

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 76 (1978)

Heft: 7

Artikel: Indirekte astrogeodätische Geoidbestimmung

Autor: Gurtner, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-229221>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Indirekte astrogeodätische Geoidbestimmung

W. Gurtner

Résumé

Les grandes variations de la déviation de la verticale en Suisse rendent la détermination astrogéodésique du géoïde peu précise. On obtient de meilleurs résultats en introduisant un cogéoïde lié à un modèle de masse et en appliquant la formule de Bruns. Il en résulte un géoïde de structure très fine. Le modèle de masse utilisé compte de la topographie, des différentes épaisseurs de la croûte, et du corps d'Ivrea, la plus importante anomalie de masse à l'intérieur de la zone considérée. Le cogéoïde correspondant fut calculé directement à partir des déviations réduites de la verticale, à l'aide d'une méthode statistique d'interpolation. L'erreur moyenne des altitudes du géoïde p. r. à un point de référence n'atteint pas 10 cm dans la plus grande partie de la Suisse.

1. Einleitung

Die Aufgabe der lokalen astrogeodätischen Geoidbestimmung besteht darin, aus einer Anzahl in einem beschränkten Gebiet gegebener Lotrichtungen eine Fläche zu konstruieren, welche diese Lotrichtungen senkrecht schneidet.

Da die auf der Erdoberfläche (im allgemeinen astronomisch) gemessenen Lotrichtungen wegen der Krümmung der Lotlinien nicht mit den entsprechenden Flächennormalen der gesuchten Fläche «auf Meereshöhe» (Geoid) übereinstimmen, müssen die Messungen folglich zuerst um den Betrag der Lotkrümmungen korrigiert werden, welcher aber nur unter der Annahme eines Massenmodelles, also nicht hypothesenfrei, berechnet werden kann.

Im Gebiet der Schweiz zeigen nun die Lotabweichungen (Differenz zwischen tatsächlicher Lotrichtung und Richtung der Normalen auf ein Referenzellipsoid) infolge der rauen Topographie einen sehr unruhigen Verlauf, was die Lösung der Aufgabe wesentlich erschwert.

Die beiden wichtigsten, bis jetzt für die flächenhafte Bestimmung des Geoides der Schweiz verwendeten Methoden sind in der Zeitschrift VPK von Elmiger [1] vorgestellt worden:

a) Approximation des Geoides mit Polynomen

Die Differenzen zwischen Geoid und Ellipsoid werden als Polynom in den Landeskoordinaten x und y dargestellt:

$$N(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} c_{ik} x^i y^k \quad (1)$$

mit den Lotabweichungen

$$\xi(x, y) = -\frac{\partial N}{\partial x} = -\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} i c_{ik} x^{i-1} y^k \quad (2)$$

und

$$\eta(x, y) = -\frac{\partial N}{\partial y} = -\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} k c_{ik} x^i y^{k-1} \quad (3)$$

Die unbekannten Koeffizienten c_{ik} werden mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) im Rahmen einer Ausgleichung bestimmt. Das bis auf eine Konstante bestimmte Geoid folgt aus (1).

b) Astrogeodätisches Flächennivellement

Die Geoidhöhendifferenz ΔN_{ik} zwischen zwei Punkten mit gegebenen Lotabweichungen wird approximiert durch:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2} (\xi_i + \xi_k) (x_k - x_i) + (\eta_i + \eta_k) (y_k - y_i) \quad (4)$$

Der nicht bekannte Verlauf der Lotabweichungen zwischen den beiden Punkten P_i und P_k wird somit entlang der Strecke $\overline{P_i P_k}$ durch eine lineare Änderung des in die Richtung $\overline{P_i P_k}$ fallenden Lotabweichungsbetrages angenähert.

Mit Hilfe von (4) wird nun mit allen gegebenen LA-Stationen ein Netz von Höhendifferenzen aufgebaut, das anschliessend nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden kann. Als Resultat folgen die (wiederum bis auf eine Konstante bestimmten) Geoidhöhen der LA-Stationen.

2. Geoidbestimmung mit Hilfe der Prädiktion

Die in den letzten Jahren auch in der Geodäsie Fuss gefassten statistischen Interpolationsmethoden (vgl. z. B. [5]) lassen sich ebenfalls zur astrogeodätischen Bestimmung des Geoides benützen.

Die grundlegende Idee, die dahintersteckt, ist die, dass die Lotabweichungen an sich als Zufallsgrössen (Signale) aufgefasst werden, wobei das tatsächlich vorhandene LA-Feld einfach eine bestimmte Realisierung der Zufallsvariablen darstellt.

Die Vorschrift, wie mit Hilfe der sogenannten Prädiktion aus einem gegebenen Satz von Messgrössen \underline{x} (gemessene Signale) in einem beliebigen Punkt P die entsprechende Grösse s_P interpoliert wird, lautet (vgl. [5]):

$$s_P = \underline{c}_{sx}^T \cdot \underline{C}_{xx}^{-1} \cdot \underline{x} \quad (5)$$

mit dem quadratischen Interpolationsfehler

$$m_P^2 = c_{PP} - \underline{c}_{sx}^T \cdot \underline{C}_{xx}^{-1} \cdot \underline{c}_{sx} \quad (6)$$

Die quadratische, symmetrische Matrix \underline{C}_{xx} wird aus den gegenseitigen Kovarianzen aller gegebenen Messgrössen \underline{x} gebildet. Diese Kovarianzen setzen sich im allgemeinen zusammen aus den Kovarianzen der Zufallsgrössen (Signale) und der zufälligen Messfehler (noise).

Der Vektor \underline{c}_{sx} enthält die Kovarianzen zwischen dem Signal s_P und den Messungen \underline{x} . c_{PP} ist die Varianz des Signals s_P .

Die Kovarianz zwischen den Signalen zweier Punkte nimmt mit zunehmendem Abstand r der beiden Punkte ab und geht für $r \rightarrow \infty$ gegen null. Für $r = 0$ erhalten wir gerade die Varianz des Signales.

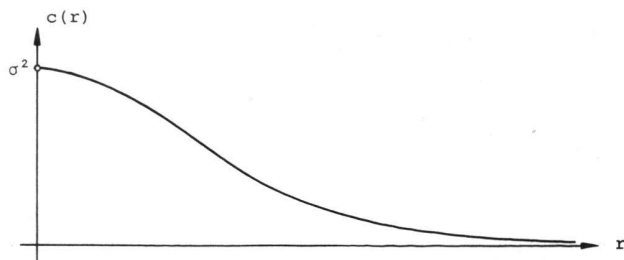


Abb. 1

Abb. 1 zeigt einen typischen Verlauf der Kovarianzen in Funktion des Abstandes r .

Zur Berechnung der Kovarianzen wird als Ansatz eine geeignete Funktion verwendet, deren freie Parameter empirisch, aus gegebenen Signalen, bestimmt werden müssen.

Beispiel:

$$c(r) = \sigma^2 \cdot e^{-r/d} \quad \text{Parameter: } \sigma, d$$

Die Formeln der Prädiktion (5), (6) lassen sich wie folgt auf unsere Aufgabe der Geoidbestimmung anwenden:

Die Geoidhöhendifferenz ΔN_{AB} zwischen zwei Punkten A und B ist gegeben durch die bekannte Beziehung:

$$\Delta N_{AB} = - \int_A^B \varepsilon \, ds \quad (7)$$

wobei $\varepsilon = \xi \cos a + \eta \sin a$ die in die Richtung des Integrationsweges fallende LA-Komponente ist.

Wir können nun formal ξ und η , und damit ε , in jedem Integrationspunkt zwischen A und B mit Hilfe von (5) interpolieren und anschliessend die Integration (7) durchführen. Als Resultat erhalten wir (die Herleitung ist in [3] zu finden):

$$\Delta N_{AB} = \left(\begin{matrix} c_{N\xi}^T \\ c_{N\eta}^T \end{matrix} - \begin{matrix} c_{N\xi}^T \\ c_{N\eta}^T \end{matrix} \right)_{(B)} \cdot C_{xx}^{-1} \cdot \underline{x} \quad (8)$$

\underline{x} enthält die Lotabweichungen ξ, η aller gegebenen Stationen, C_{xx} die Kovarianzen zwischen den Stützwerten ξ_i, ξ_k bzw. η_i, η_k bzw. ξ_i, η_k .

Verwenden wir für die Kovarianzfunktionen $c_{\xi\xi}, c_{\eta\eta}, c_{\xi\eta}$ den folgenden Ansatz (Markovmodell 3. Ordnung, vgl. [4]):

$$\begin{aligned} c_{\xi\xi}(r, a) &= \sigma^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r}{d^2} \cdot \cos a \right) \cdot e^{-r/d} \\ c_{\eta\eta}(r, a) &= \sigma^2 \left(1 + \frac{r}{d} - \frac{r}{d^2} \cdot \sin a \right) \cdot e^{-r/d} \\ c_{\xi\eta}(r, a) &= c_{\eta\xi}(r, a) = - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{r}{d} \cdot e^{-r/d} \end{aligned} \quad (9)$$

erhalten wir in (8):

$$\begin{aligned} c_{N\xi}(r, a) &= \sigma^2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{r}{d} \right) \cdot e^{-r/d} \cdot \cos a \\ c_{N\eta}(r, a) &= \sigma^2 \cdot r \cdot \left(1 + \frac{r}{d} \right) \cdot e^{-r/d} \cdot \sin a \end{aligned} \quad (10)$$

r ist der Abstand, a das Azimut zwischen den beiden Punkten, für die (9) bzw. (10) jeweils angewendet wird: in (9) also zwischen je zwei LA-Stationen, in (10) zwischen Punkt A bzw. Punkt B und je einer LA-Station.

$c_{N\xi}$ und $c_{N\eta}$ können nun als Kovarianzfunktionen zwischen Geoidhöhen und Lotabweichungen interpretiert werden. Vergleichen wir (8) mit (5), sehen wir, dass wir also mit dem Verfahren der Prädiktion Geoidhöhen (-differenzen) direkt aus Lotabweichungen bestimmen können. Verwenden wir als A immer denselben Punkt, als B den Laufpunkt der Fläche, erhalten wir somit punktweise die Geoidhöhendifferenzen gegenüber einem Ausgangspunkt, und mit (6) den quadratischen Fehler der bestimmten Geoidhöhen gegenüber dem Ausgangspunkt A.

In [3] ist eine etwas eingehendere Darstellung der Methode enthalten, wo auch weitere Literaturhinweise zur Prädiktion gegeben sind.

3. Der Satz von Bruns

Numerische Untersuchungen in [3] zeigten nun, dass sich die mittleren Fehler der Geoidhöhen praktisch unabhängig von der gewählten, in den Abschnitten 1 und 2 beschriebenen Methoden in der Grössenordnung von 40 cm bewegen, falls ein Netz von schweizerischen LA-Stationen mit einem mittleren Punktabstand von ca. 40 km zugrunde gelegt wird. Diese Netzdichte entspricht etwa der Dichte der im grössten Teil der Schweiz vorhandenen LA-Stationen.

Die Interpolationsgenauigkeit lässt sich nun folgendermassen wesentlich erhöhen:

Wir können uns die Geoidundulationen als aus zwei verschiedenen Anteilen zusammengesetzt denken:

- Aus dem Anteil, der von einem von uns gewählten Massenmodell herrührt. Dieses Massenmodell, ein Modell der Erdkruste in einem begrenzten Gebiet, wird gebildet aus einer geeigneten Approximation der Topographie, einer mittleren Dichte des Krustenmaterials und allenfalls bekannter Störmassen. Es kann im weiteren beispielsweise isostatische Kompensationsmassen enthalten oder die unterschiedliche Mächtigkeit der Erdkruste berücksichtigen: Im Idealfall enthält es die gesamte Information, die sich aus geophysikalischen Untersuchungen ergibt.
- Der zweite Anteil entsteht aus dem Einfluss aller übrigen Störmassen, die in unserem Modell fehlen oder die sich ausserhalb des begrenzten Gebietes befinden, kurz: aus dem Einfluss der Abweichungen unseres Modelles gegenüber der Wirklichkeit.

Der Anteil des Massenmodelles a) an den Geoidundulationen lässt sich in jedem beliebigen Punkt genau berechnen. Der in der physikalischen Geodäsie bekannte Satz von Bruns besagt, dass der Betrag der Hebung der ursprünglichen Niveaufläche gleich dem Quotienten aus dem Gravitationspotential der zusätzlichen Massen dividiert durch eine mittlere Schwere beträgt:

$$N_{\text{Modell}}(x, y) = \frac{T(x, y)}{\bar{g}} \quad (11)$$

Die Modellfehler b) äussern sich nun darin, dass die mit dem Massenmodell berechneten LA nicht mit den gemessenen LA übereinstimmen (abgesehen von Messfehlern!). Die Differenz

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_{\text{Messung}} - \varepsilon_{\text{Modell}}$$

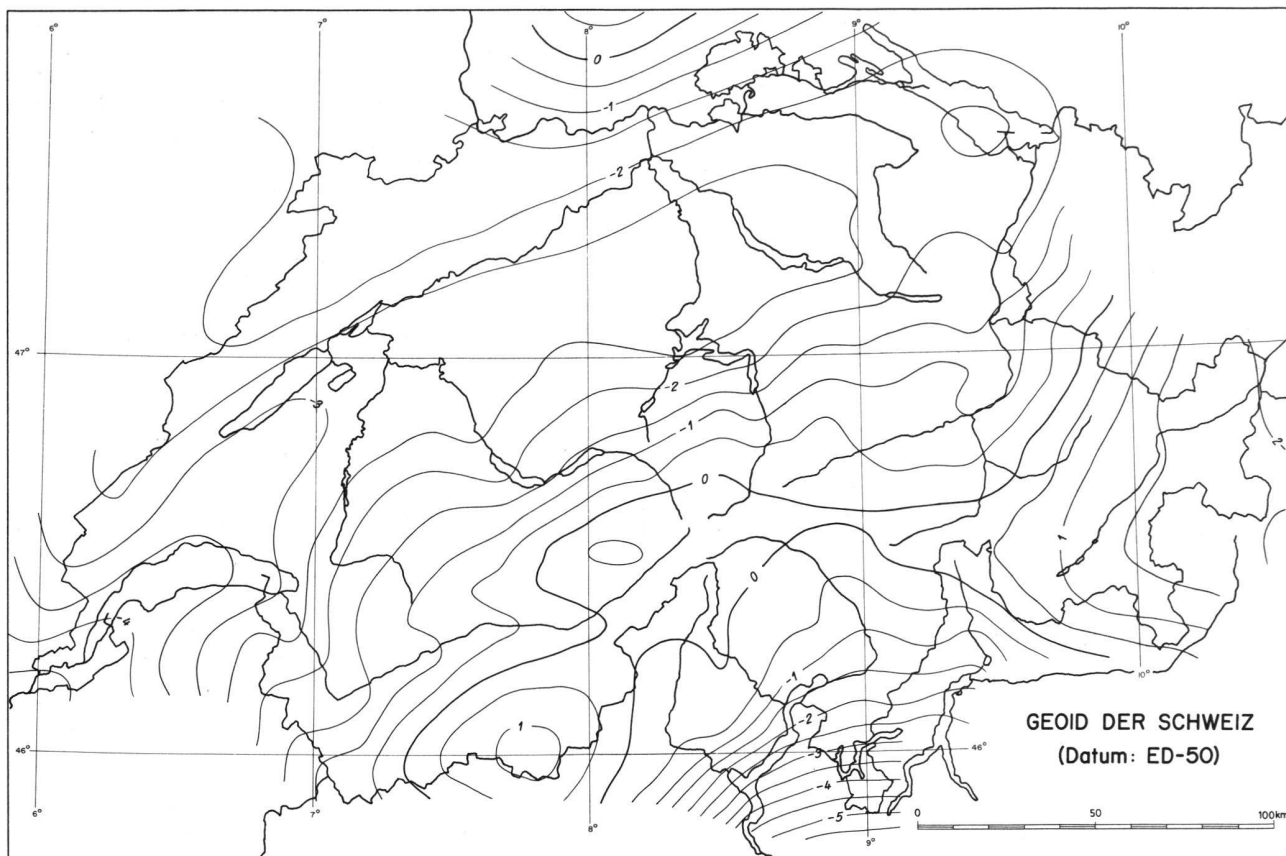


Abb. 2

die sogenannten reduzierten Lotabweichungen, sind also Ausdruck des Potentials der nicht im Modell enthaltenen Störmassen. Die dazugehörige Niveaufläche (zweiter Anteil an den Geoidundulationen) steht senkrecht auf den reduzierten Lotabweichungen und kann somit mit einer der in den Abschnitten 1 und 2 beschriebenen Methoden bestimmt werden.

Diese Fläche wird in Anlehnung an die gravimetrische Geoidbestimmung Cogeoid genannt. Sie wurde oft als Mittel zur Interpolation von LA (z. B. in [2]) benutzt. Ihr Verlauf ist wesentlich ruhiger als derjenige des Geoides, sie kann demzufolge beträchtlich genauer bestimmt werden.

Das Geoid erhalten wir schliesslich aus der Summe:

$$N_{\text{Geoid}} = N_{\text{Modell}} + N_{\text{Cogeoid}} \quad (12)$$

4. Die Bestimmung des Geoides der Schweiz

In [3] hat der Verfasser ausgedehnte Untersuchungen über die Brauchbarkeit verschiedener Massenmodelle und über die Genauigkeit der Geoidbestimmung durchgeführt, wobei die entsprechenden Cogeoiden jeweils mit verschiedenen Methoden berechnet wurden.

Als sehr gut geeignet erwies sich ein Massenmodell, das an Stelle der sonst üblichen Isostasie den aus seismischen Messungen gefundenen ungefähren Verlauf der Krusten-Mantel-Grenze (Mohorovičić-Diskontinuität) sowie die in unserem Gebiet wichtigste Störmasse, den Ivreakörper, enthält.

Der resultierende mittlere Fehler der Geoidhöhen gegenüber dem gewählten Ausgangspunkt (Schwerzen-

bach bei Zürich) beträgt im grössten Teil der Schweiz weniger als 10 cm, wiederum praktisch unabhängig von der verwendeten Methode der Cogeoidbestimmung.

Die Hauptvorteile der Prädiktion sind jedoch:

- (Co-)Geoidhöhen in beliebigen Punkten ohne zusätzliche Interpolation
- Im selben Berechnungsgang können gleichzeitig LA interpoliert werden
- In bewegten Gebieten anpassungsfähiger als die Polynomdarstellung
- Mittlere Fehler der Geoidhöhen und der interpolierten LA
- Möglichkeit, später Schweremessungen als zusätzliche Beobachtungen einzuführen.

Das definitive Cogeoid wurde deshalb mit Prädiktion bestimmt, wobei als Stützwerte total 204 reduzierte Lotabweichungskomponenten auf 121 Stationen benützt wurden.

Da die mittleren Fehler von Geoidhöhendifferenzen naher Punkte noch kleiner sind als diejenigen der Höhen selbst, genügt das vorliegende Geoid den Anforderungen, die zur Reduktion gemessener Schrägdistanzen auf das Referenzellipsoid gestellt werden.

Für die praktische Anwendung wurden die Geoidhöhen in den Eckpunkten eines die Schweiz überdeckenden Rasters von 5 km Maschenweite berechnet. Sie dienen nun als Ausgangswerte für eine einfache Interpolation an beliebigen Punkten auf einem Tischcomputer (HP 9830).

Das in Abb. 2 dargestellte Geoid bezieht sich auf das Europäische Datum 1950. Die Transformation aus dem

Schweizerischen Datum erfolgte mit dem in [1] angegebenen Verfahren.

Literatur

- [1] Elmiger, A.: Das Geoid in der Schweiz. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Fachblatt III/IV-1975.
- [2] Elmiger, A.: Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Mitt. aus dem Inst. f. Geodäsie u. Photogrammetrie der ETHZ, Nr. 12, 1969.
- [3] Gurtner, W.: Das Geoid in der Schweiz. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 32, 1978, sowie Mitt.

aus dem Inst. f. Geodäsie und Photogrammetrie der ETHZ, Nr. 20, 1978.

- [4] Jordan, S.: Self-Consistent Statistical Models for the Gravity Anomaly, Vertical Deflections, and Undulations of the Geoid. Journal of Geophysical Research, Vol. 77, No. 20, 1972.
- [5] Moritz, H.: Elements of Collocation. Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, Band 13, B. I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1975.

Adresse des Verfassers:

Dr. W. Gurtner, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Hönggerberg, 8093 Zürich

Bestimmung der Ausbruchflächen anhand photographischer Aufnahmen

Bericht über eine beim Bau des Gotthard-Strassentunnels angewandte Methode

R. Lützeltschwab

Résumé

Lors du percement des tunnels, il est très important de lever un très grand nombre de profils en travers. En effet, au cours de l'abattage de la roche, suivant la nature des couches, des cavités d'une certaine importance peuvent se présenter par suite d'éboulements. Ces cavités hors-profil doivent être bétonnées et font l'objet d'un décompte hors-forfait pour l'entreprise. Il faut donc pouvoir déterminer ces cubes hors-profil. La méthode traditionnelle, levé polaire dans chaque profil, est fastidieuse et insuffisante. Pour obtenir une certaine sécurité et éviter des surprises, il faut procéder par la méthode photographique. Cette méthode n'est pas nouvelle, mais ce qui est nouveau c'est l'appareil mis au point par Electrowatt en collaboration avec l'institut photographique de l'EPF de Zurich. L'appareil a pour but la restitution quasi automatique avec indication de la surface des profils à l'aide de l'intégrateur QUANTIMET de l'Institut.

L'article mentionne les impératifs du système, Théodolit Laser centrage parfait de la camera, point d'ajustages nécessaires pour la restitution, etc.

Malheureusement les conditions optimales ne sont pas toujours remplies: zones humides donnant des négatifs peu nets, obstacles de chantier, etc. On adopte alors un système semi-automatique, avec digimètre. Exactitude env. 1/2 %. Le dispositif qui nécessite une équipe de 5 hommes est assez coûteux; il se justifie pour les grands tunnels.

1. Allgemeine Betrachtungen

Seit 1969 sind die Vortriebsarbeiten am Gotthard-Strassentunnel im Gange. In den beiden Losen haben die Unternehmungen für den Ausbruch des Tunnelprofils die konventionelle Methode angewandt. Danach werden am Vortrieb Bohrlöcher gebohrt. Es wird ge-

sprengt, und nach erfolgter Schutterung (Auflad und Abtransport des gesprengten Materials) werden die Sicherungsmassnahmen (Versetzen von Felsankern, Auftrag von Spritzbeton usw.) angebracht. Anschliessend wiederholt sich der Zyklus in der gleichen Reihenfolge.

Auf Grund dieses Vorgehens entsteht entlang dem Tunnelprofil eine unregelmässige Felsoberfläche, deren Strukturen eine direkte Funktion der Felsqualität, der Felsbeschaffenheit (Schichtung, Klüftung), der Bohrlochdichte, des Sprengschemas, der Abschlagslänge usw. ist. Beim Betonieren der Tunnelauskleidung müssen die ausserhalb des theoretischen Tunnelprofils liegenden Hohlräume mit Beton ausgefüllt werden. Diese als Überprofilbeton bezeichnete Menge wird der Unternehmung mit einem Abzug entschädigt, welcher eine direkte Funktion der vertraglich definierten Ausbruchklassen ist.

Aus dieser Art der Abrechnung ergibt sich die Notwendigkeit, das gesprengte Tunnelprofil genau auszumessen, damit die Überprofilbetonkubaturen möglichst genau bestimmt werden können. Entsprechend dem Umfang des Bauvorhabens und der voraussichtlich aufzubereitenden Betonkubaturen war es angezeigt, für den Gotthard-Strassentunnel eine neue genaue Methode zur einfachen Ermittlung des gesprengten Tunnelprofils zu entwickeln. Die Beschreibung dieser Methode ist Gegenstand des vorliegenden Berichtes.

2. Aufgabenstellung

Die bisherige Methode zur Kontrolle der Tunnelquerschnitte am Gotthard-Strassentunnel beruht auf der Einzelpunktaufnahme. Ein in die Tunnelhauptachse gebrachter Scheinwerfer bildet Lichtpunkte (deren Richtungen sind durch entsprechende Führungen im umschliessenden Blechmantel festgelegt) an der Tunnelwand ab, nach welchen die Radien mit Messstangen ge-