

Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 74 (1976)

Heft: 7

Artikel: Rationelle Behandlung der dreidimensionalen Geodäsie

Autor: Bauersima, I. / Schürer, M.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-228353>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eggelsmann, R.: Drainanleitung, Verlag Wasser und Boden, Hamburg, 1973.
 Feichtinger, F.: Die Wasseraufnahmefähigkeit der Drainrohre. Österr. Wasserwirtschaft, 11, 1966.
 Guyon, G.: Les caractéristiques du drainage et le calcul de ses dimensions écartement et profondeur des drains. Bulletin technique du Génie Rural, Nr. 58, 1962.
 Hörler, A. und Rhein, M. R.: Die Intensität der Starkregen der Schweiz. Schweiz. Zeitschrift für Hydrologie, 24, 1962.
 Kühnel, H.: Untersuchungen des Drainerfolges an 50 Jahre alten Anlagen. Diss. ETH-Z, Nr. 4352, 1969.
 Petrascheck, A.: Über die Wirkung systematischer Entwässerungen in Hanglagen. Diss. ETH-Z, Nr. 5079, 1973.
 Richard, F.: Der Bodenhaushalt (Sorptions und Desorption in schwer durchlässigen Böden). Schweiz. Zft. Verm., Kulturtechnik und Photogrammetrie, 62: 153–176, 1964.

Taylor, G.: Drainable porosity evaluation from outflow measurements and its use in drawdown equations. Soil. Science, 90: 338–343, 1960.
 Widmoser, P.: Einige Folgerungen aus der Theorie der Zuströmung zu Drainrohren. Wasser und Boden, 2: 34–40, 1972.
 Widmoser, P.: Häufigkeit und Erhaltungsneigung bei Tagesregen von 14 Stationen der Schweiz. Schweiz. Bauzeitung (im Druck).

Adresse des Verfassers:
 PD Dr. Peter Widmoser, Institut für Kulturtechnik/ETH Zürich, derzeit Ass. Prof. an der University of Daressalam, P. O. Box 35 131, Daressalam 8703 Erlenbach, Fischerweg 14

Rationelle Behandlung der dreidimensionalen Geodäsie

I. Bauersima und M. Schürer

Résumé

La géodésie tridimensionnelle est développée en employant des vecteurs et des matrices. On reçoit ainsi des formules concises et claires.

Der Zugang und die Einsicht in die dreidimensionale Geodäsie werden erschwert durch die im allgemeinen angewandte sphärische Trigonometrie. Verwendet man Vektoren und Matrizen, so lassen sich die Hauptprobleme auf wenigen Zeilen darstellen, und die Gleichungen sind zudem «computergerechter».

In jedem Beobachtungspunkt P kann ein lokales kartesisches Koordinatensystem festgelegt werden, mit der 3. Achse nach dem Zenit (materiell realisiert durch einen horizontalen Theodoliten) und der 1. Achse in einer horizontalen erdfesten Richtung (materiell realisiert durch einen zweiten terrestrischen Punkt Q und durch einen a priori angenommenen horizontalen Winkel α zwischen der 1. Koordinatenachse und der Projektion der Richtung PQ auf die Horizontalebene).

Sei nun \vec{u} ein freier Vektor. Wir bezeichnen mit \mathbf{u} beziehungsweise \mathbf{U} die Spaltenmatrix der Komponenten dieses Vektors in dem lokalen, beziehungsweise in einem zentralen kartesischen Koordinatensystem mit dem Nullpunkt in C. Es gilt dann:

$$\mathbf{u} = \mathbf{AU} \quad (1)$$

Hier ist \mathbf{A} eine Rotationsmatrix (das lokale und das zentrale System als gleichorientiert vorausgesetzt, in unserem Falle Linkssysteme), die sich im allgemeinen eindeutig aus drei elementaren Rotationsmatrizen zusammensetzen lässt, so dass

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_i(\beta) \mathbf{R}_j(\gamma) \mathbf{R}_k(\delta)$$

wenn nur $i \neq j$ und $j \neq k$. Die elementare Rotationsmatrix $\mathbf{R}_i(\beta)$ stellt eine Rotation um den Winkel β um die i-te Achse dar. Im Hinblick auf die wichtigste Lage des zentralen Systems setzen wir \mathbf{A} , wie aus der Figur 1 folgt, zusammen.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_3(\omega) \mathbf{R}_2(\Phi - \pi/2) \mathbf{R}_3(\pi + \lambda), \quad \text{wobei}$$

$$\omega = \alpha - \pi - \alpha$$

In der Figur 1 und weiterhin sind die Koordinaten im zentralen System mit X, Y, Z bezeichnet, im lokalen System mit ξ, η, ζ .

Die unsern Beobachtungen am Beobachtungspunkte P zugänglichen Grössen sind die Polarkoordinaten r, z, α

des Vektors \vec{PQ} im lokalen System und – astronomisch – die Polarkoordinaten Φ und λ der Richtung der ζ -Achse und der Orientierungswinkel $\omega = \alpha - \pi - \alpha$ der ξ -Achse im zentralen System. Dabei ist r die Entfernung \vec{PQ} , z die Zenitdistanz und α der horizontale Richtungswinkel der Richtung \vec{PQ} .

Wir setzen von nun an $\vec{PQ} = \vec{u}$. Die in (1) stehenden Spaltenmatrizen \mathbf{u} und \mathbf{U} bekommen somit folgende Bedeutung:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} r \sin z \cos \alpha \\ r \sin z \sin \alpha \\ r \cos z \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} X_Q - X_P \\ Y_Q - Y_P \\ Z_Q - Z_P \end{bmatrix}$$

Es seien p_z, p_α, p_r die Gewichte der Grössen $v_z, \sin z_0 v_\alpha, v_r/r_0$. Die Gewichtsmatrix \mathbf{P} des Fehlergleichungssystems (9) lautet dann:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{r_0} \begin{bmatrix} \sqrt{p_z} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p_\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{p_r} \end{bmatrix}$$

Multipliziert man (9) von links mit \mathbf{P} , so bekommt man die gewichteten Fehlergleichungen in der Form:

$$\mathbf{w} = \mathbf{QA}_0\delta\mathbf{U} + \mathbf{QFU}_0\delta\omega + \mathbf{QGU}_0\delta\Phi + \mathbf{QHU}_0\delta\lambda + \mathbf{Q}(\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0 - \mathbf{u}') \quad (10)$$

mit $\mathbf{Q} = \mathbf{PR}$

Die gewichteten Fehler als Komponenten der Spaltenmatrix

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_z} v_z \\ \sqrt{p_\alpha} \sin z_0 v_\alpha \\ \sqrt{p_r} (v_r/r_0) \end{bmatrix}$$

sind stochastische Grössen gleichen Gewichtes.

(10) ist das vollständige System der gewichteten Fehlergleichungen für die Beobachtungen der Polarkoordinaten r, z, α des Vektors \vec{PQ} im lokalen Koordinatensystem. In das Ausgleichsverfahren werden selbstverständlich nur diejenigen Zeilen der Matrixgleichungen (10) miteinbezogen, in denen der Fehler v_z oder v_α oder v_r jeweils durch entsprechende Beobachtung auch implizite definiert ist.

Falls im Punkte P die geographischen Koordinaten Φ oder λ oder das astronomische Azimut a mittels astronomischer Beobachtungen bestimmt worden ist, müssen die gewichteten Fehlergleichungen (10) noch durch die entsprechenden Fehlergleichungen des folgenden Fehlergleichungssystems ergänzt werden:

Falls im Punkte P die geographischen Koordinaten Φ oder λ oder das astronomische Azimut a mittels astronomischer Beobachtungen bestimmt worden ist, müssen die gewichteten Fehlergleichungen (10) noch durch die entsprechenden Fehlergleichungen des folgenden Fehlergleichungssystems ergänzt werden:

$$\begin{bmatrix} w_\Phi \\ w_\lambda \\ w_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{p_\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi_0\sqrt{p_\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \sin z_0\sqrt{p_\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\Phi + (\Phi_0 - \Phi') \\ \delta\lambda + (\lambda_0 - \lambda') \\ \delta\omega + (a_0 - a') \end{bmatrix} \quad (11)$$

mit $\omega_0 = a_0 - \pi - a', \quad \omega = \omega_0 + \delta\omega$

Hier sind Φ', λ', a' die beobachteten Werte von Φ, λ, a und $p_\Phi, p_\lambda, p_\omega$ ihre Gewichte, wobei p_λ für $\Phi_0 = 0$ und p_ω für $z_0 = \pi/2$.

Bemerkungen

- In mindestens einem Nullpunkt der lokalen Systeme müssen Φ, λ, a astronomisch bestimmt, oder
- genau in einem Nullpunkt a priori angenommen werden, da sonst die Normalgleichungen singular werden.

c) Aus demselben Grund wie bei a) und b) müssen die Koordinaten X_s, Y_s, Z_s des Nullpunktes S genau eines lokalen Systems gegeben sein, indem man sie zum Beispiel zu null annimmt, oder gleich den rechtwinkligen Koordinaten in einem Weltsystem voraussetzt. Somit wird im betreffenden Punkt a priori $\delta X_s = \delta Y_s = \delta Z_s = 0$.

d) Werden als Näherungswerte Φ_0 und λ_0 die geodätischen Koordinaten B und L gewählt, so erhält man in den $\delta\Phi$ und $\cos\Phi_0\delta\lambda$ im Falle a) sofort die Lotabweichungen und im Falle b) die «relativen» Lotabweichungen.

Zusatz

Obschon die Behandlung der dreidimensionalen Geodäsie nach der vorstehenden Methode ausreichend sein dürfte, soll noch auf eine zweite Möglichkeit hingewiesen werden, die es gestattet, die klassischen Formeln für die dreidimensionale Geodäsie herzuleiten.

Man kann eines der lokalen Systeme zum zentralen System erklären. Die Transformationsmatrix vom zentralen ins lokale System erhält man nach Figur 2 zu

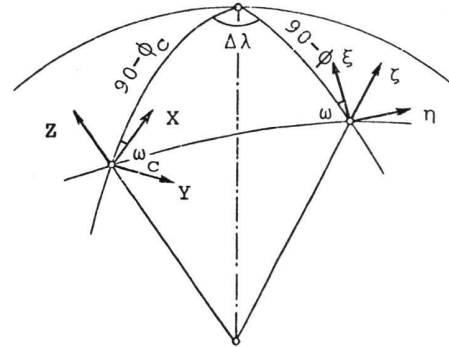


Abb. 2

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_3(\omega) \mathbf{R}_2(\Phi - \pi/2) \mathbf{R}_3(\Delta\lambda) \mathbf{R}_2(\pi/2 - \Phi_c) \mathbf{R}_3(-\omega_c)$$

mit $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_c$ (λ nach Westen positiv)

und analog zu (6) die Faktoren

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \omega} \Big|_0, \quad \mathbf{F}_c = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \omega_c} \Big|_0, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Phi} \Big|_0 \quad \text{usf.} \quad (12)$$

Wir nehmen weiter an, dass die lokalen Systeme nahezu orientiert sind ($\omega \sim \omega_c \sim 0$, das heisst die ξ -Achsen weisen praktisch nach Norden). Für ein kleines und nahezu orientiertes Netz dürfen \mathbf{A}_0 und die Matrizen (12) als Faktoren der kleinen Verbesserungen $\delta\mathbf{U}, \delta\omega, \delta\omega_c, \delta\Phi$ usf. genähert berechnet werden, indem man in \mathbf{A}_0 und den Matrizen (12)

$\Phi_0 = \Phi_{c0}, \quad \lambda_0 = \lambda_{c0}$ und $\omega = \omega_c = 0$ setzt.

Im absoluten Glied ($\mathbf{A}_0\mathbf{U}_0 - \mathbf{u}'$) muss jedoch \mathbf{A}_0 exakt bestimmt werden, das heisst als der den Näherungswerten $\omega_0 = \omega_{c0}, \Phi_0, \Phi_{c0}, \lambda_0$ und λ_{c0} entsprechende Wert. Es ist somit

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{R}_2(\Phi_0 - \pi/2) \mathbf{R}_3(\Delta\lambda_0) \mathbf{R}_2(\pi/2 - \Phi_{c0})$$

und als Faktor von δU genähert $A_0 = I$ (Einheitsmatrix) als Folge der oben erwähnten Substitutionen $\Phi_0 = \Phi_{c_0}$, $\Delta\lambda_0 = 0$ und der Relationen

$$R_i(\beta) R_i(\gamma) = R_i(\beta + \gamma), \quad R_i(0) = I$$

Für die Koeffizienten F , F_c , G , G_c , H und H_c erhält man nach (4) und (5):

$$F = \frac{\partial A}{\partial \omega_0} = D_3 R_3(0) R_2(\Phi_{c_0} - \pi/2) R_3(0) R_2(\pi/2 - \Phi_{c_0}) R_3(0) \text{ usf.}$$

$$\text{oder } F = F_c = D_3 \\ G = G_c = D_2$$

und

$$H = H_c = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\Phi_{c_0} & 0 \\ \sin\Phi_{c_0} & 0 & -\cos\Phi_{c_0} \\ 0 & \cos\Phi_{c_0} & 0 \end{bmatrix}$$

Damit bekommen wir analog zu (9) folgende ungegewichtete Fehlergleichungen:

$$Rv = R\delta U + RD_3 U_0 \delta(\omega - \omega_c) + RD_2 U_0 \delta(\Phi - \Phi_c) + RHU_0 \delta(\lambda - \lambda_c) + R(A_0 U_0 - u') \quad (13)$$

Auch hier sind die Bemerkungen a) bis d) sinngemäss zu beachten. Zusätzliche astronomische Beobachtungen sind nach den Gleichungen (11) zu behandeln.

Setzt man

$$A_0 U_0 = \begin{bmatrix} r_0 \sin z_0 \cos \alpha_0 \\ r_0 \sin z_0 \sin \alpha_0 \\ r_0 \cos z_0 \end{bmatrix}$$

wo r_0 , z_0 und α_0 die aus den Näherungswerten U_0 gerechneten Polarkoordinaten des Vektors U_0 im lokalen System sind, so erhält man nach einigen Umformungen in guter Näherung

$$R(A_0 U_0 - u') = \begin{bmatrix} r_0(z_0 - z') \\ r_0 \sin z_0(\alpha_0 - \alpha') \\ r_0 - r' \end{bmatrix}$$

und damit aus (13)

$$r_0 v_z = \cos z_0 \cos \alpha_0 (\delta X_Q - \delta X_P) + \cos z_0 \sin \alpha_0 (\delta Y_Q - \delta Y_P) - \sin z_0 (\delta Z_Q - \delta Z_P) - r_0 \cos \alpha_0 \delta(\Phi - \Phi_c) + r_0 \sin \alpha_0 \sin \Phi_c \delta(\Delta\lambda) - r_0(z' - z_0)$$

$$r_0 \sin z_0 v_\alpha = -\sin \alpha_0 (\delta X_Q - \delta X_P) + \cos \alpha_0 (\delta Y_Q - \delta Y_P) - r_0 \sin z_0 \delta(\omega - \omega_c) + r_0 \cos z_0 \sin \alpha_0 \delta(\Phi - \Phi_c) - r_0 (\sin z_0 \sin \Phi_c - \cos z_0 \cos \alpha_0 \cos \Phi_c) \delta(\Delta\lambda) - r_0 \sin z_0 (\alpha' - \alpha_0)$$

$$v_r = \sin z_0 \cos \alpha_0 (\delta X_Q - \delta X_P) + \sin z_0 \sin \alpha_0 (\delta Y_Q - \delta Y_P) + \cos z_0 (\delta Z_Q - \delta Z_P) - (r' - r_0) \quad (14)$$

(man vgl. damit K. Ramsayer DGK-A 71).

Die Gleichungen (14) sind noch mit entsprechenden Gewichten zu versehen. Für die Programmierung sind jedoch die Gleichungen (13) beziehungsweise (10) in Matrizenform vorzuziehen.

Adresse der Verfasser:

Ivo Bauersima, Assistent; Prof. Dr. Max Schürer, Astronomisches Institut der Universität Bern, Sidlerstrasse 5, 3012 Bern

Schweizerischer Verein für Vermessungswesen
und Kulturtechnik (SVVK)

Société suisse des mensurations et améliorations foncières
(SSMAF)

Jahresbericht des Zentralvorstandes des SVVK für das Jahr 1975

1. Allgemeines

Das Jahr 1975 ist geprägt durch einen weiteren Rückgang der Konjunktur. Viele unserer Büros leiden unter zunehmendem Arbeitsmangel. Der Tiefpunkt der Rezession scheint noch nicht erreicht zu sein. Die Arbeitsbeschaffungsaktionen der öffentlichen Verwaltungen beginnen sich erst langsam auszuwirken.

Der Bundesrat hat auf den 1. Januar 1976 Herrn Walter Bregenzer zum neuen Vermessungsdirektor gewählt. Das lange Interregnum in einer wirtschaftlich schwierigen Zeit stellte Verwaltung und Privatbüros vor zahlreiche Probleme. Der Zentralvorstand gratuliert dem Neuge-

Rapport annuel du Comité central de la SSMAF pour l'année 1975

1. Généralités

L'année 1975 est marquée par un nouveau recul de la conjoncture. Nombreux sont nos bureaux qui souffrent d'un manque de travail accru. Le point bas de la récession ne semble pas encore avoir été atteint. Les actions pour la création de possibilités de travail engagées par les pouvoirs publics commencent seulement à faire effet. Le Conseil fédéral a nommé M. Walter Bregenzer nouveau directeur fédéral des mensurations cadastrales avec effet au 1er janvier 1976. Le long interrègne a posé à l'administration et aux bureaux privés de nombreux problèmes durant cette période difficile du point de vue