

**Zeitschrift:** Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 73-F (1975)

**Heft:** 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

**Artikel:** Vereinfachte Theorie der Deformation eines Reflektors bei ungleichmässiger Temperatur

**Autor:** Dalcher, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-227541>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Stehachsrichtung, auch unmittelbar nach abgeschlossener Horizontierung.

Die anfänglich herrschenden Bedenken wegen der Feinfühligkeit der Horizontierung erwiesen sich als unbegründet, sie ist im Gegenteil besser als beim normalen DKM2-A. Die Anordnung der beiden Fussschrauben in einem rechten Winkel zueinander macht das Horizontieren bequemer. Dadurch kommt eine Fussschraube zwar neben die Auflagen am Stativkopf zu liegen, für das Auge und das Gefühl ein Nachteil, der jedoch durch die messtechnischen Vorteile mehr als aufgewogen wird.

#### Literatur

Tarczy-Hornoch, A.: Über die Entwicklung der geodätischen Zwangszentrierungen. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Baden bei Wien 1963, S. 133.

Riemann, W.: Beitrag zur Systematik geodätischer Zwangszentriereinrichtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1967, S. 396.

Weiser, G.: Zentriergenauigkeit bei der Kombination zweier Zwangszentriertensysteme. Allgemeine Vermessungsnachrichten, Karlsruhe 1970, S. 427.

Vencovsky, M.: Eine sehr genaue Zentriervorrichtung. Mitteilungen aus dem Markscheidewesen, Herne (Westfalen) 1971, S. 23.

Adresse des Verfassers

Dr. H. Aeschlimann, Kern & Co. AG, 5001 Aarau

## Vereinfachte Theorie der Deformation eines Reflektors bei ungleichmässiger Temperatur

A. Dalcher, Aarau

Bei der elektro-optischen Distanzmessung werden «Tripletprismen»-Reflektoren verwendet. Diese reagieren auf Temperaturänderungen.

Die Berechnung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird der Verlauf der Temperatur ermittelt, dann befassen wir uns mit den daraus resultierenden Spannungen und Deformationen.

Zur Vereinfachung der Rechnung reduzieren wir das räumliche Problem auf ein ebenes. Wir berechnen den Temperaturausgleich in einem rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck und geben einen Ansatz für die Deformationen.

### 1. Die Berechnung des Temperaturausgleiches

Bezeichnungen:

- L Länge einer Kathete
- a Wärmeleitfähigkeit
- s spezifische Wärme
- $\rho$  Dichte
- $\lambda$  Wärmeübergangszahl für den Rand des Dreiecks
- t Zeit
- T Temperatur
- N nach aussen gerichtete Normale in einem Randpunkt des Dreiecks

Im Innern des Dreiecks gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho s \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1.1)$$

Am Anfang (zur Zeit  $t = 0$ ) sei die Temperatur gleichmäßig = 1

$$T(x, y, t = 0) = 1. \quad (1.2)$$

Dann werde die Umgebungstemperatur plötzlich auf 0 gebracht. Der Wärmeübergang am Rand genügt nun der Gleichung

$$a \frac{\partial T}{\partial N} = -\lambda T \quad (1.3)$$

In einigen einfachen Fällen lässt sich der Temperaturverlauf exakt angeben. Wenn die Wärmeübergangszahl  $\lambda$  unendlich ist, wird nach (1.3) auf dem Rand  $T = 0$ .

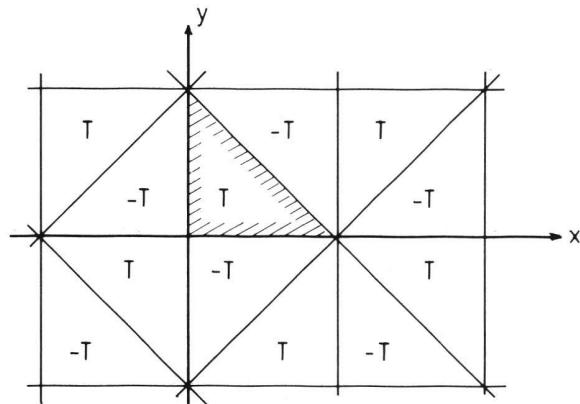


Abbildung 1 Die Fortsetzung der Temperatur durch Spiegelungen bei  $\lambda = \infty$ .

Man kann durch Spiegeln den Temperaturverlauf auf die ganze Ebene fortsetzen, wie dies in Abbildung 1 dargestellt ist. Die Temperatur hat in x und in y die Periode  $2L$ , kann also durch eine Fourierreihe dargestellt werden. Wegen  $T(-x, y) = -T(x, y)$  und  $T(x, -y) = -T(x, y)$  kommen nur sin-Glieder vor. Die Koeffizienten bezeichnen wir mit  $a_{nm}$ . Es ist

$$T(x, y, t) = \sum_{nm} a_{nm}(t) \sin n \pi x/L \sin m \pi y/L.$$

Aus  $T(y, x) = T(x, y)$  folgt  $a_{mn} = a_{nm}$  und aus  $T(L-x, L-y) = -T(x, y)$  schliessen wir  $a_{nm} = 0$ , falls  $n + m$  eine gerade Zahl ist.

Jedes Glied der Fourierreihe muss die Differentialgleichung (1.1) erfüllen. Dies führt auf

$$-a a_{nm}(t) (n^2 + m^2) \pi^2 / L^2 = \rho s \frac{da_{nm}(t)}{dt}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Ansatz

$$a_{nm}(t) = A_{nm} e^{-(n^2 + m^2) Q t}$$

mit  $Q = \frac{\pi^2 a}{\rho s L^2}$

Die Konstanten  $A_{nm}$  erhält man aus der Temperaturverteilung zur Zeit  $t = 0$ . Es ist

$$A_{nm} = \frac{1}{L^2} \int_0^{2L} \int_0^{2L} T(x, y, 0) \sin n \pi x/L \sin m \pi y/L dx dy.$$

Man kann das Integrationsgebiet auf ein Dreieck reduzieren. Mit (1.2) wird

$$A_{nm} = \frac{8}{L^2} \int_0^L \int_0^{L-x} \sin n \pi x/L \sin m \pi y/L dy dx.$$

Die Integration ergibt für  $m$  gerade und  $n$  ungerade

$$A_{nm} = \frac{16m}{\pi^2 n (m^2 - n^2)}$$

Die ersten Glieder der Entwicklung von  $T$  sind

$$\begin{aligned} T &= \frac{32}{3\pi^2} e^{-5Qt} (\sin \pi x/L \sin 2\pi y/L \\ &\quad + \sin 2\pi x/L \sin \pi y/L) \\ &\quad - \frac{32}{15\pi^2} e^{-13Qt} (\sin 2\pi x/L \sin 3\pi y/L \\ &\quad + \sin 3\pi x/L \sin 2\pi y/L) \dots \end{aligned}$$

Praktisch am wichtigsten ist der erste Term, da er den grössten Koeffizienten hat und am langsamsten abklingt. Eine andere Randbedingung, die sich ähnlich lösen lässt, ist

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \text{ auf den Katheten (isoliert),} \\ \lambda &= \infty \text{ auf der Hypotenuse.} \end{aligned}$$

Wir wählen nun die  $x$ -Achse nicht mehr längs einer Kathete, sondern in der Halbierenden des rechten Winkels, und die  $y$ -Achse parallel zur Hypotenuse. Mit  $H$  bezeichnen wir die Länge der Hypotenuse. Die Rechnung ist einfacher als im ersten Beispiel, da sich  $T$  als Produkt einer Funktion von  $x$  und einer von  $y$  schreiben lässt. Für das erste Glied erhält man

$$T = \frac{16}{\pi^2} e^{-Qt} \cos \pi x/H \cos \pi y/H. \quad (1.5)$$

Bei beliebig vorgegebenem  $\lambda$  lässt sich die Spiegelungsmethode nicht verwenden. Man braucht numerische Verfahren, auf die ich hier nicht eingehen will.

## 2. Die Deformation des Dreiecks

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- $\sigma_x, \sigma_y$  Zugspannungen
- $\tau$  Schubspannung
- $E, G$  Elastizitäts- und Schubmodul
- $\nu$  Poissonsche Zahl

$u, v$  Verschiebungen eines Punktes in  $x$ - und  $y$ -Richtung

$A$  Ausdehnungskoeffizient

Zwischen  $E, G$  und  $\nu$  besteht die Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(vergleiche zum Beispiel Meissner und Ziegler, Mechanik I, § 18).

Zwischen den Dehnungen und den Spannungen bestehen die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= A T + \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= A T + \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Die Schiebung beträgt

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau. \quad (2.2)$$

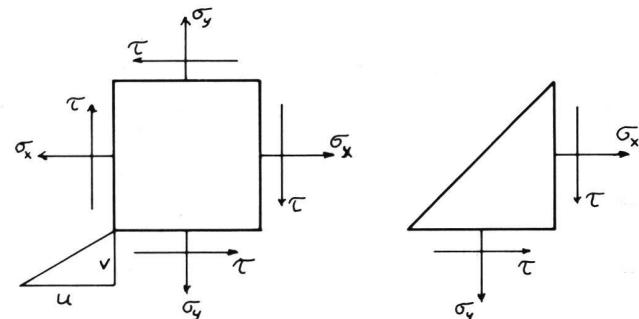


Abbildung 2 Infinitesimales Quadrat und infinitesimales Dreieck am Rand mit angreifenden Spannungen.

Die Gleichgewichtsbedingung für ein elementares Quadrat lautet gemäss Abbildung 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Da keine äusseren Kräfte einwirken, hat man die folgenden Randbedingungen:

auf der Hypotenuse

$$\sigma_x = 0, \tau = 0, \quad (2.4)$$

auf den Katheten (vergleiche Figur 2)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y \\ \tau &= -\sigma_x \text{ auf } x = y, \\ \tau &= \sigma_x \text{ auf } x = -y. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Wir betrachten nun das Beispiel

$$T = \cos x \cos y. \quad (2.6)$$

Das Dreieck wird begrenzt durch

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \pi/2, \\ |y| \leq x. \end{aligned}$$

Wir bilden den Ansatz

$$\sigma_x = r \cos x \cos y$$

$r$  ist eine noch zu bestimmende Konstante. Aus (2.3) erhalten wir

$$\tau = -r \sin x \sin y$$

$$\sigma_y = r \cos x \cos y$$

(2.1) gibt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \cos x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left( A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \cos x \cos y,$$

$$u = \left( A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \sin x \cos y,$$

$$v = \left( A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) \cos x \sin y.$$

Nun müssen wir noch (2.2) verifizieren. Es ist

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \left( A + \frac{r}{E} (1 - \nu) \right) 2 \sin x \sin y$$

$$\frac{2(1 + \nu)}{E} \tau = -\frac{2(1 + \nu)}{E} r \sin x \sin y$$

Es muss gelten

$$\begin{aligned} -r(1 + \nu) &= A E + r(1 - \nu), \\ r &= -A E / 2. \end{aligned}$$

Somit wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -A E / 2 \cos x \cos y, \\ \sigma_y &= -A E / 2 \cos x \cos y, \\ \tau &= A E / 2 \sin x \sin y, \\ u &= A (1 + \nu) / 2 \sin x \cos y, \\ v &= A (1 + \nu) / 2 \cos x \sin y. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Mit dieser Lösung sind aber nicht alle Randbedingungen erfüllt. Wir suchen deshalb noch Funktionen, welche die homogene Differentialgleichung (2.1) mit  $T = 0$ , (2.2) und (2.3) erfüllen.

Wir führen zwei komplexe Konstanten  $f$  und  $g$  ein. Mit diesen bilden wir den Ansatz

$$\tau = e^{fx + gy}$$

(2.3) gibt

$$\begin{aligned} \sigma_x &= g \tau / f \\ \sigma_y &= f \tau / g \end{aligned}$$

(2.1) wird mit  $T = 0$

$$(2.7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau}{E} \left( \frac{g}{f} - \nu \frac{f}{g} \right), \quad u = \frac{\tau}{E} \left( \frac{g}{f^2} - \frac{\nu}{g} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\tau}{E} \left( \frac{f}{g} - \nu \frac{g}{f} \right), \quad v = \frac{\tau}{E} \left( \frac{f}{g^2} - \frac{\nu}{f} \right).$$

Die linke Seite von (2.2) ist

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\tau}{E} \left( \frac{g^2}{f^2} - \nu + \frac{f^2}{g^2} - \nu \right).$$

Dies soll gleich  $2(1 + \nu) \tau / E$  sein. Das führt auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} -\frac{g^2}{f^2} - \frac{f^2}{g^2} &= 2, \\ (f^2 + g^2)^2 &= 0, \\ g &= \pm i f. \end{aligned} \quad (2.9)$$

So erhält man für beliebiges  $f$  die Lösung

$$\left. \begin{aligned} \tau &= e^{fx + ify}, \\ \sigma_x &= i \tau, \\ \sigma_y &= -i \tau, \\ u &= \frac{i}{f} \frac{\tau}{E} (1 + \nu), \\ v &= -\frac{1}{f} \frac{\tau}{E} (1 + \nu). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Nun ist aber  $g = \pm i f$  für jedes Vorzeichen eine Doppelwurzel von (2.9). Man bildet deshalb für  $\tau$  den weitern Ansatz  $\tau = x e^{fx + ify}$ . Durch Ableiten und Integrieren erhält man aus den Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \tau &= x e^{fx + ify}, \\ \sigma_x &= i(x - 1/f) e^{fx + ify}, \\ \sigma_y &= -i(x + 1/f) e^{fx + ify}, \\ u &= \frac{i}{E} \left( \frac{-2}{f^2} + (1 + \nu) \frac{x}{f} \right) e^{fx + ify}, \\ v &= -\frac{1}{E} \left( \frac{1 - \nu}{f^2} + (1 + \nu) \frac{x}{f} \right) e^{fx + ify}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Die zwei weitern Lösungen ergeben sich, wenn man in (2.10) und (2.11)  $i$  durch  $-i$  ersetzt.

Diese homogenen Lösungen müssen nun, mit geeignet gewählten komplexen  $f$ , so kombiniert werden, dass sie zusammen mit der inhomogenen Lösung (2.8) die Randbedingungen (2.5) erfüllen.

Adresse des Verfassers

Dr. Andreas Dalcher, Kern & Co. AG, 5001 Aarau