

Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural
Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) =
Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))
Band: 73-F (1975)
Heft: 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

Artikel: Über kosmologische Modelle
Autor: Schmid, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-227550>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über kosmologische Modelle

H. Schmid, Wien

Es gibt kaum einen Menschen, den der Anblick des gestirnten Nachthimmels nicht mit Gefühlen der Verwunderung, ja der Ergriffenheit erfüllt, und unwillkürlich drängt sich dem Beobachter die Frage nach dem Woher, nach dem Wohin und nach dem Ende beziehungsweise dem Ausmass des Geschauten auf. Wenn wir diese drei Fragen noch ergänzen durch die Fragen, ob die Welt nur materiell ist, ob die Materie in der Welt ewig ist und ob das Weltall unendlich ist, so haben wir eigentlich die Probleme der Kosmologie bereits im grossen und ganzen formuliert.

Kosmologie und Kosmogonie sind zwei Begriffe, die nicht einheitlich benutzt werden. Im allgemeinen versteht man unter Kosmogonie die Lehre von der Entstehung und Entwicklung der Sterne und Sternensysteme, während die Lehre von der Entstehung und Entwicklung des Weltganzen Kosmologie genannt wird. Eigentlich sollte unter der Kosmologie die Lehre vom Zustand der Welt, genauer der Weltordnung, verstanden werden. Jedoch sind diese einzelnen Teilgebiete so miteinander verzahnt, dass es sich eingebürgert hat, der Kosmologie auch die kosmogonischen Probleme einzuordnen.

Da die Frage nach dem Woher und Wohin unserer Welt oder besser unseres Kosmos natürlich nicht nur mit mathematisch-physikalischen, also mit naturwissenschaftlichen Mechanismen, zu erklären ist, wird diese Frage auch zu einem philosophischen Problem. Wir können bei allen von uns erkennbaren Vorgängen, welche schliesslich die Grundlage für die Schaffung von Weltmodellen sind, eine Zweiteilung vornehmen. Wir bezeichnen diejenigen Vorgänge als naturhaft, die eindeutig auf physikalisch-chemische Prozesse zurückzuführen sind. Zu diesen Vorgängen zählen sämtliche Erscheinungen, die sich durch Beobachtungen erkunden lassen.

Als geistige Vorgänge wollen wir alles bezeichnen, was sich nicht widerspruchsfrei durch physikalische oder chemische Vorgänge erklären lässt, oder bei denen die naturwissenschaftlichen Forschungsmethoden nicht direkt anwendbar sind.

Da die philosophischen Überlegungen mit den naturwissenschaftlichen Erkenntnissen verknüpft sind, muss das Weltmodell sowohl in naturhafter als auch in geistiger Hinsicht mit erkennbaren Vorgängen übereinstimmen. In diesem Aufsatz soll aber nur auf den naturwissenschaftlichen Teil des Problemkreises eingegangen werden.

Es sollen nunmehr jene Kriterien genannt werden, welche für die Formulierung kosmologischer Modelle von Bedeutung sind. Als wichtigsten Bestandteil müssen wir hier die Sternensysteme – auch Galaxien genannt – nennen, wobei wir festhalten, dass sich diese Galaxien ständig voneinander entfernen, und zwar nach einem relativ einfachen mathematischen Gesetz, das man etwa

so formulieren kann: sämtliche Sternensysteme entfernen sich voneinander mit Geschwindigkeiten, die proportional ihrer Distanz sind. Eine ausgezeichnete Fluchtrichtung gibt es nicht. Man könnte sich diese Bewegung etwa so vorstellen, wie wenn sämtliche Galaxien auf und in einem Luftballon vorhanden sind und dieser Luftballon aufgeblasen wird, so dass die Distanz zwischen den einzelnen Galaxien immer grösser und grösser wird und dabei die Fluchtgeschwindigkeit proportional ihrer Entfernung anwächst (Abb. 1). Der Proportionalitätskoeffizient wird

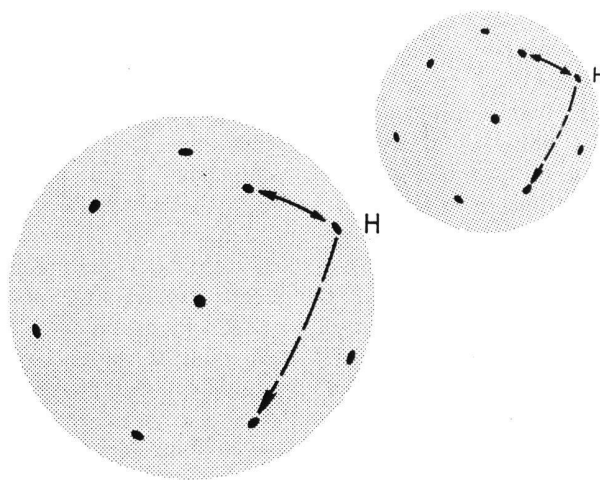


Abbildung 1

als «Hubble-Konstante» H bezeichnet. Der berühmte amerikanische Astronom und Astrophysiker Edwin Hubble hat bereits in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts eine Serie von fundamentalen Entdeckungen gemacht, die unseren Blick in die extragalaktischen Tiefen des Kosmos ermöglicht haben. Er war es, der unter anderem mit Hilfe der «Rotverschiebung» der emittierten Spektren von Galaxien die Expansion und deren Gesetz entdeckte. Wie wir noch sehen werden, ist der Reziprokwert der Grösse H mit dem Alter des Kosmos gleichzusetzen.

Auf Grund neuerer Beobachtungen hat der amerikanische Astrophysiker Allan Sandage diese Konstante derzeit mit $H_0 = 55 \text{ km/(sec Megaparsec)}$ ermittelt, das heisst, dass eine Galaxie, deren Entfernung sich von einer anderen um 1 Megaparsec unterscheidet, eine um 55 km/sec grössere Radialgeschwindigkeit zeigt als diese. Die Distanz von einem Megaparsec (Mpc) entspricht 3,26 Millionen Lichtjahren, da 1 pc gleich 3,26 Lichtjahre ist, und von dieser Entfernung wieder sieht man die Distanz Erde–Sonne (1 AE = eine astronomische Einheit) unter einem parallaktischen Winkel von $1''$ (Altsekunde).

Weitere wichtige Komponenten, welche zur Auslotung des Kosmos dienen, sind die sogenannten kosmischen Radioquellen. In diesem Zusammenhang ist auch die «3-Kelvin-Hintergrundstrahlung» zu erwähnen, welche aus allen Richtungen des Kosmos gleichmässig einfällt und von vielen Astrophysikern als wichtiger Beweis für die sogenannte Urknall-Theorie (auch «Big-Bang»-Theorie genannt) gilt. Sie wurde 1965 von den Radio-technikern A. Penzias und R. Wilson zufällig entdeckt,

als sie bemüht waren, den Funkverkehr mit Nachrichtensatelliten zu verbessern.

Eine weitere entscheidende Komponente für die Erstellung kosmologischer Modelle ist die Gravitation.

Wollen wir nun darangehen ein Weltmodell aufzustellen, so müssen bestimmte Vorstellungen von seinen Elementen, nämlich den Sternen und Galaxien und der interstellaren beziehungsweise intergalaktischen Materie vorliegen. Es muss einige Forderungen erfüllen, die eine Behandlung mit den Methoden der exakten Naturwissenschaften überhaupt erst ermöglichen. Das Modell muss konkrete Aussagen liefern, die uns in die Lage versetzen, seine wesentlichen Merkmale experimentell zu bestätigen oder zu widerlegen. Durch die Erfahrung aus der «Kopernikanischen Revolution» klug geworden, vermeidet man heute, wie bereits erwähnt, jede Bevorzugung unseres Beobachtungsstandpunktes. Man kann dies auch als *erste Forderung* an das Weltmodell formulieren. Weiter führt die Verschiedenartigkeit der kosmischen Objekte zwar dazu, dass sich die Details der näheren Umgebung von Beobachtungspunkt zu Beobachtungspunkt sehr stark unterscheiden; im Weltmassstab gesehen sind dies jedoch lokal begrenzte Unregelmässigkeiten, in einer im grossen und ganzen gleichförmig oder homogen aufgebauten Welt; dies ist die *zweite Forderung*. Nicht nur vom Beobachtungsort, sondern auch von der Beobachtungsrichtung soll die Struktur des Universums, als *dritte Forderung*, unabhängig sein. Zur Homogenität tritt also noch die Isotropie als weitere Grundforderung hinzu. Man nennt dieses Prinzip das *kosmologische Prinzip*, und es geht auf Albert Einstein zurück und wurde 1934 von A. E. Milne und W. H. McCrea exakt formuliert.

Als um die Jahrhundertwende immer deutlicher wurde, dass im Bereich des Kleinsten, nämlich der Atome und Elementarteilchen andere Gesetze gelten als in der klassischen Physik, liess die Erkenntnis nicht lange auch sich warten, dass dies auch für den Bereich des Grossen, nämlich der Sterne, der Galaxien und des Weltalls, gelten müsste. Bekanntlich war es Albert Einstein, der diesen Sachverhalt aufdeckte und die dahinter stehenden Zusammenhänge in bisher unübertroffener Weise zu formulieren verstand. Noch heute basieren alle modernen kosmologischen Modelle auf den Theorien Einsteins, wiewohl weitergehende Verallgemeinerungen der Einsteinschen Gravitationstheorie entwickelt wurden, an denen Einstein zum Teil selbst mitwirkte. Es soll hier die 1961 entwickelte Skalar-Tensor-Theorie von Brans und Dicke mit elf Gravitationskomponenten und schliesslich die in den letzten Jahren entstandenen sechzehnkomponentigen Theorien erwähnt werden, die von Iwanenko, Möller und Treder untersucht wurden. Einstein selbst stellt das Gravitationsfeld durch zehn Komponenten dar. Für die Aufstellung des Formelapparates für ein kosmologisches Modell hat man den Berechnungen die Erkenntnisse der «Speziellen Relativitätstheorie» (SRT) und der «Allgemeinen Relativitätstheorie» (ART) zugrunde zu legen.

Als Ergebnisse der SRT seien besonders genannt:

1. Die Geschwindigkeit des Lichtes c im Vakuum ist konstant und in allen Richtungen gleich, sie beträgt rund 300 000 km/sec und ist unabhängig von einer gleich-

förmigen und geradlinigen Eigenbewegung der Lichtquelle v . Sie ist demnach eine universelle Konstante (Michelson-Versuch).

2. Die Lorentz-Transformationen müssen für alle physikalischen Vorgängen in zwei zueinander gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssystemen angewendet werden. Sie enthalten als Grenzfall ($v \ll c$) die klassischen Galilei-Transformationen. Die wichtigsten Formeln sind:

Zeittransformation:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(Zeitdilatation; durch Versuche bestätigt).

Längentransformation:

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Massentransformation:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(m_0 ist die Ruhemasse).

Dopplereffekt der Rotverschiebung

- a) in der Bewegungsrichtung

$$Z_p = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{v};$$

$\Delta\lambda$ ist die Wellenlängenänderung, welche durch die Geschwindigkeit v des emittierenden Körpers hervorgerufen wird. $\Delta\lambda$ ist positiv für sich entfernende Körper und negativ (Violettverschiebung) für sich an-

nähernde Objekte. $Z = \frac{v}{c}$ wäre die nicht-relativistische Formel; sie gilt bis Distanzen von 10^8 Lichtjahren beziehungsweise die davon abhängigen Fluchtgeschwindigkeiten.

- b) Die relativistischen Formeln sagen auch senkrecht zur Bewegungsrichtung einen Dopplereffekt voraus, und zwar mit

$$Z_s = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

3. $E = mc^2 \rightarrow$ Masse-Energie-Äquivalenz.
4. Additionstheorem für relativistische Geschwindigkeiten, wobei v_a und v_b mit der Lichtgeschwindigkeit c bereits «vergleichbar» sind.

$$v_r = \frac{v_a + v_b}{1 + \frac{v_a v_b}{c^2}}$$

5. Das Raum-Zeit-Kontinuum von Minkowski ist die vierdimensionale geometrische Interpretation der SRT. Diese Darstellung enthält zugleich auch die Lorentz-Transformation.

Als Ergebnisse der ART seien zusammenfassend genannt:

1. Allgemeines Relativitätsprinzip: Die Beschränkung auf spezielle Lorentz-Transformationen entfällt; es sind nichtlineare Transformationen zugelassen.
2. Die universelle Proportionalität von träger und schwerer Masse (Äquivalenzprinzip) bedingt eine lokale Äquivalenz von Beschleunigungs- und Gravitationskräften und führt zu einer Identifizierung der geometrischen Struktur der Raum-Zeit-Welt mit der Gravitation.
3. Im Gravitationsfeld verkürzen sich Massstäbe, Uhren verlangsamen ihren Gang, und die euklidische muss durch die nichteuklidische Geometrie ersetzt werden.
4. Die effektive Lichtgeschwindigkeit ist im Gravitationsfeld kleiner als im gravitationsfreien Raum.
5. Die allgemeine Relativitätstheorie enthält die klassische Newtonsche Gravitationstheorie als Grenzfall.
6. Die Bewegungsgleichungen für Massenpunkte und Körper werden aus den nichtlinearen Feldgleichungen hergeleitet.
7. Drei von der allgemeinen Relativitätstheorie geforderte Effekte konnten experimentell nachgewiesen werden: die Gravitations-Rotverschiebung der Spektrallinien, die Lichtablenkung durch Gravitationsfelder und die Periheldrehung der Planetenbahnen; weitere Effekte wurden vorhergesagt.

8. Physikalische Begründung der Kosmologie.
Es soll hier nur generell angemerkt werden, dass die relativistischen Effekte erst bei Geschwindigkeiten auftreten, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind. Wesentlich ist dabei der Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

der sich bei hohen Geschwindigkeiten bemerkbar macht. Erst wenn ein Beobachtungsobjekt etwa 40 % der Lichtgeschwindigkeit, das sind rund 130 000 km/sec, erreicht hat, stellt zum Beispiel ein ruhender Beobachter eine Abweichung von den klassischen Naturgesetzen um 10 % fest.

Die ART lehrt uns weiter, dass in der Umgebung sehr grosser Massen sogenannte relativistische Effekte auftreten, welche für die kosmologischen Probleme von grösster Bedeutung sind. Die sogenannten *Feldgleichungen* der ART stellen eine Beziehung zwischen der Massendichte und der Geometrie oder Metrik eines vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums her. Darin ist der uns begrifflich fassbare dreidimensionale Raum als Unterraum eingebettet, ähnlich wie dieser wiederum Flächen, wie zum Beispiel Ebenen, als zweidimensionale Unterräume enthält. Unter der Vielzahl möglicher Lösungen ist für uns die euklidische Metrik nur ein Son-

derfall. Im allgemeinen ergeben sich Metriken, die gekrümmte oder Riemannsche Räume beschreiben.

Die folgende Abbildung soll uns in anschaulicher Weise helfen, gekrümmte Räume in Analogie zu dreidimensionalen Gebilden vorzustellen. Wenn wir zum Beispiel die Raumkrümmung positiv festsetzen, so besitzt ein elliptischer Raum ein endliches Volumen zu $V = 2\pi^2 r^3$. Ist die Krümmung negativ, so sprechen wir von einem offenen oder hyperbolischen Raum, dessen Volumen unendlich ist (Abb. 2).

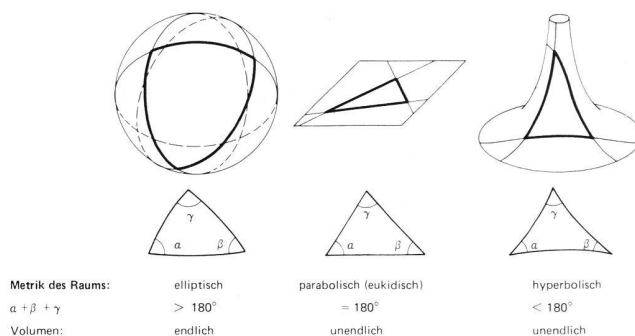


Abbildung 2

Um die Herleitung von kosmologischen Modellen anzudeuten, wollen wir im folgenden einige Berechnungen vornehmen, wobei zu beachten ist, dass das statistische Prinzip vor dem mathematisch strengen Prinzip Vorrang hat.

Das *kosmologische Prinzip* legt die Vorstellung eines unendlich ausgedehnten, homogenen und statischen, mit Sternen und Galaxien erfüllten Universums nahe. Diese Vorstellung führte zu Widersprüchen, die bereits um 1800 als Argument gegen ein unendliches und ewiges Weltall formuliert wurden. Woher sollte die Energie stammen, um die Sterne unendlich lange strahlen zu lassen? Weiter ergäbe sich aus der Unendlichkeit des Weltalls ein tagheller Nachthimmel auf Grund des Olbersschen Paradoxons. Dies besagt: Die Lichtintensität nimmt proportional $1/r^2$ ab. Die Zahl der Sterne in der Kugelschale nimmt jedoch mit $r^2 dr$ zu, wenn der Radius der Kugel um dr zunimmt. Diese Sterne in der Kugelschale tragen zur Helligkeit des Nachthimmels proportional zu $1/r^2 \cdot r^2 dr = dr$ bei. Die Gesamthellig-

keit ist also $\int_{r_0}^{\infty} dr = \infty$.

Dieser Schluss ist allerdings theoretisch falsch, da Sterne sich ja auch gegenseitig abdecken. Der korrekte Schluss ist, dass ein unendliches ewiges Universum im thermischen Gleichgewicht sein müsste und alle Körper die gleiche Temperatur annehmen. Die Erde würde auf tausende Grad erhitzt, den «Wärmetod» erleiden. Diesem Wärmetod steht der Kältetod der einsamen Welteninsel gegenüber; eine Galaxis im unendlichen Weltraum strahlt ständig Energie ab und kühlt dabei aus.

Die Argumente gegen dieses Modell können noch durch Stabilitätsbetrachtungen ergänzt werden. Bei der geringsten Störung würde eine derartige Welt explodieren oder in sich zusammenfallen.

Auf Grund des bereits Gesagten ist also nur ein *dynamisches Weltmodell* überhaupt möglich, und deshalb wollen wir uns derartige Modelle etwas näher betrachten:

Die Hubble-«Konstante» ist sicherlich zeitabhängig, also

$$(1) H(t_0) = H_0; \quad (1a) H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0};$$

darin ist R_0 der «Weltradius», \dot{R}_0 die Änderungen von R_0 mit der Zeit.

Hubbles Entdeckung der Expansion führt zur Gleichung (2)

$$(2) \vec{v}(t) = H(t) \vec{r}(t) \quad (\vec{r} \text{ ist die Distanz von der Erde}).$$

Da $H(t)$ von t abhängig ist, ermöglicht uns diese Formel, die Änderung der Expansionsgeschwindigkeit im Laufe der Zeit zu berücksichtigen. Weiter sieht man durch die Vektordarstellung, dass dieses Gesetz die Forderung nach Unabhängigkeit vom Beobachtungsort erfüllt.

Ältere Bestimmungen für die «Hubble-Konstante» H_0 ergaben

$$(3) \frac{75 \text{ km/sec}}{\text{Mpc}}$$

Dieses Ergebnis wurde 1958 von Sandage im Anschluss an die Revision der kosmischen Entfernungsskala von Baade mit Hilfe der Cepheiden (Veränderlichen) der Population I und II erhalten.

Heute hat man den verbesserten Wert $\frac{(55 \pm 7) \text{ km/sec}}{\text{Mpc}}$.

$$(4) Z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} \quad (\text{Rotverschiebung}):$$

Hubble fand 1929 folgendes Gesetz: Die Rotverschiebung Z wächst proportional der Entfernung r der Galaxien an. Daher gilt für die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien

$$(5) \frac{dr}{dt} = v = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = H \cdot r$$

Diese Gleichung sagt dasselbe aus wie Gleichung (2). Neuere Messungen mit der 21-cm-Linie des Wasserstoffes haben diese Längenabhängigkeit bestens bestätigt.

Man kann nun umgekehrt aus « Z » die Distanz r berechnen; man muss da aber angeben, mit welchem H_0 -Wert operiert wurde. Man kann nun die Gleichung (5) in dem Sinne deuten, dass vor einer Zeit T_0 eine Expansion des ganzen Weltalls aus einem kleinen Volumen begann. Erhielt eine Galaxie, die jetzt in der Entfernung r ist, die Geschwindigkeit v , so brauchte sie dazu die Zeit

$$(6) T_0 = r/v = \frac{1}{H_0}$$

das sogenannte Weltalter. Es ist also die Reziproke von H_0 . Mit $H_0 = 75 \text{ km/sec. Mpc}$ ergibt sich ein

$$(6) T_0 = 13 \cdot 10^9 \text{ Jahre, mit } 55 \text{ km/sec ein solches von } 18 \cdot 10^9 \text{ Jahren.}$$

Wir werden aber noch sehen, dass diese Zahlen verbessert werden müssen. Betrachten wir die Gleichung (2) beziehungsweise (5), so haben wir zunächst ein rein kinematisches Modell. Dieses haben Milne und Mc Crea wie gesagt 1934 zu einer Newtonschen Kosmologie erweitert, indem sie untersuchten, welche Strömungen im Rahmen der Newtonschen Mechanik ein Medium (hier das «Galaxien-Gas») ausführen kann, wenn man durchwegs Homogenität, Isotropie und Wirbelfreiheit voraussetzt.

Betrachten wir zur Zeit t eine Galaxie im Abstand $R(t)$ (für eine endliche Welt könnte R , wie schon erwähnt, auch deren «Radius» bedeuten), so wird diese nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz angezogen von der in dieser Kugel enthaltenen Masse

$$M = \frac{4\pi}{3} \cdot R^3(t) \cdot \varrho(t); \quad \varrho(t) \text{ ist die Massendichte zur Zeit } t.$$

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$(7) \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{GM}{R^2} = 0, \quad \text{worin } M = \frac{4\pi}{3} R_0^3(t_0) \varrho(t_0) \text{ ist.}$$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu Weltmodellen, die von einem Punkt unendlich grosser Dichte ausgehend, entweder monoton expandieren oder zwischen $R = 0$ und $R = R_{\max}$ oszillieren; wir kommen bei den relativistischen Modellen noch darauf zurück. Statische Modelle sind in Gleichung (7) nicht enthalten.

Vorwegnehmend sei gesagt, dass auch diese Modelle der Newtonschen Theorie grundsätzliche Schwierigkeiten bezüglich der Übereinstimmung mit den Beobachtungen aufweisen, die schliesslich mit Hilfe der relativistischen Kosmologie gelöst wurden.

Das erste relativistische Modell ist von Einstein selbst, musste aber bald verworfen werden, da es auf eine statische Welt hinauslief, die unmöglich ist, wie bereits erläutert wurde. Ein weiteres Modell stammt von De Sitter (1917) und ist ein expandierendes Modell, bei dem die Hubbleschen Expansionen unterzubringen waren. Allerdings enthielt diese Welt keine Materie – sie war leer.

Wenngleich die äusserst geringe mittlere Massendichte von wenigen Atomen je m^3 dieser Annahme sehr nahe kommt, so zeigt sich, dass auch eine derart geringe Dichte die Raumgeometrie entscheidend beeinflusst.

Der russische Mathematiker H. Friedmann ging 1922 ebenso wie De Sitter von den Einsteinschen Feldgleichungen aus und entwickelte ein dynamisch-relativistisches Modell:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \kappa T_{\mu\nu} = 0,$$

darin ist $R_{\mu\nu}$ der Riemannsche Krümmungstensor, R der «Weltradius»; $T_{\mu\nu}$ steht an Stelle von ϱ . Dieser Tensor $T_{\mu\nu}$ fasst die Energiedichte – Impulsdichte – Massenstromdichte – Drucke und Spannungen zusammen.

Die Feldgleichungen sind die mathematische Darstellung der Bewegung eines Körpers im Schwerfeld als Trägheitsbewegung im nichteuklidischen Kontinuum. Das Linienelement dieses Kontinuums wird, wie bereits ge-

sagt, durch zehn Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ bestimmt. Die Bestimmung der Geometrie bedeutet die Bestimmung des Gravitationsfeldes und umgekehrt. Sie stellen die Verallgemeinerung der Poissonschen Differentialgleichung dar.

$$\Delta\varphi = -4\pi G\rho;$$

Δ ist der Laplace-Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Aus der Bewegungsgleichung (7) lässt sich ein Energiesatz herleiten, der die Konstanz der Energie bei der durch (7) beschriebenen Bewegung ausdrückt:

$$(8) \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{C}{R} + k = 0; \quad C = \frac{8\pi G}{3} \rho(t_0) R_0^3.$$

Diese Gleichung, differenziert nach der Zeit, ergibt wieder die Gleichung (7).

Diese Gleichung hat auch Friedmann 1922 unter anderen gefunden. In einer ganzen Serie von Lösungen der Feldgleichungen spiegeln sich dieselben Grundtypen kosmologischer Bewegungsabläufe, wie sie auch die klassische Physik voraussagt. Neben kontinuierlich expandierenden Welten scheinen jetzt auch oszillierende möglich.

Ich darf die Ergebnisse der Friedmann-Lösungen zusammenfassen und sie mit den heute vorliegenden Beobachtungen vergleichen. Die folgenden Formeln basieren auf Friedmanns Arbeiten und wurden von Robertson, Eddington und Le Maître gegen Ende der dreissiger Jahre in diese Form gebracht:

$$(9) \dot{R}^2 + kc^2 = \frac{R^2}{3} (\lambda c^2 + 8\pi G\rho)$$

$$(10) \dot{R}^2 + 2R\ddot{R} + kc^2 = R^2 \left(\lambda c^2 - \frac{8\pi Gp}{c^2} \right);$$

R Krümmungsradius des als dreidimensionalen Unter-
raumes in einem vierdimensionalen Raum-Zeit-
Kontinuum verstandenen Weltalls;

\dot{R} Ausdehnungsgeschwindigkeit des Alls, λ Kosmo-
logische Konstante;

\ddot{R} Beschleunigung (man sieht, dass diese Ausdehnung
keinesfalls gleichförmig erfolgt);

k Krümmungsparameter $+1$, 0 oder -1 ;

ρ sowohl Dichte der Materie als auch Massenäqui-
valent der Energiedichte;

p Druck, und zwar der hydrostatische des «Galaxien-
gases» und der Strahlungsdruck.

Heute überwiegt bei weitem die Materiendichte. Da-
gegen stossen wir am Beginn der kosmologischen Ent-
wicklung auf Perioden, in denen der grösste Teil des
Energiegehaltes noch nicht zu Materie kondensiert war.
Wir können heute den Strahlungsdruck und den hydro-
statischen Druck (proportional zum Quadrat der mitt-
leren Galaxiengeschwindigkeit, das ist ~ 300 km/sec)
vernachlässigen und setzen für ρ die Materiendichte und
für p den Wert Null in (9) und (10) ein.

Damit die Gleichungen von Friedmann und Le Maître
lösbar werden, müssen R , \dot{R} , ρ , λ und (sign) k zumindest
zu einem Zeitpunkt bekannt sein. Wir bezeichnen die
Gegenwart mit Index 0 . R und \dot{R} sind nur indirekt be-
obachtbar, zum Beispiel über

$$(11) \equiv (1a) \quad H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0}. \quad (\text{Eine weitere Deutung von } H_0)$$

Wir führen eine Grösse q ein und definieren sie als Ver-
zögerungszahl:

$$(12) \quad q_0 = - \frac{\ddot{R}_0}{R_0 H_0^2},$$

ein Mass für die Verlangsamung der Expansions-
geschwindigkeit.

Leider ist die Entnahme von H_0 und q_0 aus Beobach-
tungen heute noch derart ungenau, so dass es geboten
scheint, weiter die Zahl der Unbekannten zu reduzieren.
Man beschränkt sich heute daher auf Modelle mit ver-
schwindender kosmologischer Konstante λ . Daher wer-
den aus (9) beziehungsweise (10) die Gleichungen (13)
und (14).

$$(13) \quad \rho_0 = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G} = 0.92 q_0 \cdot 10^{-29} \text{ in g/cm}^3.$$

Für $q_0 = 1/2$ ergibt sich für $0.46 \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ eine
kritische Dichte, wie noch gezeigt wird; sie entspricht
etwa 10 H-Atomen in einem m^3 -Raum.

$$(14) \quad \frac{kc^2}{R_0^2} = H_0^2 (2q_0 - 1)$$

Hier kommt die Aussage der ART zum Ausdruck, dass
die Krümmung kc^2/R_0^2 des Raumes durch die Vertei-
lung der darin enthaltenen Massen festgelegt wird.

Die Diskussion von (13) und (14) ergibt:

Für elliptische (geschlossene) Räume: $k = +1$; reelle
Lösungen für R_0 aus (14) folgen, wenn $q_0 > 1/2$ (siehe
Formel für die kritische Dichte).

Für hyperbolische Räume: $k = -1$, $0 < q_0 < 1/2$.

Für euklidische Räume (nicht gekrümmter dreidimensio-
naler Unterraum): $k = 0$, daraus folgt $q_0 = 1/2$, und das
bedeutet, dass die «kritische Dichte» eine «Grenzdicke»
zwischen euklidischen, elliptischen und hyperbolischen
Räumen darstellt.

Wäre zum Beispiel $q_0 = 1$, so wäre unsere Welt ellip-
tisch mit $R_0 = \frac{c}{H_0} = 20 \cdot 10^9$ Lichtjahre (Gleichung 14)

bei $H_0 = \frac{50 \text{ km/sec}}{\text{Mpc}}$, und würde sich mit Lichtgeschwin-
digkeit ausdehnen, da ja laut (11) $\dot{R}_0 = R_0 H_0$, und das
wäre gleich c .

Die Expansion beginnt bei sehr kleinem Krümmungs-
radius mit hoher Geschwindigkeit. Am Anfang der kos-
mologischen Entwicklung entstand eine Situation, bei
der die Materie und die Strahlungsenergie zu unvorstell-
barer Dichte komprimiert war. Mit dem Urknall setzte
eine zuerst rasche und dann immer langsamer werdende
Expansion ein.

Für $k = -1$ ergibt sich, dass die Expansion asymp-
tisch langsamer wird, sich jedoch unbegrenzt fortsetzt.
Für $k = +1$ kommt die Expansion zum Stillstand, wenn
 R seinen Maximalwert, nämlich

$$(15) R_{\max} = R_0 \frac{2q_0}{2q_0 - 1}$$

erreicht hat, und es setzt dann eine Schrumpfung ein. Eine Weltperiode (Ausdehnung und Schrumpfung) dauert

$$(16) t_w = \frac{2}{H_0} \cdot \frac{q_0}{2q_0 - 1}$$

und wiederholt sich von neuem; wir erhalten das Modell einer «Oszillierenden Welt».

Wenn wir Weltalter gleichsetzen mit $t = 1/H$, so haben wir stillschweigend angenommen, dass die Expansion gleichförmig ist. Die Vergangenheit lief jedoch rascher ab, daher ergibt eine genauere Rechnung:

$$\text{Für } q_0 = 1, t = \frac{(\pi/2 - 1)}{H_0} = 11,4 \cdot 10^9 \text{ Jahre und}$$

für $q_0 = 1/2$ (also euklidische Welt) $t = 13,4 \cdot 10^9$ Jahre; für ein hyperbolisches All mit sehr kleiner Vergrößerungszahl ergibt sich ein H_0^{-1} von $20 \cdot 10^9$ Jahren. Für $q_0 \approx 1$ ist $t_w = 120 \cdot 10^9$ Jahre, der Zeitraum einer Weltperiode.

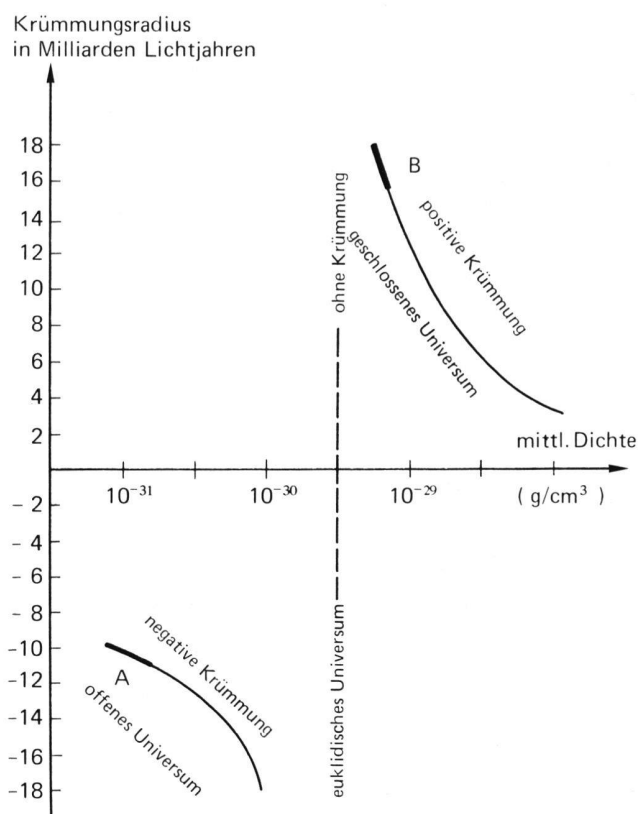


Abbildung 3 Zusammenhang zwischen der mittleren kosmischen Dichte und den Weltmodellen

Bei einem derzeitigen Alter von etwa $12 \text{ bis } 18 \cdot 10^9$ Jahre befinden wir uns dann am Anfang der Oszillation. R_{\max} wird in diesem Fall doppelt so gross als der heutige R_0 . Wenn wir Gleichung (13) betrachten, so können wir sagen, dass die Dichte ρ_0 ein Kriterium für die Raumkrümmung ist. Ein elliptischer, also geschlossener Raum ist nur dann möglich, wenn $q_0 > 1/2$ ist und für

$q_0 = 1/2$ die kritische Dichte von $\rho_0 = 0,46 \cdot 10^{-29}$ folgt. Das heisst: Ist die Dichte grösser, so leben wir in einem geschlossenen Raum; ist sie geringer, so in einem offenen Raum; ist sie genau ρ_0 , so in einem euklidischen Raum (Abb. 3). Bei der Abschätzung der Materiedichte aus der Beziehung zwischen Masse und Leuchtkraft unserer kosmischen Umgebung gelangt man zu einem Wert von $3 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$. Dies würde bedeuten, wir lebten in einem offenen (hyperbolischen) Raum mit $q_0 \approx 3 \cdot 10^{-2}$. Da jedoch andere Beobachtungen auf ein viel grösseres q_0 hindeuten, liegt die Vermutung nahe, dass uns bisher ein grosser Teil der Weltmasse verborgen geblieben ist. Es könnte sich da um ein feinverteiltes intergalaktisches Gas handeln. Jedoch fehlen Absorptionslinien in den Spektren ferner Galaxien. Man denkt daher in neuerer Zeit eher an massive, kollabierende Objekte, wie sie die Neutronensterne und Schwarzschild-Singularitäten (Schwarze Löcher) darstellen und wie sie in Quasaren und Galaxien-Zentren offenbar häufig vorkommen. Die «Dynamik der Nebelhaufen» lässt nämlich auch derartige Massendefekte erkennen.

Bis heute ist erst ein kleiner Teil des Raumes erfasst. Aus den letztgenannten Überlegungen resultiert derzeit ein

$$(17) q_0 = +0,95 \pm 0,4;$$

wir können daher mit hoher Wahrscheinlichkeit ausschliessen, dass unser Weltall euklidisch oder hyperbolisch ist. Die «Urknall-Hypothese» hat durch die Entdeckung der sogenannten 3K-Hintergrundstrahlung starke Schützenhilfe erhalten, und man nimmt an, dass hier der letzte Rest von jenem Feuerball gefunden wurde, aus dem unser All geboren wurde. Noch heute überwiegt die Photonendichte ($10^8/\text{m}^3$) die Teilchendichte ($0,1 \text{ bis } 10/\text{m}^3$) bei weitem. Die Gesamtzahl der Lichtquanten hat sich nicht mehr verändert, seit das Weltall am Ende der Photonenära durchsichtig geworden ist. Nurch die Strahlungstemperatur hat sich von $\sim 100\,000 \text{ K}$ auf $2,7 \text{ K}$ abgekühlt. Bekanntlich ist die Existenz einer Strahlung erst dann als gesichert anzusehen, wenn sie durch die Planck-Kurve erkannt werden kann. Für die 3K-Strahlung geht der Wellenbereich von $0,03 \text{ bis } 100 \text{ cm}$, wobei bei $0,11 \text{ cm}$ das Strahlungsmaximum liegt. Beobachtungen jenseits des Maximums zeigten leider widersprechende Ergebnisse, die Intensität im kurzwelligen Bereich war wesentlich grösser als durch die Planck-Kurve gefordert. All diese Messungen sind jedoch mit einer grossen Unsicherheit behaftet, und zwar:

1. auf der Erde, hervorgerufen durch die Atmosphäre, die für grosse Spektralbereiche undurchlässig ist, beziehungsweise elektromagnetische Signale stark verfälscht und auch
2. in Erdnähe, etwa von Ballonen, Sonden und dergleichen, Unsicherheiten wegen des Streulichtes gegeben sind.

Zusammenfassend halten wir fest, dass unter dem Bündel von Weltmodellen, welches uns die ART liefert, dasjenige herauszufinden, das mit der realen Welt übereinstimmt, nur möglich ist, wenn die Materien- und Energiedichte, der Weltradius, dessen Expansionsgeschwindigkeit und die Verzögerung derselben, zu irgendeinem Zeitpunkt, etwa der Gegenwart, bekannt

wären. Leider ist von diesen Grössen keine direkt beobachtbar, vielmehr sind sie nur «vermittelnd» abzuleiten!

Da uns eine weit grössere Zahl von «Beobachtungen» zur Verfügung steht, als Unbekannte in den Friedmann-Le-Maitre-Gleichungen enthalten sind, sollte es prinzipiell möglich sein, diese Unbekannten zu berechnen. Leider sind jedoch bislang die Kenndaten astronomischer Objekte so fehlerhaft, dass unter den verschiedenen möglichen Weltmodellen das richtige noch nicht mit Sicherheit erkannt werden konnte.

Von der Zukunft dürfen wir aber noch sehr interessante Resultate erwarten, wenn Beobachtungsräume, wie grosse Himmelslaboratorien, auf Satelliten oder unserem Trabanten geschaffen werden. Enttäuschungen sind jedoch ebensowenig auszuschliessen wie ungeahnte Neu-entdeckungen.

Adresse des Verfassers

o. Prof. Dipl. Ing. Dr. techn. Hans Schmid, Institut für Kataster- und Landesvermessung, Technische Hochschule Wien, Karlsplatz 13, A-1040 Wien

Problèmes des cartes thématiques pour les besoins de la planification spatiale et de l'aménagement du territoire

M. Odlanicki-Poczobutt, Krakow

On peut diviser les élaborations cartographiques pour les besoins de la planification spatiale en deux groupes principaux: 1. cartes et plans topographiques de base nécessaires aux études de planification, 2. cartes thématiques. Le caractère compliqué et pluri-disciplinaire des problèmes concernant les travaux de la planification spatiale exige l'élaboration et l'application des cartes à des échelles diverses et à des contenus divers, selon le type de problèmes qu'on résout et selon l'étape de la planification nationale, régionale ou bien locale (l'aménagement urbain et foncier). Cela concerne avant tout les cartes thématiques. Il en résulte la nécessité de l'élaboration d'un système de classification des cartes thématiques, pour les besoins de la planification spatiale, d'après leur contenu et leur échelle.

L'auteur propose d'appliquer une division des études et des cartes thématiques dans la planification spatiale en trois groupes fondamentaux: a) l'environnement naturel, b) les problèmes démographiques et sociologiques, c) l'état d'aménagement du territoire et d'utilisation des terres (les changements effectués dans la nature par l'homme).

Parmi les différents systèmes de classification des études thématiques qu'on peut rencontrer, il semble qu'une telle division soit la plus limpide et qu'elle constitue un système ouvert qui permet d'élaborer les programmes et de compléter l'inventaire dans la sphère adaptée aux conditions naturelles, sociales et économiques de l'environnement et aux étapes particulières des travaux dans la planification spatiale aussi bien régionale que locale. Néanmoins dans certains cas des doutes peuvent survenir au cours de la classification de l'environnement, car on ne rencontre presque jamais une nature tout à fait primitive; l'environnement naturel est très souvent en grand degré transformé par l'activité de l'homme.

Dans les élaborations traditionnelles on emploie trois formes de présentation des résultats de l'inventaire et des recherches d'étude: 1. la notation des informations numériques en table de données de statistique et des résultats de mesures et d'analyses, 2. la description des phénomènes étudiés avec l'analyse des informations et les propositions ressortant des études relatives aux projets

de l'aménagement de l'espace, 3. les élaborations cartographiques.

Des systèmes convenables d'informations avec banques de données surgissent maintenant, dans lesquelles seront assemblés, actualisés et conservés les ensembles d'informations indispensables aux travaux de la planification spatiale et le traitement des informations pour les travaux d'études et de projets sera effectué d'une façon automatique à l'aide des ordinateurs et des moyens cartographiques dérivés des ordinateurs, selon des programmes complexes préétablis. Il y a déjà des systèmes qui rendent possible l'application des méthodes et des moyens d'informatique pour l'élaboration des cartes thématiques à l'aide des techniques automatiques spéciales (SYMAP, LINMAP, COLMAP, système de J. Gazdzicki et d'autres).

Toutefois il faut souligner que la technologie des travaux d'études, de projets et de réalisations dans la planification spatiale demandera presque toujours une présentation des résultats de l'inventaire d'une suite de phénomènes et l'analyse des qualités du territoire élaboré, sous forme cartographique, aussi bien pendant les élaborations à l'aide des méthodes traditionnelles, qu'en appliquant les techniques automatiques d'informatique.

L'étude de certains problèmes dans la planification spatiale doit embrasser une recherche complexe des phénomènes et des qualités caractéristiques de l'environnement dans un rayon spatial dépassant le terrain étudié. Comme exemples on peut citer les études dans la sphère des problèmes du macroclimat, des eaux, des routes, de la circulation urbaine, de la structure administrative etc.

Avant l'élaboration du programme d'études il faut assembler, classifier et évaluer toutes les élaborations scientifiques et techniques qui existent, les données statistiques, les cartes et tous les matériaux concernant l'espace étudié.

Les cartes topographiques et les plans topographiques à grande échelle qui existent forment maintenant la base cartographique pour le traitement des résultats des mesures d'inventaire et des études thématiques dans la planification spatiale. Toutefois il faut souligner que les cartes qui existent ne sont pas souvent actuelles en raison du changement de l'aménagement du territoire. En outre elles ne contiennent pas de série d'éléments indispensables dans la planification spatiale. En liaison avec cela, il faut en principe exécuter des mesures complémentaires, ou même un inventaire complet de certains phénomènes et de composantes qui ont un caractère qualitatif du terrain.