Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))

Band: 73-F (1975)

Heft: 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

Artikel: Reflexive prediction

Autor: Bjerhammar, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-227543

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

zweiten Elements der ersten Zeile sowie das zweite Element der zweiten Zeile identisch mit dem ersten Element der ersten Zeile ist. Im Rahmen der linearen Algebra lässt sich dieses Prinzip verallgemeinern: Beliebig viele ($m < n^2$) Elemente lassen sich als allgemeine lineare Ausdrücke der $n^2 - m$ festen Elemente ansetzen; zwei Matrizen A und B mit je dem gleichen Ansatz werden miteinander multipliziert, und dann werden die Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Produktmatrix wiederum denselben Ansätzen genügt. Dadurch werden Matrizen mit im allgemeinen ein paar Parametern ausgesiebt, die in bezug auf ihre Multiplikation (und Inversion) eine Gruppe bilden. Die bei drei- und mehrreihigen Matrizen sehr aufwendigen Schreib- und Rechenarbeiten lassen sich durch ein geschicktes Schema erheblich vermindern. Der Weg führt konsequent zur Erfassung aller möglichen Gruppen, die in den Matrizen naturgegeben stecken; er ist sehr erfolgreich beschritten worden und hat schon zu überraschenden, ungeahnten Anwendungsbereichen offenen Ergebnissen geführt. Auf diese Weise lassen sich noch viele in den Matrizen ruhende Möglichkeiten aufdecken, allein aus ihrer Definition und dem Gruppencharakter heraus.

15. In Abschnitt 2 ist angedeutet worden, die Elemente von Matrizen könnten statt reeller Zahlen selbst wiederum Matrizen m-ter Ordnung sein. Nachweisen lässt sich dies durch einfaches Rechnen. Nun ergibt sich bei der Multiplikation zweier Matrizen n-ter Ordnung miteinander, deren Elemente Matrizen m-ter Ordnung sind, ein Ergebnis, das auch eingetreten wäre, wenn man in den Ausgangsmatrizen von vornherein die Klammern um deren Elemente weggelassen und mit gewöhnlichen Matrizen mn-ter Ordnung gerechnet hätte. Umgekehrt lässt sich auf diese Weise zum Beispiel eine Matrix zweiter Ordnung, deren Elemente komplexe Zahlen sind, sofort zu einer Matrix vierter Ordnung mit nur reellen Zahlen umwandeln; diese stimmen im Prinzip mit allen Operationen in den Ergebnissen überein, vorausgesetzt die einzelnen Werte an den entsprechenden Stellen werden richtig interpretiert.

16. Ein Umstand ist in diesem Aufsatz bewusst nicht gestreift worden, auf den wegen der praktischen Bedeutung der Matrizen sehr viel Geist und Scharfsinn aufgewendet wurde: das ist die numerische Behandlung von Matrizen, die Ausarbeitung zweckmässiger Verfahren für die Inversion, für die Eigenwertbestimmung, die Behandlung von schlecht konditionierten Matrizen, die Aufstellung von Vergleichskriterien für Matrizen usw. Hier sollte nur ein Überblick über das allen Matrizen Gemeinsame, über die Zusammenhänge und den Hintergrund der Operationen und über weitere Erkenntnisse, die aus Matrizen noch gewonnen werden können, gegeben werden.

Adresse des Verfassers
Dr. Gottlob Kirschmer, Deutsche Geodätische Kommission
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften,
D-8 München 22, Marstallplatz 8

Reflexive Prediction

A. Bjerhammar, Stockholm

Abstract: A new prediction problem is defined. For a weakly stationary stochastic process a set of observations is given. It is required to find a set of unknowns (observations) which have the given observations as optimal predictions for a prescribed covariance function. The solution of this problem is very general and includes the Wiener-Hopf approach as a limiting case. An application to the gravimetric boundary value problem in physical geodesy is given. In our study we start with a condensed presentation of the Wiener-Hopf approach for discrete cases. Dramatic computational gains in reflexive prediction and filtering are demonstrated.

We consider a stochastic process $x(t)$ with the expectation

$$E\{x(t)\}=0 \qquad (t \text{ time parameter}) \tag{1}$$

The covariance function $Q(\tau)$ is for a weakly stationary process

$$Q(\tau)=E\{x(t)\cdot x(t+\tau)\}. \tag{2}$$

In most applications the following estimator is used

$$\hat{Q}(\tau)=\frac{1}{2(T-\tau)}\int_{-T+\tau}^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{3}$$

This estimator is unbiased with

$$E\{\hat{Q}(\tau)\}=\frac{1}{2(T-\tau)}\int_{-T+\tau}^{T-\tau} E\{x(t)x(t+\tau)\}\mathrm{d}t=Q(\tau) \tag{4}$$

If this estimator converges to the true value when $T\to\infty$ then the process is *ergodic*. For a *non-ergodic* stochastic process we have no simple means of determining the covariance function. Our following study is mainly devoted to problems when the correct covariance function is not a priori given. Instead we want to find 'observations' which have a given covariance function.

Most technical studies of the theory of weakly stationary processes result in non ergodic applications. This is a highly unsatisfactory situation and we find it natural to look for a solution, where we make our predictions with the use of auxilliary 'unknown observations' which are determined in such a way that they for a prescribed covariance function give optimal predictions, that are identical with the given observations.

Problem: From a weakly stationary stochastic process we take a set of n observations (outcomes). It is required to find m unknown observations in the outcome space

of the stochastic process which have the given observations as optimal predictions for a prescribed covariance function.

Definition: Optimal prediction = prediction with minimum variance.

Solution:
From the Wiener-Hopf approach we recall the general prediction formula

$$f-\varepsilon=\mathbf{a}\cdot\mathbf{h} \tag{5}$$

with

$\mathbf{h}$	= vector of observations $E[\mathbf{h}]=0$	$(m\times 1)$
f	= unknown prediction	(1×1)
ε	= prediction error	(1×1)
$\mathbf{a}$	= predictor (vector)	$(1\times m)$

Wiener wanted to determine the predictor that gives minimum variance for the selected covariance function. We have

$$\varepsilon\varepsilon=\mathbf{a}\mathbf{h}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{a}\mathbf{h}\cdot f+ff$$

with expectations

$$\sigma^2=\mathbf{a}\mathbf{Q}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{a}\mathbf{k}+E\{ff\}$$

where

$$E\{\mathbf{h}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\}=\mathbf{Q};\qquad E\{f,\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\}=\mathbf{k}.$$

$$2\mathbf{a}\mathbf{Q}-2\mathbf{k}=0 \quad \text{for a minimum}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{k}\mathbf{Q}^{-1}$$

and we obtain the optimal prediction

$$\underset{1.1}{f} = \underset{1.m,}{\mathbf{k}}\ \underset{m.m,}{\mathbf{Q}^{-1}}\ \underset{m.1}{\mathbf{h}} \tag{6}$$

We now *reverse* this problem and introduce the following modifications

1:0 All obervations f are considered 'given predictions',
2:0 The $\mathbf{h}$-values are considered unknown for selected carrier points,
3:0 The prescribed covariance function is valid for the unknown $\mathbf{h}$-values.

We now use *all* the given observations and obtain the following *matrix* equation

$$\underset{n.1}{\mathbf{f}} = \underset{n.m,}{\mathbf{K}}\ \underset{m.m,}{\mathbf{Q}^{-1}}\ \underset{m.1}{\mathbf{h}} = \underset{n.m,}{\mathbf{K}}\ \underset{m.1}{\mathbf{x}} \tag{7}$$

We note that the K-matrix is (a-)symmetric. The inversion of the Q-matrix is, of course, not needed for a determination of the $\mathbf{x}$-vector.
When the $\mathbf{x}$-vector is obtained, then any new prediction $\mathbf{g}$ is given by the relation

$$\boxed{\mathbf{g}=E\{\mathbf{g}\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\}\mathbf{x}} \tag{8}$$

This type of 'reflexive prediction' is very general and gives as a limiting case the classical Wiener-Hopf approach when the carrier points and the given points coincide.
The reader will note that our new type of solution will require
1:0 selection of covariance function,
2:0 selection of carrier points.
The choice of covariance function is here less dramatic then in the classical case. We normally choose the 'best available' covariance function for the given observations and apply it to the 'unknown observations'. The choice of carrier points is more intricate. In the simpliest case we use the same number of carrier points and given observations.
The main advantage of the new prediction technique is obtained, when combining the prediction with filtering (see below).
We identify some of the interesting solutions.

Case 1: Prediction without filtering
$n=m$ and full rank of $\mathbf{K}$

$$\mathbf{x}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \tag{9}$$

Case 2: Prediction and filtering
$n>m$ and full rank of $\mathbf{K}$
Prediction

$$\mathbf{x}=(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} \tag{10}$$

with

$$(\mathbf{f}-\mathbf{K}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{f}-\mathbf{K}\mathbf{x})=\min$$

$\mathbf{P}^{-1}$ = covariance matrix from the noise of $\mathbf{f}$.

Case 3: Pure prediction with redundant carrier points
$n<m$ and $\mathbf{K}$ full rank

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{f} \tag{11}$$

with

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}=\min$$

Case 4: $\mathbf{K}$ of any rank and $\mathbf{R}$ = covariance matrix (generalized inverses)

$$\mathbf{x}=\mathbf{R}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} \tag{12}$$

minimizing

$$(\mathbf{K}\mathbf{x}-\mathbf{f})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{K}\mathbf{x}-\mathbf{f})$$

and then

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}.$$

Application
Our new prediction technique will be applied to a study of gravity anomalies (Δg). We use the following covariance function for the gravity anomalies at two points P_j and P_i (from the Poisson integral)

$$E\{\Delta g_j \Delta g_i\}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^2(2n+1)(r_o^2/r_j r_i)^{(n+2)}P_n(\cos\omega_{ji})$$

where ω_{ji} is the geocentric angle between the two points, $P_n(\cos\omega)$ is the Legendre polynominal of order n, r_o radius of an internal sphere and finally r_j, r_i are the geocentric distances to the actual points.

The cross-covariance matrix is

$$\mathbf{K}=E\{\Delta\mathbf{g}_j\Delta\mathbf{g}_i^T\} \qquad (\Delta\mathbf{g}_j \text{ and } \Delta\mathbf{g}_i \text{ are here vectors})$$

The unknown **x**-vector is obtained from the matrix equation

$$\Delta\mathbf{g}_j=\mathbf{K}\mathbf{x}$$

The gravity anomaly Δg_p at the point p is now (prediction)

$$\Delta\mathbf{g}_p=E\{\Delta\mathbf{g}_p\Delta\mathbf{g}_i^T\}\mathbf{x}$$

($\Delta\mathbf{g}_i^T$=gravity vector of carrier points)

$$E\{\Delta g_p\Delta g_i\}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^2(2n+1)(r_o^2/r_pr_i)^{(n+2)}P_n(\cos\omega_{pi})$$

or for $\sigma_n^2=1$

$$E\{\Delta g_p\Delta g_i\}=(t^2-t^4)/\varrho^3;\ t=r_o^2/r_pr_i;\ \varrho^2=1+t^2-2t\cos\omega_{pi}.$$

The disturbance potential T_p at the point p is

$$T_p=E\{\mathbf{T}_p\Delta\mathbf{g}_i^T\}\mathbf{x}$$

$$E\{T_p\Delta g_i^T\}=$$

$$r_o\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^2(2n+1)(n-1)^{-1}(r_o^2/r_pr_i)^{(n+2)}P_n(\cos\omega_{pi});$$

and for $\sigma_n^2=1$

$$E\{T_p\Delta g_i\}=r_pt^2(2\varrho^{-1}-3\varrho+1-5t\cos\omega_{ji}-3t\cos\omega_{pi}\ln\Phi)$$

$$\Phi=(1+\varrho-t\cos\omega_{pi})/2.$$

Vertical deflections in X and Y directions are then given by

$$\xi_p=-\frac{\delta T_p}{\delta X}/\gamma_p=-(\mathbf{f}_X/\gamma_p)\mathbf{x}$$

$$\eta_p=-\frac{\delta T_p}{\delta Y}/\gamma_p=-(\mathbf{f}_Y/\gamma_p)\mathbf{x}$$

γ_p = theoretical gravity at the point p.

$$\begin{bmatrix}(f_X)_{pi}\\(f_Y)_{pi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha_{pi}\\\sin\alpha_{pi}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\,[t^3\sin\omega_{pi}(2\varrho^{-3}-8+3(\varrho+1)^2/(2\varrho\Phi)-3\ln\Phi]$$

ω_{pi}=geocentric angle between the point p and the carrier point i

α_{pi}=azimuth between the point p and the carrier point i

The predictions have no geophysical meaning for points inside the physical surface of the earth.
We easily identify the following five special choices of carrier points:

1:0 Carrier points in the given points. Classical solution according Wiener-Hopf.

2:0 Carrier points in the given points with $\sigma_n^2=1$. Classical Hilbert space solution with reproducing kernel.

3:0 Carrier points on the reference sphere. Dirac approach.

4:0 Carrier points on the surface of the earth outside the given points.

5:0 Carrier points between the surface of the earth and the reference sphere.

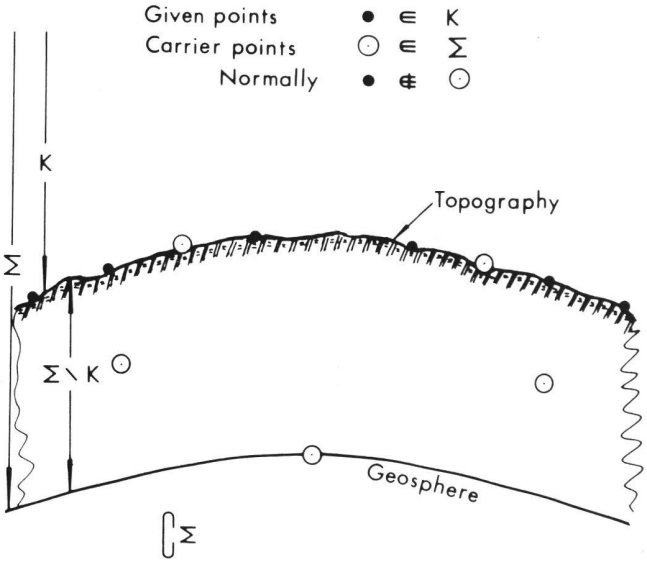
6:0 Cases 1–5 with redundant carrier points and minimization of $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

7:0 Cases 1–5 with least squares filtering.

With any of these choices of carrier points we can combine the four different cases of solution.

Filtering: We can still use the classical filtering according to Wiener. However, a considerable reduction of the computational work is obtained when using least squares filtering according to case 2. If the number of carrier points is reduced to 50% of the total number of observations, then the computational work is reduced by approximately 80% for the solution of the normal equations.

REFLEXIVE PREDICTION



SPECIAL CASES:

WIENER

HILBERT (repr. kernel)

DIRAC IMPULSES

Non-ergodicity: When our weakly stationary stochastic process is not ergodic, then the classical solution according to Wiener is not relevant. If we instead, for a given covariance function, choose a solution where the carrier points do not coincide with the given points, then we obtain such values for the carrier points, that an optimal prediction from the carrier points gives exactly the given points (eventually with filtering). *Thus we let our carrier points adapt themselves to the covariance function, instead of adapting the covariance function to the given points.* One can expect that this method is most power-

ful if we select the carrier points not too close to the given points. When the data for the carrier points have been computed, then the wanted predictions are computed with the use of the 'cross-variance' between the carrier points and the unknowns.
Note. By choosing carrier points closer to the reference sphere, we reduce the correlation and improve the condition number of the equation.

References
Barlik, M. (1970): Kwestia tozwiazania problemu Bjerhammara. Geodezja i Kartografia.
Bjerhammar, A. (1963): Gravimetric Geodesy free of density estimate through analysis of discrete gravity data. Research Inst. for geodetic Sciences. Alexandira Va., USA.
Bjerhammar, A. (1964): A new theory of geodetic gravity. Trans. Roy. Inst. of Technology, Stockholm.
Bjerhammar, A. (1968): A generalized matrix algebra. Trans. Roy. Inst. of Technology, Stockholm.
Bjerhammar, A. (1968): On gravity. Stockholm KTH, 1970.
Bjerhammar, A. (1969): On the boundary value of physical geodesy. Tellus 1969.
Bjerhammar, A. (1973): Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses Elsevier 1973.
Chowitz, B. (1972): Downward continuation of the potential from satellite altidudes.
Förstner, W. (1966): Studies on the problem of Bjerhammar. Trans. Roy. Inst. of Technology, Stockholm.
Golub, G., and *Reinsch, C.* (1970): Singular value decomposition and least squares solutions. Num. Math. 14, 403–420.
Groten, E. (1970): Some remarks on downward continuation of gravity. 'Advances in gravimetry.' Pittsburgh 1970.
Heitz, S., and *Tscherning, C. C.* (1971): Comparisions of two methods of astrogeodetic geoid determinations based on least squares prediction and collocation.
Hotine, M. (1969): Mathematical Geodesy. Essa Washington.
Krarup, T. (1969): A contribution to the mathematical foundation at physical geodesy. Geodetisk Institut, Copenhagen.
Lauritzen, S. L. (1973): The probabilistic background of some statistical methods in physical geodesy. Geodetisk Institut, Copenhagen.
Meschkowski, H. (1962): Hilbertsche Räume mit Kernfunktionen. Springer, Berlin.
Morrison, F. (1966): Validity of the expansion for potential near the surface of the earth.
Moritz, H., and *Schwarz, K. P.* (1972): On the computation of spherical harmonics from satellite observations. Fifth Symposium on Mathematical Geodesy, Florence.
Moritz, H. (1964): The boundary value problem of physical geodesy. Ohio State University, Report No 46.
Moritz, H. (1970): Least squares estimation in physical geodesy. Ohio State University, Report No 130.
Moritz, H. (1972): Advanced least squares methods. Ohio State University, Report No 175.
Pick, M. (1965): On the shape of the earth by using analytical continuation of function. Studia geoph. et geod. 9 (1965), 3.
Reit, B.-G. (1967): On the numerical solution of the gravimetrical integral equation of Bjerhammar. Roy. Inst. of Technology, Stockholm, Geodesy Division.
Deny, J. (1949): Systèmes totaux de fonctions harmoniques. Annales de l'institut Fourier, 1949.
Landkof, N. S. (1972): Foundations of modern potential theory. Springer, Berlin 1972.
Keldych, M., and *Lavrentieff, M.* (1937): Compte rendue. Ac. sc. Paris 1937. P. 1788.

Adresse des Verfassers
Professor Arne Bjerhammar, Kungl. Tekniska Högskolan
Institutionen för Geodesi, S-100 44 Stockholm 70

Über die Ergebnisse freier Netzausgleichungen und ihre Deutung

E. Gotthardt, München

Die übliche vermittelnde Ausgleichung freier Netze hat bekanntlich mit der Schwierigkeit zu kämpfen, dass die einfache Minimumbedingung [vv] = Min zu einer singulären Normalgleichungsmatrix führt, die keine eindeutige Lösung liefert. Nach Meissl [1] kann man diesem Übelstand dadurch abhelfen, dass man nach genäherter Orientierung die Zusatzforderung aufstellt, die Quadratsumme der mittleren Koordinatenfehler der Punkte oder, was damit gleichbedeutend ist, die Quadratsumme der Achsen ihrer Fehlerellipsen solle ein Minimum annehmen. Die Fachliteratur der letzten Jahre bringt zahlreiche Veröffentlichungen, in denen trigonometrische Netze auf diese Weise bearbeitet wurden.
Der entscheidende Kunstgriff besteht dabei darin, dass man die gegebene singuläre Normalgleichungsmatrix N mit der aus den Eigenvektoren gebildeten Matrix S und S^T rändert (Abb. 1), wobei gilt

$$S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \dots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}.$$

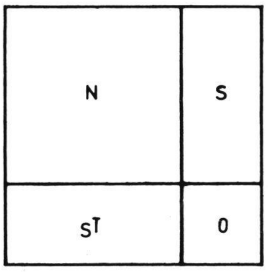


Abb. 1

Wie betont werden muss, ist es nicht erforderlich, alle Punkte des Netzes in die Matrizen S und S^T einzubeziehen. Man kann sich vielmehr auch auf einen Teil der Netzpunkte beschränken. Dies ist in gewissen Fällen sinnvoll und zweckmässig. Die Inversion der Matrix lässt sich mit dem gewohnten Gaussschen Algorithmus nicht ohne weiteres durchführen, bereitet jedoch nach geeignetem Umordnen keine Schwierigkeiten.
Bei der Deutung der Ergebnisse derartiger Minimalausgleichungen hat man zu beachten, dass die berechneten Fehlerellipsen nicht auf ein bequem angebbares System