

**Zeitschrift:** Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 73-F (1975)

**Heft:** 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

**Artikel:** Über Matrizen

**Autor:** Kirschmer, G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-227542>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Matrizen

G. Kirschmer, München

1. Auch für Geodäten gehören die Zahlen, genauer die reellen Zahlen, zum fundamentalen Bestandteil ihrer Arbeit. Die Zahlenoperationen sind so geläufig, dass sich kaum jemand Gedanken über die ihnen innwohnenden Gesetze macht, die über das für die praktische Arbeit Notwendige hinausgehen. Das gilt auch für konsequente Erweiterungen des Zahlenbegriffes, etwa die komplexen Zahlen, die dualen Zahlen, die Quaternionen. Zwar ist es irreführend – wie sich im Verlaufe dieses Aufsatzes ergibt – von einer «Erweiterung des Zahlenbegriffes» zu sprechen, weil letzten Endes immer nur reelle Zahlen im Spiele sind. Ein einfaches Beispiel dafür: Für Zahlenpaare  $(a_1; a_2), (b_1; b_2), \dots$ , wo  $a_1, a_2; b_1, b_2; \dots$  reelle Zahlen sind, können Operationen folgendermassen definiert werden: Addition  $(a_1; a_2) + (b_1; b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$ ; Multiplikation  $(a_1; a_2)(b_1; b_2) = (a_1b_1 + ka_2b_2; a_1b_2 + a_2b_1)$ , wo  $k$  eine vorgegebene reelle Zahl ist. Im Falle  $k = -1$  spricht man von komplexen Zahlen. Ist  $k = 0$ , so hat man es mit den reellen Zahlen selbst zu tun, und für jedes beliebige feste  $k$  sind die Zahlenpaare identisch mit der Kombination  $(a_1 + a_2 \cdot \sqrt{k}), (b_1 + b_2 \cdot \sqrt{k}), \dots$  Beide Operationen, die Addition und die Multiplikation, gehorchen den vier folgenden Gesetzen: a) Durch eine Operation entsteht ein neues Zahlenpaar von genau der gleichen Art wie die beiden Einzelpaare; b) eine Operation mit drei Zahlenpaaren führt zum gleichen Ergebnis, ob nun entweder das erste mit dem zweiten und deren Ergebnis mit dem dritten Paar, oder das erste Paar mit dem Ergebnispaar aus dem zweiten und dritten Paar verknüpft wird; c) es existiert ein Zahlenpaar, die sog. Einheit, das, mit jedem andern verknüpft, dieses nicht ändert; d) zu jedem Zahlenpaar existiert ein inverses, das mit jenem zusammen verknüpft die unter c) genannte Einheit erzeugt. – Diese Eigenschaften von «Elementen», im obigen Beispiel von den Zahlenpaaren, zusammen mit einer wohldefinierten Operation, nennt man eine mathematische Gruppe. Im Zahlenreiche selbst sind zahlreiche Gruppen zu finden, deren besondere Stärke darin liegt, dass sie in sich abgeschlossen sind. Die Anzahl der Elemente kann endlich oder unendlich gross sein (endliche beziehungsweise unendliche Gruppe). – Indessen besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen einer additiven und einer multiplikativen Gruppe; denn am Beispiel der vorigen Zahlenpaare ist leicht zu zeigen, dass die unter c) erwähnte Einheit bei der Addition das Element  $(0; 0)$ , bei der Multiplikation  $(1; 0)$  ist. Für die Addition gibt es unter allen möglichen reellen Zahlen keine Ausnahme unter allen denkbaren Elementen der Gruppe; bei der Multiplikation hingegen muss das Element  $(0; 0)$  wegen der Eigenschaft d) aus den Gruppenelementen grundsätzlich ausgeschlossen werden.

Der Gruppencharakter ist nun den reellen Zahlen und den wenigen genannten Beispielen von Zahlenkomplexen sowohl in bezug auf die Addition als auch auf die Mul-

tiplikation gemeinsam. Noch mehr Gemeinsamkeit aber liegt darin, dass sie alle, samt ihren Operationen, durch Matrizen dargestellt werden können, wodurch sich ihr eigentlicher Charakter klar offenbart und jedes vermeintliche Geheimnis, als das etwa der Begriff der «imaginären» Zahlen aufgefasst werden könnte, vermieden wird. Das Anliegen dieses Aufsatzes ist, auf der Grundlage der bisherigen wenigen einführenden Begriffe das Wesen der Matrizen und die Zusammenhänge ihrer Operationen, allein von der reellen Zahl ausgehend, zu durchleuchten sowie einen Ausblick auf weitere Möglichkeiten zu geben, die in ihnen liegen. Es soll keine Einführung und Definition der Operationen gegeben werden, diese werden für das Verständnis vorausgesetzt. 2. Eine Matrix ist ein quadratisches Zahlenfeld mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten ( $n$ -ter Ordnung), also  $n^2$  reellen Zahlen, an deren Stelle auch  $m$ -reihige Matrizen stehen können; auf diese quadratischen Matrizen lassen sich nach ihren Rechengesetzen auch alle scheinbaren Ausnahmen von dieser Definition zurückführen, von denen in den Abschnitten 3 und 11 einige Beispiele erwähnt werden. – Zwei Matrizen  $A$  und  $B$  sind einander dann und nur dann gleich, wenn jeweils an der gleichen Stelle ( $p$ -te Zeile,  $q$ -te Spalte) die gleiche Zahl (oder Matrix) steht. – Im Gegensatz zum Zahlenfeld der Matrix steht die ihr eng verwandte Determinante, eine Zahl; denn mit den sie kennzeichnenden Strichen anstelle der eine Matrix einschliessenden Klammern ist der Befehl zur Berechnung der Zahl aus den  $n^2$  Elementen nach dem Determinantengesetz verbunden.

3. Oftmals sind die Zahlen in einer Matrix nach einem bestimmten Schema gruppiert und werden dann auch entsprechend bezeichnet. So ist eine Diagonalmatrix mit lauter Nullen besetzt außer in der Hauptdiagonalen (von links oben nach rechts unten), die selbst keine Null enthalten darf. Eine Zeilen- (oder Spalten-) Matrix besteht aus Nullen bis auf eine Zeile (oder Spalte), die mit beliebigen Zahlen besetzt ist. Es gibt Rechteckmatrizen, bestehend aus zwei oder mehr ihrer  $n$  Zeilen (beziehungsweise Spalten) mit beliebigen Zahlelementen, deren alle anderen Elemente aber Nullen sind. Obere/ untere Dreieckmatrizen sind solche, deren Elemente unterhalb/oberhalb der Hauptdiagonale aus Nullen bestehen. – Diese wenigen Beispiele mögen hier für viele weitere genügen.

4. Die Addition und Subtraktion zweier Matrizen ist nach der der reellen Zahlen gebildet: Eine Matrix  $C = A + B$  hat an jeder ihrer  $n^2$  Stellen die Summe der beiden entsprechenden Elemente in den Ausgangsmatrizen  $A$  und  $B$ . Die Matrixaddition erfüllt zusammen mit der Subtraktion die Eigenschaften einer additiven Gruppe (Abschnitt 1); das «Einheitselement» der Eigenschaft c) ist die Nullmatrix, das ist die von lauter Nullen gespeiste Matrix mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten. – Genau wie beim Produkt reeller Zahlen die Multiplikation zweier Zahlen aus einer Verallgemeinerung der Addition hergeleitet wird, so wird die Vervielfachung einer Matrix aus der Addition hergeleitet: das  $p$ -fache einer Matrix  $A$ , also  $pA$ , ist eine neue Matrix, in der jedes Element von  $A$  mit  $p$  multipliziert ist. – Beide Operationen, Addition und Vervielfachung, natürlich zusammen mit ihren Umkehrungen, entspringen exakt den Operationen

der reellen Zahlen. Sie sind beide «determinantenfeindlich», das heisst es existiert keine ihnen entsprechende Operation der Determinanten der beteiligten Matrizen. Dies ist ein wesentliches Merkmal dieser einfachen Operationen.

5. Die wichtigste Matrizenoperation ist die Multiplikation oder das Matrizenprodukt und ihre Umkehrung, die Matrizeninversion. Matrizen bilden in bezug auf ihre Multiplikation und die Inversion eine multiplikative Gruppe (Abschnitt 1). Die Multiplikation ist nicht aus Addition und Vervielfachung ableitbar; ihr entspricht das Determinantenprodukt: Die Determinante einer Produktmatrix ist gleich dem Produkt der Determinanten der Einzelmatrizen. Aus dieser Tatsache folgt bereits, dass eine Inversion einer Matrix mit Determinante Null nicht möglich ist. Von den Gruppenelementen sind also von vornherein alle Matrizen mit Determinantenwert Null auszuschliessen; über diese sogenannten singulären Matrizen – im Gegensatz zu den regulären, deren Determinanten einen von Null verschiedenen Wert besitzen – folgt mehr in Abschnitt 11.

6. Die Operation der Vervielfachung von Matrizen steht in der Mitte zwischen der Addition und dem Produkt. Sie ist aus der Addition direkt ableitbar, doch kann sie auch mit dem Produkt in Zusammenhang gebracht werden. Vervielfacht man eine Matrix A mit einer Zahl p, so erzielt man den gleichen Effekt, wenn man die Matrix A mit einer Diagonalmatrix (der gleichen Ordnung n) mit lauter gleichen Diagonalelementen p multipliziert. Auf diese Weise lässt sich jede Vervielfachung einer Matrix in ein Matrizenprodukt umwandeln, für das sinngemäss auch das Determinantengesetz gilt.

7. Mit Addition, Vervielfachung und Produkt lässt sich ein einfacher Matrizenkalkül aufbauen, stets natürlich unter der Voraussetzung einer festen Ordnungszahl n. Dieser Kalkül, immer innerhalb der Gruppe sich konsequent bewegend, ist nahezu problemlos. Probleme kann es, abgesehen von Rechenfehlern, nur geben, wenn unversehens singuläre Matrizen hereinkommen, deren Inversen eine Rolle spielen. Auf diese Weise entstehen Trugschlüsse, wie sie vom Rechnen mit reellen Zahlen bekannt sind, wenn unbedacht durch einen Ausdruck dividiert wird, dessen Wert Null ist.

8. Matrizen und ihr Produkt sind nicht von Theoretikern erdacht worden. Unabhängig voneinander ist die Multiplikation durch die Ausführung sukzessiver linearer Transformationen und die Inversion durch die Auflösung linearer Gleichungssysteme gefunden und vom Ausgangsproblem abstrahiert worden. Schritt für Schritt wurde deren Zusammenhang und ihr Gruppencharakter erkannt, der für ihre Bedeutung entscheidend ist. Viele weitere Anwendungsmöglichkeiten haben sich bald offenbart. So muss es faszinierend gewesen sein, zu entdecken, dass die Matrizenmultiplikation auch die Multiplikation quantenphysikalischer Koeffizientensysteme widerspiegelt. – Aus den Entstehungsquellen ist die Vereinbarung über die Ausführungsregel des Produkts («Zeilen der linken mit Spalten der rechten Matrix») zu verstehen; denn von der Theorie her wäre es gleich, wie beim Multiplizieren kombiniert wird: man unterscheide bloss den Effekt, wenn man für zwei zu multiplizierende

Matrizen abwechselnd für eine deren Transponierte (an der Hauptdiagonalen Gespiegelte) setzt.

So ist die Entwicklung der Matrizentheorie im wesentlichen aus der Praxis heraus und zunächst nicht als mathematische Disziplin fortgeschritten. Das erklärt auch, warum bis heute Matrizen in erster Linie als Hilfsmittel betrachtet werden und nicht als das, was sie sind: Zahlenfelder als sinngemäss Erweiterung des eindimensionalen Zahlenreiches auf höhere Dimensionen, und zwar mit solchen Operationen und Strukturen (in erster Linie Gruppencharakter), dass sie Naturgesetzen in gleicher Weise gerecht werden wie Zahlen.

Hier lässt sich einwenden, die eindimensionale Zahlengerade sei hier nur zur zweiten Dimension erweitert worden. Diese Vorstellung ist nicht richtig, weil ja bei Verwendung von Zahlen immer nur ein Zahlenwert, nicht die Zahlengerade an sich, verwendet wird, bei Matrizen n-ter Ordnung aber für eine Angabe  $n^2$  unabhängige Zahlenwerte zur Verfügung stehen, die freilich, wie in Abschnitt 14 gezeigt wird, unter Umständen weniger als  $n^2$  sein können. Im Reiche der abstrakten Zusammenhänge, in dem die Zahlen eine fundamentale Rolle spielen, sind die Matrizen zunächst aus Anwendungen heraus «erfunden» worden; sie haben sich aber als «Entdeckung» einer neuen, mehrdimensionalen Zahlenwelt herausgestellt.

9. In diesem Zusammenhang gehört ein Weg erwähnt, der mit einem Erfolg beschritten worden ist: quadratische Zahlenfelder können zu kubischen erweitert werden, für die ähnliche Operationen eingeführt werden wie für Matrizen. Bisher konnten aber weder für bestimmte Ordnungszahlen n noch für gewisse Operationen solche Zahlenkuben gefunden werden, für die auch Inversionen existieren. Sie bilden also nach Abschnitt 1 keine Gruppen, und ihre Anwendungsmöglichkeiten beschränken sich auf Einzelprobleme, wie dies auch für singuläre Matrizen gilt (Abschnitt 11).

10. Der Vergleich zweier reeller Zahlen miteinander ist einfach: sie können einander gleich sein, oder die eine ist grösser als die andere. – Bei zwei Matrizen lässt sich Gleichheit oder Ungleichheit ebenfalls klar entscheiden (vergleiche Abschnitt 2). Für ungleiche Matrizen aber gibt es kein so klares Kriterium wie «grösser oder kleiner». So sind zahlreiche andere Unterscheidungskriterien, je nach Problemstellung, geschaffen worden. Man kann die Anzahl der Nullen unter den Matrizelementen auszählen; oder die Anzahl positiver Elemente. Eine wichtige Masszahl ist die Determinante einer Matrix, sie ist auch ausschlaggebend für «reguläre» oder «singuläre» Matrizen (Determinantenwert  $\neq 0$  beziehungsweise = 0). Eine bedeutende Stellung unter den Masszahlen nimmt auch die «Spur» ein, das ist die Summe aller Elemente in der Hauptdiagonalen. Diese Hinweise mögen genügen. Indessen müssen in diesem Zusammenhang die Eigenwerte einer Matrix erwähnt werden. Sie spielen bei Anwendungen oftmals eine ausgezeichnete Rolle, die hier allein von der gegebenen Matrizendefinition aus betrachtet werden soll.

Die einfacheren, für Anwendungen weniger bedeutenden «allgemeinen Eigenwerte» von Matrizen fliessen aus der schlichten Fragestellung: Gibt es zu einer gegebenen regulären Matrix A von n-ter Ordnung eine Matrix A von

der besonders einfachen Bauart, dass alle ihre Elemente den gleichen Wert  $\lambda$  annehmen, so dass die Matrix  $A - \lambda I$  singulär wird? – Die Antwort ist einfach; denn die gleich Null gesetzte Determinante der Matrix  $A - \lambda I$  führt zu einer linearen Gleichung in  $\lambda$  mit einem eindeutigen Lösungswert.

Ähnlich ist die Fragestellung bei den «Eigenwerten einer Matrix»: Gibt es zu einer gegebenen regulären Matrix  $A$  von  $n$ -ter Ordnung eine Diagonalmatrix  $\Lambda$  mit gleichen Diagonalelementen  $\lambda$ , so dass die Matrix  $A - \lambda I$  singulär wird? – Die Antwort ist wiederum einfach, wenn auch die praktische Realisierung schwieriger wird; denn die gleich Null gesetzte Determinante der Matrix  $A - \lambda I$  führt in diesem Fall zu einer Gleichung  $n$ -ten Grades in  $\lambda$ , die im allgemeinen  $n$  Lösungen besitzt. Deren Werte erlauben Schlüsse auf die innere Struktur der Ausgangsmatrix, zu erkennen bereits an der Koeffizientenbildung der Gleichung, was die zahlreichen Anwendungsbereiche der Eigenwerte erklärt. Auch hier sind die Anwendungen den theoretischen Untersuchungen der Zusammenhänge vorausgegangen.

Die Eigenwerte beziehen sich auf die Hauptdiagonale einer Matrix. Jede Matrix besitzt im ganzen  $n!$  Diagonalen, die – der Berechnung einer Determinante entsprechend – jeweils  $n$ -fache Produkte sind, deren  $n$  Faktoren alle  $n!$  Möglichkeiten einer solchen Zusammensetzung sind, dass von jeder Zeile und jeder Spalte je ein Faktor stammt. Grundsätzlich besitzt jede Diagonale ihre spezifischen Matrizeneigenwerte, aber deren Gleichungen  $n$ -ter Ordnung sind alle ähnlich gebildet.

11. Der Determinantenwert Null einer Matrix ist, wie mehrmals erwähnt, für die Klassifizierung der Matrizen in singuläre und reguläre entscheidend; letztere bilden mit ihrem Produkt eine Gruppe. Grundsätzlich sind alle singulären Matrizen von den Gruppenelementen bezüglich der Multiplikation ausgeschlossen und entsprechen damit der Null bei der Gruppe der reellen Zahlen in Bezug auf deren Multiplikation. Nun gibt es zwar genau eine Nullmatrix, nämlich die mit lauter Nullelementen; aber singuläre Matrizen gibt es unendlich viele, und viele davon besitzen umfangreiche Anwendungsbereiche. Allein mit Hilfe der Eigenwerte und des allgemeinen Eigenwertes lassen sich zu jeder regulären Matrix  $n$ -ter Ordnung im allgemeinen  $n+1$  spezielle singuläre Matrizen angeben.

Einen Sonderfall für singuläre Matrizen spielen zum Beispiel die in Abschnitt 3 genannten Rechteckmatrizen. Hier verzichtet man beim Anschreiben auf die mit Nullen besetzten Spalten beziehungsweise Zeilen, rechnet aber nach den allgemeinen Regeln so, wie wenn die Matrix voll quadratisch wäre, freilich unter Ausschluss einer Inversion, die es in diesem Falle nicht geben kann. – Im Falle nur einer Zeile beziehungsweise Spalte spricht man von Vektoren. Für die Vektorrechnung ist ein leistungsfähiger Kalkül entwickelt worden, der in seiner Abgrenzung gegenüber dem in Abschnitt 7 erwähnten Kalkül mit regulären Matrizen beispielhaft ist. – Verschieden gebildete singuläre Matrizen bedingen verschiedene Kalkülgesetze. Die Spielarten, die sich fast alle aus Anwendungen ergeben, sind unerschöpflich; ebenso sind es Sonderregeln, die bei der Bildung eines solchen Kalküls eine Rolle spielen können. Es muss nicht einmal immer

eine feste Ordnungszahl innerhalb eines Kalküls eingehalten werden, diese kann springen. Auf diese Weise gelangt man unter bestimmten Bedingungen zu «verallgemeinerten» oder «Pseudo»-Inversen usw. zu einer singulären Matrix. In dieser Vielfalt von Möglichkeiten ist reichlich Spielraum sowohl für die Anwendung von singulären Matrizen auf Vorgänge in der Natur, Technik, Wirtschaft, Statistik usw. als auch für die Phantasie.

12. Wieder zur Gruppe der regulären Matrizen  $n$ -ter Ordnung zurückkehrend, sei an die Formulierung in Abschnitt 1 erinnert, es gäbe endliche und unendliche Gruppen. Letztere sind nach den gegebenen Beispielen selbstverständlich. Für eine endliche Gruppe sei ein Beispiel erwähnt, das ohne (platzkostende) Formeln beschrieben werden kann. Ausgehend von der dreireihigen Einheitsmatrix (mit Determinante 1), die ohnehin zu allen Gruppen und Untergruppen der dreireihigen Matrizen gehören muss, werden alle möglichen Matrizen mit Determinante 1 gebildet, die je drei Einsen (+1 oder -1) und sechs Nullen aufweisen; davon gibt es 24, und diese hängen alle miteinander durch die Multiplikation und Potenzierungen zusammen: sie bilden eine endliche Gruppe, die selbst wiederum mehrere Untergruppen enthält. – Diese Gruppe lässt sich durch Variieren der Vorzeichen so erweitern, dass auch die Elemente mit Determinante -1 eingeschlossen sind. Für diese immer noch sehr übersichtliche Gruppe von 48 verschiedenen Elementen lässt sich eine interessante, alle mit ihr zusammenhängenden Probleme und Verknüpfungsmöglichkeiten wiedergebende «Gruppentafel» anlegen. Geometrisch ist diese Gruppe die Matrizendarstellung aller Transformationen einschließlich der Spiegelungen von Würfel und Oktaeder in sich selbst. – Ähnliche endliche Gruppen von Matrizen entstehen durch die entsprechenden Transformationen in sich selbst des Tetraeders, oder von Ikosaeder und Dodekaeder.

13. In Abschnitt 8 ist gezeigt worden, wie Matrizen Vorgänge linearen Charakters beschreiben oder darstellen. Erwähnt wurden in diesem Aufsatz komplexe und duale Zahlen, Quaternionen, ein paar Transformationen. Die Darstellungstheorie, eine Disziplin der Algebra, wurde eigens für die Bestimmung von Matrizendarstellungen für lineare Zusammenhänge entwickelt. Das ist oftmals ein recht schwieriges Unternehmen.

14. In Abschnitt 8 ist von den  $n^2$  Dimensionen einer Matrix gegenüber den eindimensionalen reellen Zahlen gesprochen und angedeutet worden, diese Zahl  $n^2$  könne unterschritten werden. Das wird sie in jedem Falle, wenn ein linearer Vorgang durch eine Matrix dargestellt wird, etwa bei der Multiplikation komplexer Zahlen  $a_1 + ia_2$

( $i^2 = -1$ ), die durch die Matrix  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

dargestellt werden: In der zweiten Zeile treten die Zahlen  $a_1, a_2$  der ersten Zeile wieder auf, wenn auch in anderer Reihenfolge und mit anderen festen Koeffizienten (Parametern, hier im Beispiel bloss Vorzeichenwechsel von  $a_2$ ). Entscheidend, auch für den Gruppencharakter, ist der Umstand, dass nach Ausführen jeder Operation in allen Matrizen, die zur Gruppe zählen, das erste Element der zweiten Zeile gleich dem Negativen des

zweiten Elements der ersten Zeile sowie das zweite Element der zweiten Zeile identisch mit dem ersten Element der ersten Zeile ist. Im Rahmen der linearen Algebra lässt sich dieses Prinzip verallgemeinern: Beliebig viele ( $m < n^2$ ) Elemente lassen sich als allgemeine lineare Ausdrücke der  $n^2 - m$  festen Elemente ansetzen; zwei Matrizen A und B mit je dem gleichen Ansatz werden miteinander multipliziert, und dann werden die Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Produktmatrix wiederum denselben Ansätzen genügt. Dadurch werden Matrizen mit im allgemeinen ein paar Parametern ausgesiebt, die in bezug auf ihre Multiplikation (und Inversion) eine Gruppe bilden. Die bei drei- und mehrreihigen Matrizen sehr aufwendigen Schreib- und Rechenarbeiten lassen sich durch ein geschicktes Schema erheblich vermindern. Der Weg führt konsequent zur Erfassung aller möglichen Gruppen, die in den Matrizen naturgegeben stecken; er ist sehr erfolgreich beschritten worden und hat schon zu überraschenden, ungeahnten Anwendungsbereichen offenen Ergebnissen geführt. Auf diese Weise lassen sich noch viele in den Matrizen ruhende Möglichkeiten aufdecken, allein aus ihrer Definition und dem Gruppencharakter heraus.

15. In Abschnitt 2 ist angedeutet worden, die Elemente von Matrizen könnten statt reeller Zahlen selbst wiederum Matrizen  $m$ -ter Ordnung sein. Nachweisen lässt sich dies durch einfaches Rechnen. Nun ergibt sich bei der Multiplikation zweier Matrizen  $n$ -ter Ordnung miteinander, deren Elemente Matrizen  $m$ -ter Ordnung sind, ein Ergebnis, das auch eingetreten wäre, wenn man in

den Ausgangsmatrizen von vornherein die Klammern um deren Elemente weggelassen und mit gewöhnlichen Matrizen  $mn$ -ter Ordnung gerechnet hätte. Umgekehrt lässt sich auf diese Weise zum Beispiel eine Matrix zweiter Ordnung, deren Elemente komplexe Zahlen sind, sofort zu einer Matrix vierter Ordnung mit nur reellen Zahlen umwandeln; diese stimmen im Prinzip mit allen Operationen in den Ergebnissen überein, vorausgesetzt die einzelnen Werte an den entsprechenden Stellen werden richtig interpretiert.

16. Ein Umstand ist in diesem Aufsatz bewusst nicht gestreift worden, auf den wegen der praktischen Bedeutung der Matrizen sehr viel Geist und Scharfsinn aufgewendet wurde: das ist die numerische Behandlung von Matrizen, die Ausarbeitung zweckmässiger Verfahren für die Inversion, für die Eigenwertbestimmung, die Behandlung von schlecht konditionierten Matrizen, die Aufstellung von Vergleichskriterien für Matrizen usw. Hier sollte nur ein Überblick über das allen Matrizen Gemeinsame, über die Zusammenhänge und den Hintergrund der Operationen und über weitere Erkenntnisse, die aus Matrizen noch gewonnen werden können, gegeben werden.

#### Adresse des Verfassers

Dr. Gottlob Kirschmer, Deutsche Geodätische Kommission  
bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften,  
D-8 München 22, Marstallplatz 8

## Reflexive Prediction

A. Bjerhammar, Stockholm

*Abstract:* A new prediction problem is defined. For a weakly stationary stochastic process a set of observations is given. It is required to find a set of unknowns (observations) which have the given observations as optimal predictions for a prescribed covariance function. The solution of this problem is very general and includes the Wiener-Hopf approach as a limiting case. An application to the gravimetric boundary value problem in physical geodesy is given. In our study we start with a condensed presentation of the Wiener-Hopf approach for discrete cases. Dramatic computational gains in reflexive prediction and filtering are demonstrated.

We consider a stochastic process  $x(t)$  with the expectation

$$E\{x(t)\} = 0 \quad (t \text{ time parameter}) \quad (1)$$

The covariance function  $Q(\tau)$  is for a weakly stationary process

$$Q(\tau) = E\{x(t) \cdot x(t+\tau)\}. \quad (2)$$

In most applications the following estimator is used

$$\hat{Q}(\tau) = \frac{1}{2(T-\tau)} \int_{-T+\tau}^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt \quad (3)$$

This estimator is unbiased with

$$E\{\hat{Q}(\tau)\} = \frac{1}{2(T-\tau)} \int_{-T+\tau}^{T-\tau} E\{x(t)x(t+\tau)\}dt = Q(\tau) \quad (4)$$

If this estimator converges to the true value when  $T \rightarrow \infty$  then the process is *ergodic*. For a *non-ergodic* stochastic process we have no simple means of determining the covariance function. Our following study is mainly devoted to problems when the correct covariance function is not a priori given. Instead we want to find 'observations' which have a given covariance function.

Most technical studies of the theory of weakly stationary processes result in non ergodic applications. This is a highly unsatisfactory situation and we find it natural to look for a solution, where we make our predictions with the use of auxilliary 'unknown observations' which are determined in such a way that they for a prescribed covariance function give optimal predictions, that are identical with the given observations.

*Problem:* From a weakly stationary stochastic process we take a set of  $n$  observations (outcomes). It is required to find  $m$  unknown observations in the outcome space