrag unregelmässig variiert. Es handelt sich um eine Mischform von völlig unregelmässigen mit völlig systematischen Fehlern» sowie «pseudosystematische Fehler sind zufällige Fehler, die nur ein systematisches Verhalten, wie z. B. gewisse Periodizitäten, vortäuschen.» Nach der Terminologie in [1] und gemäss Tabelle 5 im Anhang handelt es sich um zufällige Fehler.

## 2. Mehrmalige direkte Längenmessung mit einem Mikrometer

Mikrometer werden in der Feinwerktechnik zum Ausmessen kleiner Werkstücke verwendet. Z. B. Messbereich: 25 mm – 50 mm Auflösung: Teilungsintervall 0,01 mm, Schätzung 0,001 mm,  $\sigma \approx 0,002$  mm. Durchmesser Anschlagfläche: 6 mm.

Gemessen wird die Länge  $n$ -Mal mit dem Mikrometer. Dabei wird die Messschraube jedesmal zurückgedreht und der Stab von neuem zwischen die

Anschlagflächen plaziert. Es ergeben sich die Messwerte  $l_1, l_2, \dots, l_n$ .

### Diskussion der zufälligen, normalverteilten Beobachtungsfehler

Die *Einspannkraft* wird nach dem Zudrehen des Mikrometers nicht immer gleich gross sein. Sie bewirkt elastische Deformation an den Endflächen des Werkstückes und an den Anschlagflächen des Mikrometers sowie des Mikrometerbogens. Durch zweckmässige Arbeitsweise oder konstruktive Vorkehrungen (Druckbegrenzungsfeder) kann dafür gesorgt werden, dass die tatsächliche Anschlagkraft um einen Mittelwert normal verteilt ist. Die *Ablesefehler* des Mikrometers werden zufälliger Natur sein, abgesehen von dem systematischen periodischen Anteil der sog. Intervallschätzfehler, die von der Grösse des Restintervalles abhängen. Endlich seien die *räumlichen Ausrichtfehler*  $\alpha$  genannt, um die der Stab nicht parallel zur Mikrometerachse ausgerichtet wird.

### Diskussion der möglichen systematischen Instrumentenfehler

Dazu gehören *Eichfehler* des Mikrometers, verschiedene lineare *Temperaturausdehnungskoeffizienten* von Werkstück und Mikrometer, *Spindelfehler* der Messschraube, *Exzentrizität* der Teilungstrommel, *Nichtparallelität* der Anschlagflächen, *Formfehler* des Werkstückes, *Taumelfehler* der Messspindel.

## Der Ausrichtfehler

Im folgenden werden *nur* die zufälligen Ausrichtfehler  $\alpha$  betrachtet

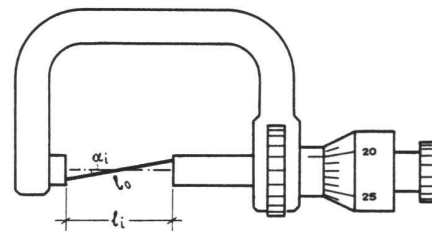


Abb. 1

### Frage

Wie kann man aus der Stichprobe der Messwerte  $l_i$  auf  $l_0$  schliessen?

#### Voraussetzungen

- Die Ausrichtfehler  $\alpha$  seien  $(0; \sigma)$
- normalverteilt
- alle übrigen zufälligen und systematischen Fehler seien Null
- der Prüfling sei unendlich dünn

(1)

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass wegen den zufälligen Ausrichtfehlern  $\alpha_i$  stets zu kleine Grössen  $l_i$  gemessen werden ( $i = 1, 2, \dots, n; l_i \leq l_0$ )

### Lösung

Zwischen  $l_i$ ,  $\alpha_i$  und  $l_0$  besteht für  $i = 1, 2, \dots, n$  die Beziehung

$$l_i \approx l_0 \left(1 - \frac{\alpha_i^2}{2}\right) \quad (2)$$

Wir definieren eine Zufallsvariable

$$L = l_0 \left(1 - \frac{A^2}{2}\right)^*$$

Für den Erwartungswert und die Varianz von  $L$  gelten dann

$$\begin{aligned} E(L) &= l_0 \left(1 - \frac{1}{2} E(A^2)\right) \\ V(L) &= \frac{1}{4} \cdot l_0^2 \cdot V(A^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Aus den Voraussetzungen folgt ferner, dass  $A^2$  Chi-Quadrat verteilt ist (1 Freiheitsgrad). Demzufolge gilt

$$\begin{aligned} E(A^2) &= \sigma^2 \\ V(A^2) &= 2\sigma^4 \end{aligned}$$

und es folgt mit (3)

$$\begin{aligned} E(L) &= l_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sigma^2\right) \\ V(L) &= \frac{1}{2} \cdot l_0^2 \sigma^4 \end{aligned} \quad (4)$$

\*) Hier werden Zufallsvariable mit grossen Buchstaben, gesuchte Parameter und Messwerte mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet.

\* Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich, Separata No. 17.

Wir betrachten nun (4) als Gleichungssystem mit den Variablen  $\sigma$ ,  $l_0$  und den Parametern  $E(L)$ ,  $V(L)$ . Die Auflösung ergibt

$$l_0 = E(L) + \sqrt{\frac{V(L)}{2}} \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \frac{2\sqrt{V(L)}}{\sqrt{2} E(L) + \sqrt{V(L)}}$$

Wir betrachten den empirischen Mittelwert  $\bar{l}$  und die empirische Varianz  $s^2$  von  $(l_i)$  als Schätzwerte für  $E(L)$  und  $V(L)$

$$\hat{E}(L) = \bar{l} \text{ wobei } \bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \quad (6)$$

$$\hat{V}(L) = s^2 \text{ wobei } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{l} - l_i)^2$$

Mit (5) und (6) ergeben sich dann die Schätzungen

$$\hat{l}_0 = \bar{l} + \frac{s}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

$$\sigma^2 = \frac{2s}{\sqrt{2}\bar{l} + s} \approx \sqrt{2} \frac{s}{\bar{l}}$$

Falls im System (4)  $\sigma$  a priori bekannt ist, ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$\hat{l}_0 = \frac{E(L)}{1 - \frac{1}{2} \sigma^2} \approx E(L) \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

und mit (6)

$$\hat{l}_0 = \bar{l} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (8)$$

Die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die erste Gleichung in (7) ergibt endlich die empirische Streuung der Schätzung von  $l_0$

$$s(l_0) = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

#### Legende

- $l_0$  gesuchte Stablänge
- $\hat{\phantom{x}}$  Zeichen für Schätzwert
- $\bar{l}$  empirischer Mittelwert der einzelnen Messwerte  $l_i$
- $\sigma$  theoretische Streuung der Ausrichtfehler  $\alpha_i$
- $\hat{\sigma}^2$  Schätzwert von  $\sigma^2$ , Varianz
- $s$  empirische Streuung der Messwerte  $l_i$
- $s(l_0)$  empirische Streuung der geschätzten Stablänge  $l_0$

#### Diskussion der Resultate

Unter den Voraussetzungen (1) ist der Erwartungswert  $E(L)$  bzw. das einfache

arithmetische Mittel  $\bar{l}$  der Messwerte systematisch von der Stablänge  $l_0$  verschieden, und zwar kleiner.

Von allen Werten  $l_i$  liegt der grösste Messwert am nächsten beim gesuchten Wert  $l_0$ . Besser ist aber der Schätzwert  $\hat{l}_0$ .

Für die «Berechnung» von  $l_0$  ist die Formel (8) anzuwenden, wenn  $\sigma$  a priori bekannt ist oder angenommen werden muss, falls  $i$  sehr klein oder gar 1 ist. Mit den Formeln (7) und (9) werden  $l_0$  und  $s(l_0)$  bei genügend grossen Stichproben geschätzt.

In der Praxis sind die hier ausschliesslich betrachteten pseudosystematischen Fehler durch andere zufällige Fehler und rechnerisch oder methodisch nicht eliminierte systematische Fehler überlagert.

Sie wurden zuvor bereits diskutiert. Hinzu kommen noch solche, die vorliegen können, wenn die Idealisierung des unendlich dünnen Stabes aufgegeben wird. Sie werden in Abb. 2 angedeutet.

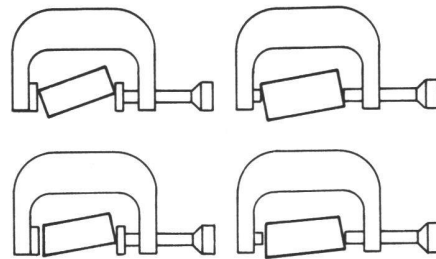


Abb. 2

### 3. Längenmessung einer Teilstrecke mit Stab, Band oder Draht

In Abb. 3 ist die sog. Staffelmessung schematisch dargestellt.

#### Beschreibung des Messprozesses

Das Profil kann z.B. das Gelände darstellen oder eine feinwerktechnische Messbahn; Abb. 3 ist für diesen letzten Fall natürlich stark überhöht. Gesucht ist die horizontale oder zu einer Basis  $H$  parallele Strecke (Länge)  $l_0(P_0P_n)$  von  $P_0$  nach  $P_n$ . Es werden dazu die einzelnen Teilstrecken  $l_0(ij)$  mit freihängenden, zwei- oder mehrfach aufgelegten, evtl. gespannten Drähten, Messbändern oder Stäben gemessen. Das Zusammenfügen von  $P_0^3$  nach  $P_3$  erfolgt direkt mechanisch oder durch Loten mit dem Senkblei oder optisch mit Lotfernrohr oder -Mikroskop. Dabei werden in der Regel die einzelnen Teilstrecken nur einmal gemessen. Wiederholungen gibt es für die ganze Strecke  $P_0P_n$ . Dabei sind die Teilstreckenpunkte  $P_i$  in der Regel nicht identisch.

#### Mögliche, zufällige und systematische Fehler

Die vielen möglichen Fehler werden hier nicht diskutiert.

#### Frage

Es wird nur die Teilstrecke  $P_2P_3$  in Abb. 3 betrachtet. Wie kann man aus den Messwerten  $l_i = l_i(P_2P_3)$  auf die horizontale Teilstrecke  $l_0(P_2P_3)$  schliessen?

#### Voraussetzungen

- Es werden nur die horizontalen bzw. vertikalen Ausrichtfehler  $\alpha$  bzw.  $\beta$  betrachtet
- Alle übrigen zufälligen und systematischen Fehler seien Null
- Die Ausrichtfehler  $\alpha$  bzw.  $\beta$  seien  $(0; \sigma_\alpha)$  - bzw.  $(0; \sigma_\beta)$  - normalverteilt. Ferner gelte  $\sigma_\alpha = \sigma$ ;  $\sigma_\beta = \kappa \cdot \sigma$
- Bei den Werten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  gibt es keine Autokorrelationen und keine Kreuzkorrelationen

#### Lösung

In Analogie zur Herleitung von (2), wegen der Geometrie allerdings mit einem Vorzeichenwechsel, gilt hier

$$l_i = l_0 \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{2} \mp \dots\right) \left(1 + \frac{\beta_i^2}{2} \mp \dots\right)$$

Ausmultiplizieren und Beschränkung auf Glieder 2. Ordnung ergibt

$$l_i \approx l_0 \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{2} + \frac{\beta_i^2}{2}\right) \quad (11)$$

Die «zugehörige» Zufallsvariable lautet

$$L = l_0 \left(1 + \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right)$$

und für den Erwartungswert und, die Varianz gelten wie bei (3)

$$E(L) = l_0 \left(1 + \frac{E(A^2)}{2} + \frac{E(B^2)}{2}\right)$$

$$= l_0 \left(1 + \frac{\sigma_\alpha^2}{2} + \frac{\sigma_\beta^2}{2}\right)$$

$$V(L) = \frac{l_0^2}{4} [V(A^2) + V(B^2)]$$

$$= \frac{l_0^2}{4} (2\sigma_\alpha^4 + 2\sigma_\beta^4)$$

$$= \frac{l_0^2}{2} (\sigma_\alpha^4 + \sigma_\beta^4)$$

Mit (10), wonach  $\sigma_\alpha = \sigma$ ;  $\sigma_\beta = \kappa \cdot \sigma$ , ergibt sich nun das Gleichungssystem

$$E(L) = l_0 \left(1 + \frac{1 + \kappa^2}{2} \sigma^2\right) \quad (12)$$

$$V(L) = \frac{l_0^2}{2} (1 + \kappa^4) \sigma^4$$

und dessen Auflösung nach  $l_0$ ,  $\sigma^2$  führt zu

$$l_0 = E(L) - \sqrt{\frac{(1 + \kappa^2)^2}{1 + \kappa^4}} \cdot \sqrt{\frac{V(L)}{2}} \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \frac{2\sqrt{V(L)}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \kappa^4} E(L) - (1 + \kappa^2)\sqrt{V(L)}}$$

Wiederum werden der empirische Mittelwert  $\bar{l}$  und die empirische Varianz  $s^2$  als Schätzwerte für  $E(L)$  und  $V(L)$  betrachtet. So ergeben sich

$$\begin{aligned}\hat{l}_0 &= \bar{l} - \sqrt{\frac{(1+\kappa^2)^2}{1+\kappa^4}} \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{2s}{\sqrt{2}\sqrt{1+\kappa^4}\bar{l} - (1+\kappa^2)s} \\ s(l_0) &= \frac{s}{\sqrt{n}}\end{aligned}\quad (14)$$

mit dem Sonderfall für  $\kappa = 1$ , bzw.  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$

$$\begin{aligned}\hat{l}_0 &= \bar{l} - s \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{s}{\bar{l} - s} \approx \frac{s}{\bar{l}} \\ s(l_0) &= \frac{s}{\sqrt{n}}\end{aligned}\quad (15)$$

Falls  $\sigma$  a priori bekannt ist, erhalten wir aus (12)

$$\begin{aligned}\hat{l}_0 &= \bar{l} \left(1 - \frac{1+\kappa^2}{2} \sigma^2\right) \\ \text{sowie für } \kappa &= 1 \\ \hat{l}_0 &= \bar{l} (1 - \sigma^2)\end{aligned}\quad (16)$$

#### Legende

- $l_0$  gesuchte horizontale Teilstrecke
- $\hat{\phantom{x}}$  Zeichen für Schätzwert
- $\bar{l}$  empirischer Mittelwert der Messwerte  $l_i$
- $s$  empirische Streuung der Messwerte  $l_i$
- $\sigma$  theoretische Streuung der  $\alpha_i$  ( $\sigma = \sigma_\alpha$ )
- $\kappa$  Faktor;  $\kappa \cdot \sigma_\beta = \sigma$
- $s(l_0)$  empirische Streuung von  $l_0$

Bei der Staffelmessung wird häufig  $i = 1$  sein. D.h. die einzelnen Teilstrecken werden nicht wiederholt gemessen. Deshalb ist oft nur (16) von Bedeutung.  $\sigma$  und  $\kappa$  müssen a priori angenommen werden oder aus Erfahrung oder Experiment zur Verfügung stehen.

#### Numerisches Beispiel

Messbandmessung einer Teilstrecke

Annahmen:

$n = 1$ ;  $l_i = \bar{l} = 10.000 \text{ m}$

$\sigma = 0.01$ ;  $\kappa = 2$

Resultat:

$\hat{l}_0 = 10.000 \text{ m} - 0.0025 \text{ m}$

## 4. Zusammengesetzte Staffelmessung

### 4.1 Einmalige Messung

#### Gesucht

sind Schätzwerte für den Erwartungswert  $E(L)$  der Strecke  $P_0P_n$  und für die Varianz  $V(L)$ .

#### Die Staffelmessung

wird mit einem Stabpaar von konstanter und gleicher Länge durchgeführt, siehe Abb.3. Dabei unterlaufen die unvermeidbaren vertikalen Ausrichtfehler  $\beta_i$  gegenüber dem Horizont und die horizontalen Ausrichtfehler  $\alpha_i$  gegenüber der jeweiligen Visierlinie nach  $P_n$ .

#### Bemerkungen

Bei der Staffelmessung gibt es verschiedene Arbeitsweisen. Details können dabei für die fehlertheoretische Bearbeitung von Bedeutung sein. In unserem Fall sind auf dem Profil nur die Punkte  $P_0$  und  $P_n$  markiert. Die Lage der Zwischenpunkte ergibt sich durch das fortlaufende alignieren. Das Profil kann wiederum z.B. das Gelände sein oder eine feinwerktechnische Messbahn. Die Lotung in der Vertikalebene kann mechanisch oder optisch erfolgen und das Ausrichten auf den Endpunkt in der Horizontalen von Auge oder optisch.

Von den vielen möglichen zufälligen Beobachtungsfehlern sowie systematischen Instrumentenfehlern und anderen Modellfehlern werden nur die in (10) genannten betrachtet.

#### Voraussetzungen

- Es gelten dieselben Voraussetzungen (10) wie im letzten Abschnitt
- Zu beachten ist lediglich, dass dort der Index  $i$  für die Wiederholungsmessungen derselben Teilstrecke stand; hier aber steht der Index  $i$  für die einmalige Messung der verschiedenen Teilstrecken

**Bemerkenswert** ist die Tatsache, dass wegen den zufälligen Ausrichtfehlern  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  stets zu grosse Werte für die gesuchte Grösse  $P_0P_n$  gemessen werden.

#### Lösung

$$\overline{P_0P_n} = \sum \overline{P_{i-1}P_i}$$

$$\overline{P_{i-1}P_i} = l_0 \cos \beta_i \cos \varphi_i$$

$$= l_0 \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2} \pm \dots\right) \left(1 - \frac{\varphi_i^2}{2} \pm \dots\right)$$

$$\approx l_0 \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2} - \frac{\varphi_i^2}{2}\right)$$

$$\overline{P_0P_n} \approx \sum_{i=1}^n l_0 \left(1 - \frac{\beta_i^2}{2} - \frac{\varphi_i^2}{2}\right)$$

$$\approx n \cdot l_0 - \frac{l_0}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \frac{l_0}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \quad (18)$$

In (18) sind die  $\varphi_i$  durch die direkten Beobachtungen  $\alpha_i$  zu ersetzen, siehe Abb.3

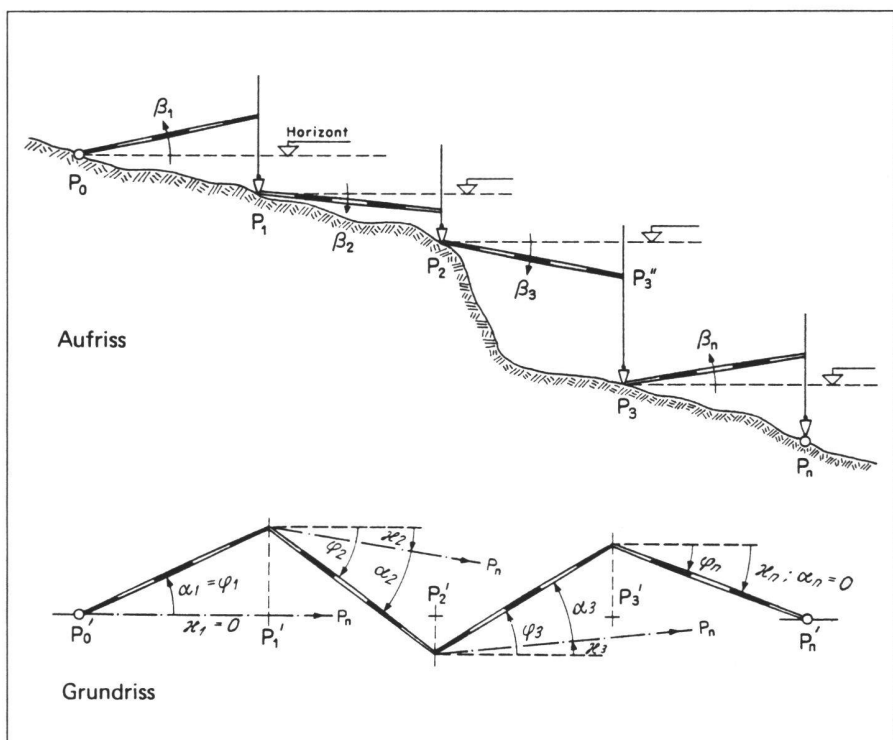


Abb.3

$$\varphi_1 = \alpha_1$$

$$\varphi_2 \approx \kappa_2 + \alpha_2 \approx -\varphi_1 \cdot \frac{l_0}{P_1 P'_n} + \alpha_2$$

$$\approx -\frac{\alpha_1 \cdot l_0}{(n-1) l_0} + \alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{(n-1)} + \alpha_2$$

Analog können wir nun die Beziehungen für  $\varphi_3, \varphi_i, \varphi_n$  anschreiben

$$\varphi_3 = \kappa_3 + \alpha_3 \approx -\frac{\alpha_1}{n-1} - \frac{\alpha_2}{n-2} + \alpha_3$$

$$\varphi_i = \kappa_i + \alpha_i \approx -\frac{\alpha_1}{n-1} - \frac{\alpha_2}{n-2} - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{n-i+1} + \alpha_i$$

$$\varphi_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\alpha_j}{n-j}$$

$$\varphi_n = \kappa_n = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{n-j}; \text{ da } \alpha_n = 0$$

(19)

Die Summe der  $\varphi_i^2$  ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 &= \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\alpha_j}{n-j} \right)^2 \\ &= \left( \frac{n}{n-1} \alpha_1^2 + \frac{n-1}{n-2} \alpha_2^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \alpha_{n-2}^2 + 2 \alpha_{n-1}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i+1}{n-i} \alpha_i^2$$

(20)

(20) in (18) eingesetzt führt zu

$$\overline{P_0 P'_n} \approx n \cdot l_0 - \frac{l_0}{2} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i+1}{n-i} \alpha_i^2 \right)$$

Nun bilden wir die Zufallsvariable

$$L = n \cdot l_0 - \frac{l_0}{2} \left( \sum_{i=1}^n B_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i+1}{n-i} A_i^2 \right) \quad (21)$$

und setzen voraus, dass  $B_i: (0, \sigma_\beta)$  - normalverteilt sowie  $A_i: (0, \sigma_\alpha)$  - normalverteilt sind. Mit diesen Voraussetzungen folgt, dass  $B_i^2$  und  $A_i^2$  Chi-Quadrat verteilt sind und demnach gilt wieder

$$\begin{aligned} E(B_i^2) &= \sigma_\beta^2 & E(A_i^2) &= \sigma_\alpha^2 \\ V(B_i^2) &= 2\sigma_\beta^4 & V(A_i^2) &= 2\sigma_\alpha^4 \end{aligned} \quad (22)$$

Daher ist der Erwartungswert von L gemäss (21)

$$\begin{aligned} E(L) &= n \cdot l_0 - \frac{l_0}{2} \left( \sum_{i=1}^n E(B_i^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i+1}{n-i} E(A_i^2) \right) \\ &= n \cdot l_0 - \frac{n}{2} l_0 \sigma_\beta^2 - \frac{1}{2} l_0 \sigma_\alpha^2 \cdot \sum_{i=n-1}^1 \left( 1 + \frac{1}{n-i} \right) \end{aligned}$$

$$= n \cdot l_0 - \frac{n}{2} l_0 \sigma_\beta^2 - \frac{1}{2} l_0 \sigma_\alpha^2 \cdot (n-1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i})$$

$$E(L) = l_0 \left( n - \frac{n}{2} \sigma_\beta^2 - \frac{(n-1 + H_1^{n-1})}{2} \sigma_\alpha^2 \right) \quad (23)$$

Mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz sowie mit (21), (22) berechnen wir jetzt die Varianz von L

$$\begin{aligned} V(L) &= \frac{l_0^2}{4} \left( \sum_{i=1}^n V(B_i^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{n-i} \right)^2 V(A_i^2) \right) \\ &= \frac{l_0^2}{4} \left( 2\sigma_\beta^4 \cdot n + 2\sigma_\alpha^4 \sum_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{2}{n-i} + \frac{1}{(n-i)^2} \right) \right) \\ &= \frac{l_0^2}{2} \left( n \cdot \sigma_\beta^4 + \sigma_\alpha^4 \left( (n-1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$V(L) = \frac{l_0^2}{2} \left( n \cdot \sigma_\beta^4 + \left( (n-1) + 2H_1^{n-1} + Q_1^{n-1} \right) \sigma_\alpha^4 \right) \quad (24)$$

Legende

$H_1^{n-1}$ : Harmonische Reihe

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \\ &= C + \ln(n-1) + \frac{1}{2(n-1)} \\ &\quad - \frac{1}{12(n-1)^2} - \dots \end{aligned}$$

C: Euler'sche Konstante

$$= 0,57721 \dots \quad (25)$$

$Q_1^{n-1}$ : Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n-1)} \\ &\quad - \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \dots \end{aligned}$$

## Diskussion des Resultates

Die Staffelmessung ist ein stochastischer Prozess

Der Erwartungswert  $E(L)$  ist systematisch vom n-fachen Wert der einzelnen Stablänge  $l_0$  verschieden, und zwar kleiner

Für die Schätzung von  $E(L)$  sind theoretische oder empirische Streumasse der beteiligten Zufallsgrößen erforderlich

## 4.2 Mehrmalige wiederholte Messung

In Abb. 4 ist der Grundriss von Abb. 3 mit Ergänzungen dargestellt

### Messung

Der Messprozess von Ziff. 4.1, Abb. 3 wird nun m-mal von A nach E gemäss Abb. 4 wiederholt.  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sind jeweils gegenüber  $l_0$  sehr kleine Reststrecken

### Gesucht

ist der Schätzwert für  $l_{AE}$  und die empirische Streuung

### Voraussetzungen

- Es gelten dieselben Voraussetzungen (17) bzw. (10)
- $r \ll l_0$ , r: Reststück
- Die  $r_i$  werden jeweils fehlerfrei gemessen

(26)

### Lösung

Es ist:

$$\overline{P_0 P'_n} = l_i + r_i,$$

beziehungsweise

$$r_i = \overline{P_0 P'_n} - l_i$$

Die zugehörige Zufallsvariable ist

$$R = \overline{P_0 P'_n} - L$$

$$E(R) = \overline{P_0 P'_n} - E(L) \quad (27)$$

$$V(R) = V(L)$$

Mit (23) und (24) ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(R) &= \overline{P_0 P'_n} - l_0 \left( n - \frac{n}{2} \sigma_\beta^2 - \frac{n-1 + H_1^{n-1}}{2} \sigma_\alpha^2 \right) \\ V(R) &= \frac{l_0^2}{2} \left[ n \sigma_\beta^4 + (n-1 + 2H_1^{n-1} + Q_1^{n-1}) \sigma_\alpha^4 \right] \end{aligned}$$

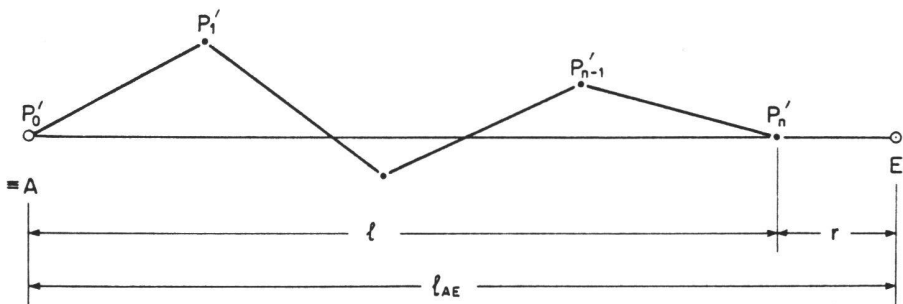


Abb. 4

Wir setzen wieder  $\sigma_\beta = \kappa \sigma_\alpha = \kappa \sigma$

$$E(R) = \overline{P_0 P_n} - l_0 \left[ n - \frac{1}{2} (n\kappa^2 + n - 1 + H_1^{n-1}) \sigma^2 \right]$$

$$V(R) = \frac{l_0^2}{2} (n\kappa^4 + n - 1 + 2 H_1^{n-1} + Q_1^{n-1}) \sigma^4 \quad (28)$$

Das Gleichungssystem (28) kann nach  $\overline{P_0 P_n}$  (und  $\sigma^2$ ) aufgelöst werden. Dazu führen wir zunächst die Abkürzungen a, b ein

$$a = n \cdot \kappa^2 + n - 1 + H_1^{n-1}$$

$$b = (n\kappa^2 + n - 1 + 2 H_1^{n-1} + Q_1^{n-1})^{1/2} \quad (29)$$

$$E(R) = \overline{P_0 P_n} - n \cdot l_0 + \frac{l_0}{2} \cdot a \cdot \sigma^2$$

$$\sqrt{V(R)} = \frac{l_0}{\sqrt{2}} b \cdot \sigma^2$$

So ergeben sich schliesslich

$$\overline{P_0 P_n} = n \cdot l_0 + E(R) - \frac{a}{b} \sqrt{\frac{V(R)}{2}} \quad (30)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{2 V(R)}}{b \cdot l_0}$$

Mit den Schätzungen  $\hat{E}(R) = \bar{r}$  und  $\hat{V}(R) = s_r^2$  erhalten wir

$$\hat{\overline{P_0 P_n}} = n \cdot l_0 + \bar{r} - \frac{a}{\sqrt{2} b} \cdot s_r \quad (31)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sqrt{2} s_r}{b \cdot l_0}$$

und ferner gilt

$$s_{\overline{P_0 P_n}} = \frac{s_r}{\sqrt{m}} \quad (32)$$

### Legende

- $l_0$  bekannte, konstante Stablänge
- $\hat{\phantom{x}}$  Zeichen für Schätzwert
- $\bar{r}$  Reststück, empirischer Mittelwert
- $n$  Anzahl Stablagen
- a, b Abkürzungen, siehe (29)
- m Anzahl Wiederholungen
- $\sigma$  theoretische Streuung der  $\alpha_i$  ( $\sigma = \sigma_{\alpha_i}$ )
- $\kappa$  Faktor;  $\kappa \sigma_\beta = \sigma$
- s empirische Streuung
- H Harmonische Funktion siehe (25)
- Q Hilfsfunktion siehe (25)

Modellfehler		
Systematische Fehler (1) (2)	Veränderliche systematische Fehler (6) – Fortschreitende system. Fehler – Periodische system. Fehler	Quasisystematische Fehler (6) Pseudozufällige Fehler
Regelmässige Fehler (1) (3)		
Gesetzmässige Fehler (1) (4)		
Beherrschbare Fehler (1) (5)		
Modellfehler (1)		
Anpassungsfehler (1)	Konstante systematische Fehler (6)	

### Numerisches Beispiel

Messbandmessung  
 $l_0 = 10.00 \text{ m}$   
 $n = 12$   
 $\overline{P_0 P_n} \approx 120 \text{ m}$   
 $\bar{r} = 1 \text{ m}$   
 $m = 4$   
 $\kappa = 2$   
 $s_r = 0.01 \text{ m}$   
 $H_1^{12-1} = 3.02$   
 $Q_1^{12-1} = 1.56$   
 $a = 62.0$   
 $b = 8.16$   
 $\hat{\overline{P_0 P_n}} = (120.000 + 1.000 - \frac{62.0}{\sqrt{2} \cdot 8.16} \cdot s_r) \text{ m}$   
 $= (121.000 - 5.4 \cdot s_r) \text{ m}$   
 $= (121.000 - 0.054) \text{ m}$   
 $\hat{\sigma} = 0.013 (= \sigma_\alpha; = 2 \sigma_\beta)$   
 $s_{\overline{P_0 P_n}} = 0.005 \text{ m}$

### Diskussion

Die Annahme  $s_r = 0.01$  (bei  $\overline{P_0 P_n} \approx 120 \text{ m}$ ) ist klein; es handelt sich jedoch nur um den Einfluss der «pseudosystematischen» zufälligen Ausrichtfehler. Die systematische Verfälschung des empirischen Mittelwertes bei  $m = 4$  Messungen beträgt aber 5,4 cm! Man kann auch sagen: Für  $n = 12$ ,  $\sigma_\alpha = 1,3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\kappa = 2$  ergibt sich eine systematische Verfälschung des empirischen Mittelwertes von  $4,5 \cdot 10^{-4}$ .

### 5. Andere mögliche Anwendungen

Sicher gibt es, besonders in der Feinwerktechnik, verschiedene interessante Anwendungen. In der Photogrammetrie gilt dasselbe wahrscheinlich für die fehlertheoretische Untersuchung des (heute allerdings nicht mehr so aktuellen) Folgebildanschlusses.

### 6. Anhang: Überblick über Arten von systematischen Fehlern

Die im folgenden aufgeführten Begriffe und Bezeichnungen sind dem Lehrbuch [1] von H. Wolf entnommen. Sie entsprechen dem Gebrauch in der deutschsprachigen Literatur über Fehlertheorie und Fehlerrechnung. Auf Grund jener Erläuterungen wurde in Tabelle 5 die synoptische Darstellung einer Gliederung versucht.

Tabelle 5  
in Anlehnung an [1]

Einseitige zufällige Fehler (7)  
Pseudosystematische Fehler  
Zufällige Fehler

Alle mit (1) versehenen Bezeichnungen sind Synonyme für denselben Begriff. Die Bezeichnung *systematische Fehler* (2) ist den Bezeichnungen (3) und (4) vorzuziehen; die Wahrscheinlichkeitstheorie ermittelt ja auch *Regeln* und *Gesetzmässigkeiten* für Parameter der Häufigkeitsverteilung von Zufallsvariablen, gegen die die systematischen Fehler klar abgegrenzt werden sollen. Die Bezeichnung beherrschbare Fehler (5) kommt offenbar vor allem in der Feinwerktechnik vor.

Bei der Lösung von Aufgaben der Geodäsie und Vermessung wird die Wirklichkeit mit dem mathematischen Modell, seinem funktionalen und seinem stochastischen Teil, mit einer zweckmässigen Feinheit angenähert. Diese Feinheit kann von verschiedenen Faktoren abhängen, etwa von der angestrebten Genauigkeit, von der Auflösung und Genauigkeit der Messinstrumente, von der Grössenordnung möglicher systematischer Fehler der Instrumente sowie von den getroffenen geometrischen und physikalischen Annahmen. Abweichungen des mathematischen Modells von der Wirklichkeit werden *Modellfehler* genannt.

Für die weitere Erläuterung der einzelnen Arten von Modellfehlern bzw. systematischen Fehlern (6) in Tabelle 5 wird auf [1] verwiesen.

### Literatur

[1] Wolf, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968

Adresse der Verfasser:  
Dipl. math. Otto M. Keiser, Hochstrasse 44, CH-8044 Zürich

Prof. Dr. H. J. Matthias, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich