

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 75 (1977)

**Heft:** 2

**Artikel:** Zur Basis-Messung mit Invar-Drähten

**Autor:** Bolte, W.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-228748>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Literatur

- (1) J. Rebstein: Die Neuvermessung (Triangulation) der Stadt Zürich, 1892.
- (2) H. Zölly: Geodätische Grundlagen der Vermessungen im Kanton Zürich. Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen, Januar-Juni 1941.
- (3) W. Fisler, A. Senti, S. Bertschmann: 50 Jahre Vermessungsamt der Stadt Zürich. Zürcher Statistische Nachrichten 3/1946, 1/1947, 1/1948.
- (4) W. Fischer: Strecken- und Richtungsgewichte. Schweizerische

Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik 5-1969.

- (5) N. Wunderlin: Bericht zum Netz I. Ordnung der Schweiz im RETRIG. Procès verbal 1975 der Schweizerischen Geodätischen Kommission.

Adresse der Verfasser:

F. Klingenberg und Ch. Leuenberger  
Vermessungsamt der Stadt Zürich, Werdmühleplatz 3,  
8023 Zürich

## Zur Basis-Messung mit Invar-Drähten

W. Bolte

### Résumé

L'étude s'occupe de la détermination à l'aide des théories de la mécanique de la longueur d'un fil en Invar suspendu. On suppose que les deux bouts du fil se trouvent à la même hauteur, et on utilise la flèche mesurée pour déterminer exactement la section transversale du fil. Il n'y existent pas encore d'expériences pratiques de la méthode.

Die klassische Basis-Messung mit Invar-Drähten ist nicht ganz unproblematisch. Wenn auch die Methoden der Längen-Messung auf diese rein mechanische Weise durch die modernen Verfahren, die auf der Laufzeit von Licht- oder Radar-Wellen beruhen, an Bedeutung verlieren, so muss aber beachtet werden, dass gelegentlich diese neueren Verfahren an klassischen geeicht werden müssen.

Es wird die Biegelinie eines gespannten, aber dennoch etwas durchhängenden Drahtes praktisch ohne jede Vernachlässigung berechnet, um genauere Unterlagen über die Längen-Messung mit Invar-Drähten zu bekommen. Dabei wird von der Differentialgleichung eines elastischen Balkens ausgegangen, der auf zwei Stützen ruht. Seine Krümmung lässt sich berechnen aus

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EJ} \quad (1).$$

Wegen der Koordinaten und anderer Bezeichnungen siehe Abb. 1.

Das Biegemoment beträgt beim betrachteten Draht

$$M = Vx - Hy - \int_0^s q(x-\xi)d\sigma \quad (2).$$

Der erste Summand rührt aus der Auflage-Kraft  $V$  her, die bei gleichen Höhen der beiden Endpunkte, was hier immer vorausgesetzt werden soll, gleich dem halben Draht-Gewicht ist. Der zweite Summand ergibt sich aus dem Horizontal-Zug und der letzte aus der Strecken-Last  $q$  des Drahtes. Dabei ist  $q$  nicht über die ganze Draht-Länge konstant, da infolge des Durchhanges an den Enden der gesamte Seil-Zug  $S$  auftritt, in der Mitte aber nur der etwas geringere Horizontal-Zug  $H$ .

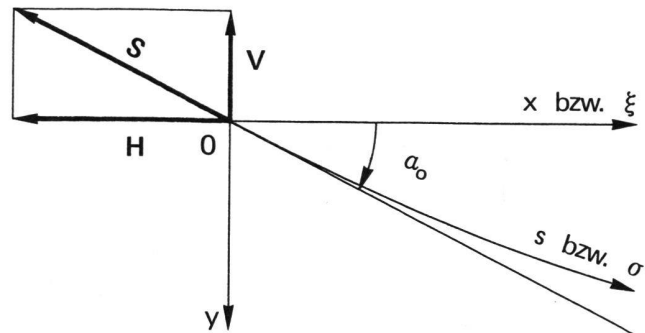


Abb. 1 Wahl des Koordinaten-Systems

Die Dehnung  $\varepsilon = \sigma/E$  beträgt mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  des Drahtes gegenüber der Horizontalen

$$\varepsilon = \frac{H}{AE \cos \alpha} = \frac{H}{AE} \sqrt{1+y'^2} \quad (3).$$

Dabei wird der unveränderte Draht-Querschnitt  $A = A_0 = \pi/4 \cdot d_0^2$  eingesetzt, da beim Zug-Versuch die Zug-Beanspruchung stets auf diesen Querschnitt, nicht auf den etwas verjüngten bezogen wird.

Ferner ist das Bogen-Element

$$d\sigma = ds = \sqrt{1+y'^2} dx \quad (4),$$

und mit der infolge der Dehnung geringeren Dichte

$$q = \frac{q_0}{1+\varepsilon} = \frac{q_0}{1 + \frac{H}{AE} \sqrt{1+y'^2}} \quad (5)$$

lautet der letzte Summand in der Gl. (2)

$$\int_0^s q(x-\xi)d\sigma = q_0 \int_0^x \frac{1}{\frac{H}{AE} + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} (x-\xi)d\xi \quad (6).$$

Der Durchmesser des Drahtes wird mit der Poisson-Konstante  $\nu$

$$d = d_0(1-\nu\varepsilon) = d_0 \left( 1 - \nu \frac{H}{AE} \sqrt{1+y'^2} \right) \quad (7)$$

erreicht.

Somit lautet die Differentialgleichung, worin das Trägheitsmoment des runden Drahtes  $I = \pi/64 \cdot d^4$  ist,

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{EI_0 \left(1 - \nu \frac{H}{AE} \sqrt{1+y'^2}\right)^4} \cdot \left( Hy - Vx + q_0 \int_0^x \frac{1}{\frac{H}{AE} + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} (x-\xi) d\xi \right) \quad (8).$$

Diese nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich in geschlossener Form natürlich nicht lösen. Auch eine numerische Lösung z. B. mit Hilfe des Verfahrens von Runge und Kutta [1], [2], [3], [4] oder Nyström [2], [3] lässt sich wegen der Instabilität der Differentialgleichung nur sehr schwer ermitteln. Denn  $y''$  hängt wegen der grossen Weichheit des Drahtes sehr stark von  $y$  ab. Eine geringfügige Änderung von  $y$  übt auf  $y''$  einen sehr grossen Einfluss aus.

Es wird darum für  $y(x)$  in Gl. (8) zunächst eine Näherungslösung eingesetzt, die dann schrittweise verbessert wird.

Zunächst werden folgende Funktionen in Abhängigkeit von  $y' = \arctan \alpha$  eingeführt:

$$F_1(y') = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{\left(1 - \nu \frac{H}{AE} \sqrt{1+y'^2}\right)^4} \quad (9)$$

und

$$F_2(y') = \frac{1}{\frac{H}{AE} + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} \quad (10).$$

Die Gl. (8) lautet dann

$$y'' = \frac{1}{EI_0} F_1(y') \left[ Hy - Vx + q_0 \int_0^x F_2(y') (x-\xi) d\xi \right] \quad (11).$$

Mit den Annahmen:

$$\begin{aligned} d_0 &= 1,65 \text{ mm} \\ S &= 10 \text{ kp} \\ \nu &= 0,3 \\ L_0 &= 50 \text{ m} \\ \gamma &= 8,13 \cdot 10^3 \text{ kp/mm}^2 \\ E &= 14.500 \text{ kp/mm}^2 \end{aligned}$$

ergeben sich die etwas gerundeten Werte (gerechnet wurde mit sechs Dezimalstellen)

$$\begin{aligned} q_0 &= 17,384 \cdot 10^{-3} \text{ kp/m} \\ EI_0 &= 189,55 \text{ kp} \cdot \text{m}^2 \\ V &= 0,5 \cdot q_0 \cdot L_0 = 0,4346 \text{ kp} \\ \alpha_0 &= \arcsin V/S = 2,491^\circ \\ H &= S \cos \alpha_0 = 9,9906 \text{ kp} \end{aligned}$$

Als erste Näherung  $y_I$  zur Lösung der Differentialgleichung wird die Ketten-Linie eingesetzt, die i. a. der Seil-Kurve eines durchhängenden dünnen Drahtes zugrundegelegt wird. Dann wird mit Hilfe der Gl. (11) unter Verwendung von  $y_I''$ ,  $F_1(y_I')$  und  $F_2(y_I')$  ein verbesserter Wert  $y_{II}$  berechnet. Es lässt sich zeigen, dass ein weiterer Iterationsschritt keine Verbesserung mehr ergibt.

Man könnte nun erwägen,  $L/2 = x(y' = 0)$  zu berechnen, d. h. die Stelle, an der der Draht seinen grössten Durchhang aufweist. Dieses Verfahren ist aber recht ungenau. Darum werde folgender Weg beschritten. Das Gewicht  $dG$  eines Bogenelementes

$$dG = q ds \quad (12)$$

ist mit  $q$  nach Gl. (5) und  $ds$  nach Gl. (4)

$$dG = q_0 \frac{1}{\frac{H}{AE} + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} dx \quad (13).$$

Der Bruch in (13) ist aber nach Gl. (10) die Funktion  $F_2(y')$ , so dass

$$dG = q_0 F_2(y') dx \quad (14)$$

ist. Dann erhält man das halbe Draht-Gewicht  $G/2$  durch Integration bis zur halben Sehnen-Länge  $L/2$ . Wegen  $V/q_0 = L_0/2$  ergibt sich für die halbe Mess-Länge  $L$  die Bestimmungsgleichung

$$\int_0^{L/2} F_2(y') d\xi = \frac{L_0}{2} \quad (15).$$

Diese Gleichung wird für  $d/d_0 = 0,9, 1,0$  und  $1,1$  numerisch mit den Formeln von E. Stiefel [5], S. 560, Anhang II, gelöst und ausser  $E = 14.500 \text{ kp/mm}^2$  auch für  $E = 13.000 \text{ kp/mm}^2$  und  $E = 16.000 \text{ kp/mm}^2$ . Die Unbekannte  $L/2$ , die als obere Grenze auftritt, lässt sich durch quadratische Interpolation oder geringfügige Extrapolation ermitteln. Die Ergebnisse sind in Tafel 1 zusammengestellt.

Der Draht-Durchmesser  $d$  lässt sich nur sehr ungenau bestimmen. Er geht aber besonders über  $q$  und damit auch  $V$  stark in die Berechnung ein. Auch eine Bestimmung des Durchmessers durch eine Wägung des Drahtes scheidet wohl aus. Schon aus diesem Grunde wurde die

Tafel 1

$\frac{d}{d_0}$ ( $d_0 = 1,65 \text{ mm}$ )	0,9			1,0			1,1		
$10^{-3}E \text{ kp/mm}^2$	13	14,5	16	13	14,5	16	13	14,5	16
$y_m \text{ mm}$	0,440.33			0,543.68			0,657.96		
$L - L_0 \text{ mm}$	+11,860	+9,564	+7,698	+2,220	+0,356	-1,150	-8,234	-9,771	-11,019

gesamte Durchrechnung für einen um 10 % kleineren und grösseren Durchmesser wiederholt, also für  $d/d_0 = 0,9$  und  $1,1$ . Dabei müssen die Änderungen sämtlicher Grössen beachtet werden, besonders von  $q$ ,  $V$  und  $H$ , aber auch der Funktionen  $F_1(y')$  und  $F_2(y')$ . Ebenso wurde der Einfluss des Elastizitätsmoduls untersucht. Der Durchgang  $y_m$  wird aber hiervon nicht merklich beeinflusst. Somit wird dieser Durchhang geradezu ein Mass für den Durchmesser  $d$ .

In Bild 2 ist das Ergebnis  $L - L_0$  über dem Durchhang  $y_m$  aufgetragen mit dem E-Modul als Parameter. Dabei ist sehr genau  $y_m \sim d^2$  und

$$d = d_0 \sqrt{\frac{y_m}{y_{m0}}} \quad (16)$$

mit  $d_0 = 1,65$  mm und  $y_{m0} = 543,68$  mm. Im Bereich  $d/d_0 = 0,9 \dots 1,1$  beträgt der Fehler weniger als 0,01 %. Um aus dem Diagramm, Abb. 2, die Werte  $L - L_0$ , die in neun Punkten so genau wie möglich berechnet wurden nicht mit verhältnismässig geringer Genauigkeit ablesen zu müssen – diese ganze Studie wäre sonst fast wertlos –, wurden Interpolationsformeln aufgestellt. Setzt man zur Abkürzung

$$l = L - L_0; \quad z = d/d_0 - 1; \quad e = (E - E_0) 10^{-3}; \quad \text{so ist} \\ l = a + bz + cz^2 \quad (17)$$

mit

$$a = 0,355.56 - 1,122.993e + 0,079.373e^2 \quad (18),$$

$$b = -96,923.6 + 2,295.377e - 0,124.704e^2 \quad (19),$$

$$c = -48,40 - 3,482.9e + 0,361.4e^2 \quad (20).$$

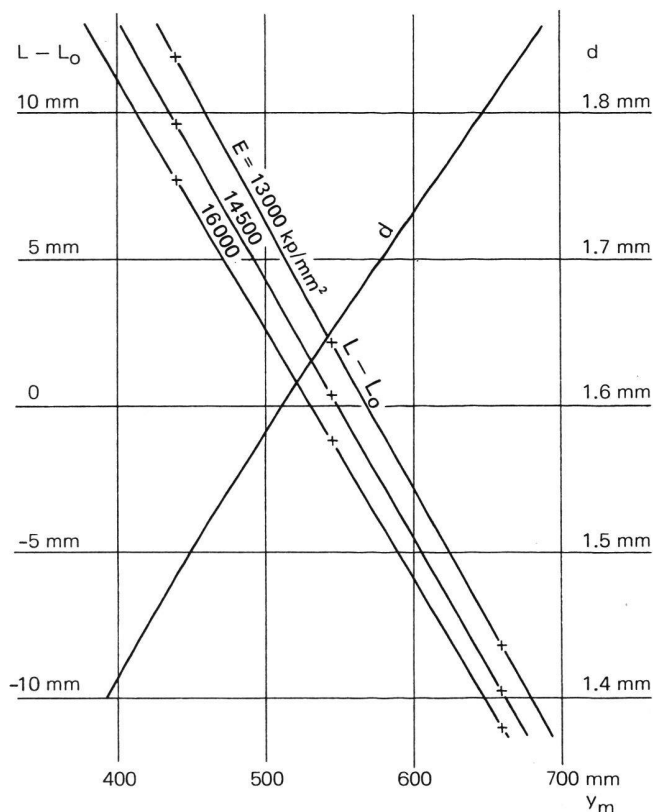


Abb. 2 Die an der Länge  $L_0$  anzubringende Korrektur  $L - L_0$  in Abhängigkeit von Durchhang  $y_m$  und E-Modul  $E$

#### Formelzeichen

A	Draht-Querschnitt	x	Längs-Koordinate in der Horizontalen
d	Durchmesser	y	Abstand des Drahtes von der Horizontalen
e	$= (E - E_0) 10^{-3}$	z	$= d/d_0 - 1$
E	Elastizitätsmodul (E-Modul)	$\alpha$	Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen, Ausdehnungskoeffizient
$F_1(y'), F_2(y')$ , s. Gln. (9) und (10)		$\varepsilon$	relative Dehnung
H	Horizontal-Kraft	$\nu$	Poisson-Konstante
I	Flächen-Trägheitsmoment	$\sigma$	Koordinate längs
l	$= L - L_0$	$\xi$	Längs-Koordinate in der Horizontalen
L	Sehnen-Länge (Mess-Strecke)		
$L_0$	Länge des ungespannten Drahtes		
M	Biegemoment		
q	Strecken-Last (Gewicht des Drahtes pro Längen-Einheit)		
R	Krümmungsradius		
s	Bogen-Länge bzw. Koordinate längs des Bogen (Drahtes)		
S	Seilzug		
V	Vertikal-Kraft (Auflage-Kraft)		
		Indizes	
		o	Anfangswert, d. h. für $x = 0$ , Ausgangs- oder Normalwert
		I, II	1. und 2. Näherung des Drahtes, Zugspannung

Mit dem Draht-Durchmesser, der im Gelände aus dem Draht-Durchhang  $y_m$  bestimmt wird, erhält man in einem Laboratoriumsversuch die Dehnung  $\varepsilon$  als Funktion der Zug-Kraft  $S$ , wobei die Länge  $L_0$  durch Extrapolation auf die Zug-Kraft  $S = 0$  ermittelt wird. Zusammen mit dem Durchmesser erhält man dann die Zugspannung und daraus den E-Modul  $E = \sigma/\varepsilon$ .

Ist z. B.  $y_m = 565,3$  mm, dann erhält man aus Gl. (16)  $d = 1,682.487$  mm, also  $d/d_0 = 1,019.689$  und  $z = 0,019.689$ . Ist z. B.  $E = 14.200$  kp/mm<sup>2</sup>, dann ist  $e = -0,3$ . Die Gln. (18) bis (20) ergeben zunächst  $a = 0,699.601.5$ ,  $b = -97,623.436.5$  und  $c = -47,322.604$  und daraus erhält man aus Gl. (17)  $L - L_0 = -1,241$  mm. Die Mess-Strecke beträgt also  $L = 49,998.759$  m. Auch der Temperatur-Einfluss wurde untersucht. Wie zu erwarten war, erhöht sich die Länge  $L$  und damit auch die Längen-Differenz  $L - L_0$  sehr genau um die Längen-Änderung  $\Delta l_t = \alpha \Delta t$ . Genauer ist wegen des Durchhanges die Änderung von  $L - L_0$  um 0,03 % (bei  $d/d_0 = 0,9$ ) bis 0,05 % (bei  $d/d_0 = 1,1$ ) kleiner als  $\Delta l_t$ . Man multipliziert also  $\Delta l_t$  mit dem Faktor 0,999.5 bis 0,999.7.

Der Verfahrensfehler dürfte höchstens  $1 \mu\text{m}$  betragen, so dass eine Basis von 1 km Länge mit einer Genauigkeit von  $20 \mu\text{m} = 0,02$  mm gemessen werden könnte. Zu diesem systematischen Fehler kommen noch die zufälligen Fehler, die durch die Unsicherheit der Ablesung bedingt sind, die bei 20 erforderlichen Messungen etwa mit dem fünffachen Wert eingehen, also den Verfahrensfehler bei weitem übersteigen dürften.

Schwierig wird es auch sein, dafür zu sorgen, dass die End-Marken des Drahtes genau über den Fest-Punkten liegen. Auch müssen die Marken genau an den Auflage-Stellen liegen, da sonst die Voraussetzungen z. B. bezüglich des Wertes  $V$  nicht erfüllt sind. Praktische Erfahrungen über dieses Verfahren liegen noch nicht vor. Sollte das spezifische Gewicht von dem in der vorliegenden Untersuchung angenommenen Wert  $\gamma = 8,13 \cdot 10^3$  kp/m<sup>3</sup> abweichen, so würden sich die Werte  $q$ ,  $V$ ,  $H$  und  $h$  ändern. Die gesamte Durchrechnung liesse sich aber mit den angegebenen Gleichungen, besonders Gl. (15) leicht wiederholen.

#### Literatur

- [1] J. Horn: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Walter de Gruyter, 1927.
- [2] Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis. Walter de Gruyter, 1928.
- [3] H. Netz (Hrsg.), G. Arnold: Formeln der Mathematik. Westermann, 1965.
- [4] «Hütte», des Ingenieurs Taschenbuch, Bd. I, Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.
- [5] E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart, 1963.

Adresse des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. W. Bolte, Helmertweg 10, D-4300 Essen 1

Schweizerischer Verein für Vermessungswesen  
und Kulturtechnik (SVVK)

Société suisse des mensurations et améliorations foncières  
(SSMAF)

### Protokoll der 73. Hauptversammlung vom 17. September 1976 im Rathaus der Stadt Zürich

Der Präsident des OK der HV 1976, M. Gagg, begrüsst die Versammlung namens der gastgebenden Sektion Zürich-Schaffhausen. Regierungsrat Küenzi überbringt die Grüsse der Regierung des Kantons Zürich und gibt einen kurzen Überblick über die Landwirtschaft und das Meliorations- und Vermessungswesen seines Kantons.

1. Präsident Dütschler begrüsst die 155 anwesenden Vereinsmitglieder, darunter drei Ehrenmitglieder, sowie die Vertreter der FKV des SIA, der SGP, der GF des SVVK, der Eidgenössischen Technischen Hochschulen, der Konferenz der Kantonsgeometer, des VSVT und der befreundeten Berufsorganisationen aus Deutschland und Österreich. Ein besonderer Gruss und Gratulation geht an den neuen Vermessungsdirektor W. Bregenzer.  
15 Mitglieder haben sich schriftlich entschuldigt.  
Die Traktandenliste wird von der Versammlung genehmigt. Als Stimmenzähler werden Frick (ZH), Nicolet (AG), Landolt (ZH), Frossard (VS) und Kreis (SG) gewählt.
2. Das *Protokoll* der 72. Hauptversammlung vom 26. September 1975 in Locarno wird genehmigt.
3. Der *Jahresbericht* 1975 des Zentralvorstandes inklusive Rechnung 1975 und Budget 1977 (publiziert in Nr. 7-76 der Zeitschrift) wird abschnittsweise genehmigt. Die Mitgliederbeiträge werden für 1977 auf Fr. 65.– und das Abonnement der Zeitschrift auf Fr. 55.– belassen.  
Die Tätigkeitsberichte der Standeskommission, der Kommissionen für berufliche Aus- und Weiterbildung, Mehrzweckkataster, Automation und Berufsinformation werden diskussionslos genehmigt. Der Bericht der Berufsbildkommission wird anlässlich eines Hearings im Herbst 1976 weiter diskutiert werden.
4. *Wahlen*
- 4.1 Als Nachfolger des demissionierenden Zentralpräsidenten H. R. Dütschler (BE) wird mit Akklamation

### Procès-verbal de la 73e assemblée générale du 17 septembre 1976, Hôtel de Ville, Zurich

Le président du comité d'organisation de l'assemblée générale 1976, M. Gagg, adresse son salut à l'assemblée au nom de la section invitante de Zurich-Schaffhouse. M. le Conseiller d'Etat Küenzi fait part des salutations du gouvernement du canton de Zurich et donne un bref aperçu sur l'agriculture, les améliorations foncières et la mensuration de son canton.

1. Le président Dütschler salue les 155 membres présents, dont trois membres d'honneur, ainsi que les délégués du GRG de la SIA, de la Société suisse de photogrammétrie, du Groupe patronal de la SSMAF, des Ecoles polytechniques fédérales, de la Conférence des géomètres cantonaux, de l'ASTG et des organisations professionnelles amies d'Allemagne et d'Autriche. Il adresse un salut particulier et ses félicitations au nouveau directeur fédéral des mensurations, M. W. Bregenzer.  
15 membres se sont fait excuser.  
L'ordre du jour est approuvé par l'assemblée. Sont désignés comme scrutateurs MM. Frick (ZH), Nicolet (AG), Landolt (ZH), Frossard (VS) et Kreis (SG).
2. Le *procès-verbal* de la 72e assemblée générale du 26 septembre 1975 à Locarno est approuvé.
3. Le *rapport annuel* 1975 du Comité central, les comptes 1975 et le budget 1977 (publiés dans le no 7-76 de la Revue) sont approuvés. La cotisation est maintenue pour 1977 à frs. 65.– et l'abonnement à la revue à frs. 55.–.  
Les rapports d'activité de la commission professionnelle, des commissions de formation professionnelle, de formation complémentaire, du cadastre polyvalent, d'automation et d'information professionnelle sont adoptés sans discussion. Le rapport de la commission sur l'image de la profession fera l'objet d'une journée de discussion en automne 1976.
4. *Elections*
- 4.1 M. Jules Hippenmeyer (ZH) est élu comme successeur du président central démissionnaire H.-R.