

Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 73-F (1975)

Heft: 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

Artikel: Der Abstand zweier Nivaflächen aus Vertikalwinkeln

Autor: Embacher, W.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-227533>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bergpunkten ist die Luft in Bodennähe wärmer als in höheren Schichten: $-3,1\text{ }^{\circ}\text{C}/100\text{ m}$. Dagegen nimmt bei allen Visuren, die über die Mosel verlaufen, die Temperatur der Luft um etwa $1\text{ }^{\circ}\text{C}/100\text{ m}$ nach oben zu.

Schlussfolgerungen

Für genaue Höhenmessungen bei Brückenbauwerken an grösseren Talübergängen können aus den dargestellten Erfahrungen folgende Folgerungen gezogen werden:

1. Ist die Höhenmessung nach dem Verfahren des Nivellements gefordert oder vorgesehen, so sollte auf eine durchgreifende Kontrolle – nach Möglichkeit durch die Anlage einer Höhenschleife – nicht verzichtet werden, selbst wenn Talübergangsmessungen einen erheblichen Personal- und Instrumenteneinsatz fordern.
 2. Bei grösseren Höhenunterschieden muss zur Verringerung des systematischen Einflusses des Lattenmeters vor und nach der Feldmessung eine genaue Komparierung des Invarbandlattenpaars vorgenommen werden.
 3. Wesentlich wirtschaftlicher als ein Nivellement ist jedoch die Höhenmessung nach dem Verfahren der trigonometrischen Höhenbestimmung durchzuführen.

Durch eine günstige Netzfiguration können zahlreiche Messungen in verschiedenen Höhen über den Fluss hinweg ausgeführt werden. Gegenseitige und möglichst gleichzeitige Zenitdistanzmessungen erlauben nach einer Ausgleichung die Erzielung einer für alle praktischen Zwecke ausreichenden Millimetergenauigkeit und ersparen langwierige Untersuchungen über die spezielle Grösse des Refraktionskoeffizienten.

Immerhin streuen im untersuchten Beispiel die Koeffizienten für spezielle topographische Gegebenheiten in den Mittelwerten zwischen + 0,32 und - 0,35.

4. In den meisten Fällen dürfte die Berechnung mit den reinen Messergebnissen völlig ausreichen, da die Einflüsse der Lotabweichung und der Geoidundulation gegeneinander gerichtet sind und sich unter Umständen sogar in etwa aufheben können.

Der Abstand zweier Niveauländer aus Vertikalwinkeln

W. Embacher, Innsbruck

Zusammenfassung

K. Ledersteger [1] erhebt bei der trigonometrischen Höhenmessung unter Berücksichtigung der physikalischen Gegebenheiten zwei wichtige Fragen, nämlich die nach der wahren Natur der trigonometrisch abgeleiteten Höhenunterschiede sowie das Problem der Lotabweichungen.

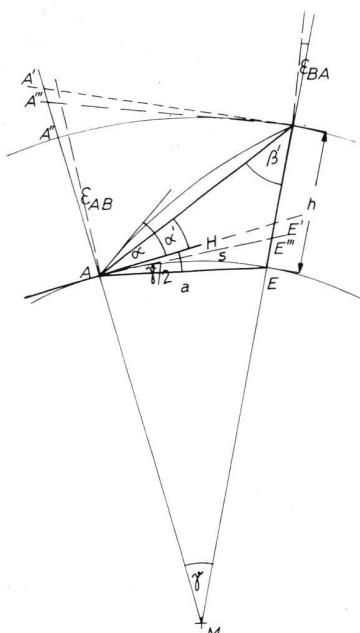


Abb. 1

chungsbestimmung. In einer heuer im Mai eingereichten Dissertation definiert J. Ernst [2] den trigonometrisch bestimmten Höhenunterschied im kleinen Vermessungsbereich als den Abstand zweier Parallelflächen. Bringt man an die gemessenen Vertikalwinkel die relative Lotabweichung an, so kommt man von den Niveauflächen in der Natur auf die oben erwähnten Parallelflächen. Ausserdem muss man den wahren Schleifenschlussfehler berücksichtigen, der eine Folge des Nichtparallelismus der Niveauflächen ist.

MA und ME seien die Radien einer gemeinsamen Krümmungskugel, deren Schnitt mit der Zeichenebene der Bogen AE ist (Abb. 1). Die relative Lotabweichung $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{BA}$, welche astronomisch bestimmt wurde, kann sowohl in A als auch in dem auf dem Radius AE liegenden Punkt B angebracht werden. Das heisst, man kann die Lotrichtung in A als Ausgangslot annehmen und durch Anbringen der gesamten relativen Lotabweichung das Lot in B drehen oder umgekehrt B als Ausgangspunkt nehmen. Der Krümmungskreis in der Zeichenebene hat den Radius der Krümmungskugel, auf welche die relative Lotabweichung bezogen wurde. Die Länge dieses Radius ist eine rein geometrische Annahme und braucht mit den in A und B aus Schweregradienten abgeleiteten Krümmungsradien in keiner Beziehung stehen. Im allgemeinen wird man hiefür den mittleren Krümmungsradius der Erde verwenden. Die Auswirkung der relativen Lotabweichung auf die Höhe beträgt bekanntlich

$$\angle h_{ik} = \frac{\varepsilon_{ik} s_{ik}}{\cos^2 a_{ik}}, \quad 1,0$$

und ist in Abbildung 1 als Strecke A'A''' und E'E''' ersichtlich.

Physikalisch nicht sinnvoll erscheint es, zur Berechnung

der Auswirkung der Refraktion auf den Höhenunterschied

$$s_i = - \frac{k_i s_{ik}^2}{2r \cos^2 \alpha_{ik}} \quad 2,0$$

für r den mittleren Krümmungsradius und ein konstantes k zu wählen.

Helmert [3] hat bereits über den «Einfluss der Abplattung der Niveauflächen auf die Refraktion durch Änderung des Radiusvektors» geschrieben. Er erhält bei 100 km Distanz eine maximale Änderung von $1/40$ Meter. Messen wir aber den Radius der mittleren Krümmungskugel der Niveaufläche in dem Punkt, in welchem wir die Refraktion benötigen, das heisst im Messungspunkt auf der physischen Erdoberfläche [4], so können wir feststellen, dass der mittlere Krümmungsradius im Hochgebirge bis zu $\pm 40\%$ schwanken kann. Durch Ableitung der Gleichung 2,0 nach r geht hervor, dass dadurch der Fehler in der Höhe bei 10 km Entfernung bereits einen Zentimeter ausmachen kann. Ein Fehler im Refraktionskoeffizienten k geht natürlich voll in den Höhenunterschied ein.

Misst man also die relativen Lotstörungen und gelingt es, die k -Werte für jeden Punkt zu berechnen, so müssten aus Vertikalwinkelmessungen die Abstände von Parallelflächen zu erwarten sein, welche unter Verwendung des wahren Schleifenschlussfehlers zu einem geschlossenen Höhenpolygon zusammenzusetzen sind.

Aus einer früheren Arbeit des Verfassers [4] erhalten wir folgende Gleichung

$$h_{ik} = s_{ik} \tan \alpha_{ik} + i_{ik} - z_{ik} + \frac{s_{ik}^2}{2r_i \cos^2 \alpha_{ik}} (1 + \sin^2 \alpha_{ik}) - \frac{s_{ik}^2}{2r_i \cos^2 \alpha_{ik}} k_i, \quad 3,0$$

in welcher der Refraktionskoeffizient explizit ausgedrückt ist.

Setzen wir im Krümmungsglied den mittleren Erdradius r_m ein und erweitern die Gleichung 3,0 mit der relativen Lotstörung aus Gleichung 1,0, so erhalten wir

$$h_{ik} = s_{ik} \tan \alpha_{ik} + i_{ik} - z_{ik} + \frac{s_{ik}^2}{2r_m \cos^2 \alpha_{ik}} (1 + \sin^2 \alpha_{ik}) - \frac{s_{ik}^2}{2r_i \cos^2 \alpha_{ik}} k_i + \frac{\varepsilon_{ik} s_{ik}}{\cos^2 \alpha_{ik}} \quad 3,1$$

Durch Gleichsetzen der gegenseitigen Höhenunterschiede erhalten wir aus 3 Beobachtungspunkten 3 Gleichungen mit den Unbekannten k_1 bis k_3 .

Da die Niveauflächen nicht parallel sind, muss beim Zusammensetzen eines Höhenpolygons zu einer Höhenschleife der wahre Schleifenschlussfehler berücksichtigt werden. Beim geometrischen Nivellement, welches einen Übergang von einer Niveaufläche auf eine andere mit Hilfe horizontaler Visierlinien darstellt, wird der Schleifenschlussfehler ψ aus Schweremessungen und aus den durch Lattenlesungen bestimmten Höhenunterschieden ermittelt [1]:

$$\psi = - \sum_{A=1}^A \frac{\bar{g} - g_0}{g_0} \Delta h. \quad 4,0$$

Darin ist Δh die aus Lattenlesungen ermittelte rohe

Nivellementshöhe zwischen zwei Schwerestationen, \bar{g} das Mittel der beiden Schwerewerte und g_0 das Mittel aller Schwerewerte aus dem Bereich der Schleife. Auch das trigonometrische Nivellement ist ein Übergehen von einer Niveaufläche auf die andere, welches wegen der Nichtparallelität der Niveauflächen wegabhängig ist. Um auch hier den wahren Schleifenschlussfehler berücksichtigen zu können, sind neben den Vertikalwinkelmessungen noch Schweremessungen notwendig.

Um eine praktische Anwendung der oben getroffenen Überlegungen zu zeigen, betrachten wir ein Versuchsdreieck aus der angeführten Dissertation [2] im Gebiet der Villacher Alpe.

Die Beobachtungspunkte sind bereits stabilisierte Punkte der Landesvermessung, welche zusätzlich durch ein Feinnivellement des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen verbunden ist. (Siehe beiliegenden Kartenausschnitt 1:50 000.)

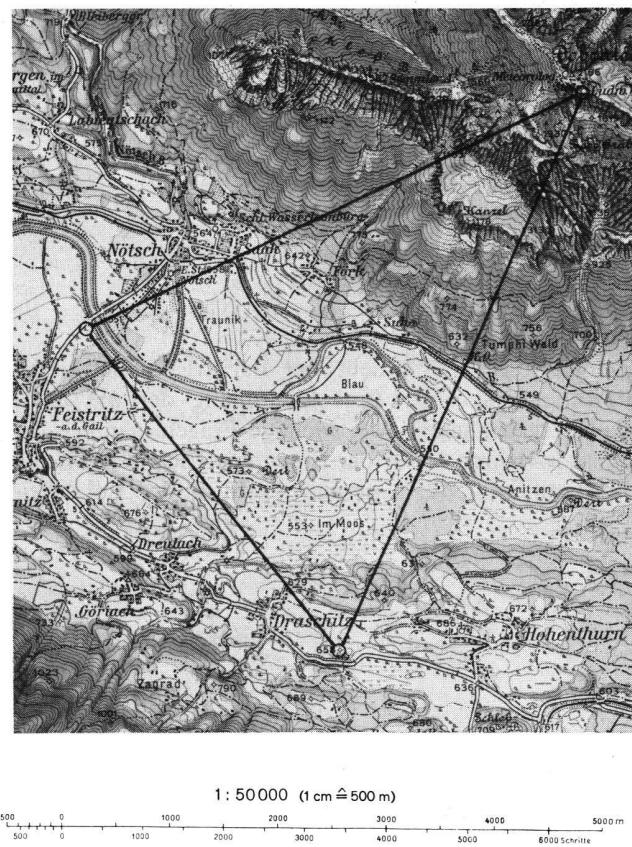


Abb. 2

| Punkt Nr. | Stabilisierung | Bezeichnung |
|------------|-----------------|---------------------|
| KT 21-200 | Platte Stein | Draschitz |
| KT 27-200 | Knauf | Villacher Alpe |
| KT 119-200 | Stein | Nötscher Gailbrücke |

Die Lagebestimmung erfolgte durch Messung der Horizontalwinkel mit dem Präzisionstheodolit Wild T3. Die Seite KT 119–200 nach KT 21–200 wurde mit einem Infrarot-Distanzmesser Wild DI 10 überprüft. Die ausgewerteten Koordinaten stimmen mit den bereits vorhandenen Koordinaten des Bundesamtes zentimetergenau überein.

Die trigonometrische Höhenmessung wurde ebenfalls mit dem Präzisionstheodolit Wild T3 durchgeführt. Die Beobachtungen erfolgten in der Zeit zwischen 9.00 und 15.00 Uhr, wobei in Intervallen von 15 Minuten Höhenwinkel, Temperatur und Luftdruck abgelesen wurden. Es ergaben sich dabei folgende trigonometrische Höhenunterschiede:

| Nr. | von – nach | a (m) | h (m) | Diff. | Mittel (m) |
|-----|-------------------|-------|--------------------------|-------|------------|
| 1 | 119– 27 27–119 | 5130 | + 1609,578 — 1609,483 | 0,095 | + 1609,530 |
| 2 | 27– 21 21– 27 | 5630 | — 1504,588 + 1504,919 | 0,331 | — 1504,754 |
| 3 | 21–119 119–21 | 3810 | — 104,834 + 104,744 | 0,090 | — 104,789 |

Ein Vergleich der mit Gewichten ausgeglichenen trigonometrischen Höhen mit dem geometrischen Nivellement (rohe Nivellementshöhen) ergibt sich aus der nächsten Tabelle, in welcher auch die relativen Lotabweichungen aufgezeigt sind:

| von | nach | Höhenunterschiede (m) | | rel. Lotabw. | |
|-----|------|-----------------------|------------|--------------|------|
| | | trigonometrisch | nivelliert | Diff. | in ‰ |
| 119 | 21 | + 104,779 | + 104,752 | + 0,027 | — 2 |
| 119 | 21 | + 1609,511 | + 1609,255 | + 0,256 | — 19 |
| 21 | 27 | + 1504,732 | + 1504,503 | + 0,229 | — 33 |

Die orthometrische Korrektion vom Fuss der Villacher Alpe bis zur Spitzte beträgt etwa + 17 cm, das heisst, dass das geometrische mit dem trigonometrischen Nivellement grössenordnungsmässig etwa zusammenstimmt.

Nun sei noch eine Tabelle mit den Schweremessungen, die mit einem «La Coste-Rhomberg-Gravimeter» ausgeführt wurden, den gemessenen Vertikalgradienten und den daraus abgeleiteten Krümmungsradien angeführt:

| Punkt | Schwere (gal) | Vertikalgradient (mgal/m) | Krümmungsradius (km) |
|------------|---------------|---------------------------|----------------------|
| KT 21–200 | 980,580 | 0,384 | 5107 |
| KT 27–200 | 980,230 | 0,545 | 3597 |
| KT 119–200 | 980,596 | 0,291 | 6739 |

Aus den Messungen in diesen drei Beobachtungspunkten wurden nach Gleichung 3,1 die k-Werte berechnet und daraus die Höhenunterschiede abgeleitet.

| Punkt | k |
|------------|----------|
| KT 21–200 | + 0,0597 |
| KT 27–200 | + 0,0290 |
| KT 119–200 | + 0,0893 |

Die daraus abgeleiteten Höhendifferenzen seien in der nächsten Tabelle angeführt:

| Nr. | von – nach | h (m) |
|----------|------------|------------|
| 1 | 119– 27 | + 1609,493 |
| 2 | 27– 21 | — 1504,726 |
| 3 | 21–119 | — 104,790 |
| Σ | | — 0,023 |

Der wahre Schleifenschlussfehler, nach Gleichung 4,0 berechnet, beträgt + 6 mm. Es klafft also das Höhenpolygon insgesamt um 17 mm.

Der Schluss, der aus den Beobachtungen und Berechnungen zu ziehen ist, kann selbstverständlich noch nicht verallgemeinert werden, dazu ist der Vermessungsbereich zu klein. In diesem Jahr werden im Raum Innsbruck weitere Messungen im Rahmen eines ausgedehnten Testnetzes durchgeführt. Es ist zu erwarten, dass aus den Ergebnissen dieser Messungen und den bisherigen Erkenntnissen in allernächster Zeit Aussagen gemacht werden können, die einen Anspruch auf eine grössere Allgemeinheit besitzen.

Literatur

- [1] *Jordan-Eggert-Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde, Band V (Erdmessung). K. Ledersteger.
- [2] *Ernst, J.*: Beiträge zur Hochgebirgsgeodäsie. Dissertation, eingereicht im Mai 1975 an der Technischen Fakultät der Universität Innsbruck.
- [3] *Helmut, F. R.*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, S. 561ff.
- [4] *Embacher, W.*: Das trigonometrische Nivellement, der Refraktionskoeffizient und die mittlere Krümmung der Niveauflächen. 5. Fachtagung für Vermessungswesen 1971.

Adresse des Verfassers

o. Prof. Dipl. Ing. Dr. Wilhelm Embacher,
Institut für Vermessungswesen, Universität Innsbruck,
Technikerstrasse 13, A-6020 Innsbruck