

Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural
Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) =
Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))
Band: 73-F (1975)
Heft: 3-4: Prof. Dr. F. Kobold zum 70. Geburtstag

Artikel: Die geodätischen Linien und die Mechanik
Autor: Schürer, Max
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-227521>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

letzteres ist definitionsgemäss das gleiche für Geoid und Ellipsoid.

Standardatmosphäre. Für die Berücksichtigung atmosphärischer Einflüsse, auf elektronische Distanzmessungen ebenso wie auf Schweremessungen, braucht man eine geeignete Standardatmosphäre. Hier gibt es vor allem zwei:

1. CIRA (COSPAR International Reference Atmosphere), zuletzt 1972 veröffentlicht;
2. U. S. Standard Atmosphere 1962, mit Ergänzungen 1966.

Keine dieser Standardatmosphären ist unmittelbar für geodätische Anwendungen bestimmt. CIRA ist primär für Zwecke der Weltraumforschung gedacht, daher wird das Hauptgewicht auf grössere Höhen gelegt. Die US-Standardatmosphäre dient vor allem der Luftfahrt. Sie gibt deswegen auch mehr Details in geringen Höhen.

Die World Meteorological Organization (WMO) hat die U. S. Standard Atmosphere zum Gebrauch angenommen. Die Erstellung einer Standardatmosphäre für geodätische Zwecke erscheint wünschenswert; mittlerweile könnte die U. S. Standard Atmosphere mit dem gebotenen Verständnis verwendet werden.

Weitere Einzelheiten und Literaturhinweise können dem Bericht der IAG-Studiengruppe 5.39, «Fundamental Geodetic Constants», der der Generalversammlung in

Grenoble vorgelegt werden wird, entnommen werden. Das Problem der geodätischen Konstanten gibt einen aufschlussreichen Einblick in die heutige Geodäsie. Die Lichtgeschwindigkeit c liefert über die elektronische Entfernungsmessung den Massstab für die geodätische Längenbestimmung. Die Satellitengeodäsie hat unsere Kenntnis der Erdparameter entscheidend bereichert: klassische Parameter wie die grosse Halbachse a sind nun wesentlich genauer bekannt, und neue physikalisch definierte Parameter wie GM und J_2 sind als geodätische Fundamentalgrössen eingeführt worden, denen gegenüber etwa die geometrische Erdabplattung f als abgeleitete Grösse gilt. So sieht man, dass Geometrie und Physik sich heute in der Geodäsie untrennbar miteinander verbinden.

Die relative Genauigkeit, mit der die Gestalt der Erde und ihre physikalischen Parameter bekannt sind, liegt heute etwa bei 10^{-6} . In den kommenden Jahren wird, insbesondere durch die Genauigkeitssteigerung der Lasermessung zu Satelliten, eine um eine oder gar zwei Grössenordnungen höhere Genauigkeit erhofft.

Adresse des Verfassers:

o. Prof. Dipl. Ing. Dr. techn. Helmut Moritz,
Institut für Erdmessung und Physikalische Geodäsie,
Technische Hochschule Graz, Steyrergrasse 17, A-8010 Graz

Die geodätischen Linien und die Mechanik

Max Schürer

Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien auf einer Fläche lassen sich in kanonischer Form schreiben (1). Speziell gilt für das Rotationsellipsoid mit den Koordinaten b und l (reduzierte Breite und Länge):

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \frac{dp}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial b} \\ \frac{dl}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{dq}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial l} \end{aligned}$$

$$p = E \frac{db}{ds} \quad q = G \frac{dl}{ds}$$

Die unabhängig Veränderliche s ist die Bogenlänge, E und G sind die Koeffizienten der metrischen Fundamentalform:

$$ds^2 = E \cdot db^2 + G \cdot dl^2 = a^2 (1 - e^2 \cos^2 b) db^2 + a^2 \cos^2 b \cdot dl^2$$

und

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{E} + \frac{q^2}{G} \right)$$

Die Gleichungen zeigen eine gewisse Analogie zur Mechanik (Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes auf einer Fläche mit dem Potential null und der Bogenlänge s als unabhängiger Variabler anstelle der Zeit t), und es liegt nahe, die Analogie weiter zu verfolgen.

Eine Lösungsmethode für die Gleichungen in der Mechanik besteht in der Aufstellung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial W}{\partial b} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial W}{\partial l} \right)^2 \right\} + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Sie ist in unserem Falle durch Separation der Variablen lösbar und führt, wie zu erwarten war, auf elliptische Funktionen. Zerlegt man jedoch H in zwei Anteile H_0 und R , wo

$$H_0 = \frac{1}{2a^2} \left(p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 b} \right) \text{ und } R = \frac{e^2}{2a^2} \frac{p^2 \cos^2 b}{(1 - e^2 \cos^2 b)},$$

so kann die Gleichung mit H_0 ohne Schwierigkeiten gelöst und R als Störungsfunktion betrachtet werden. Die Analogie zum Störungsproblem der Himmelsmechanik wird dadurch ersichtlich.

Die Hamilton-Jacobische Gleichung für das «ungestörte» Problem lautet nun:

$$\frac{1}{2a^2} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial b} \right)^2 + \frac{1}{\cos^2 b} \left(\frac{\partial W}{\partial l} \right)^2 \right\} + \frac{\partial W}{\partial s} = 0$$

Setzt man $W = B(b) + L(l) + S(s)$, so folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{dS}{ds} = -\frac{\alpha^2}{2a^2} \quad S = -\frac{\alpha^2}{2a^2} s$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{dL}{dl} = \beta \quad L = \beta l$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial b} \right) = \left(\frac{dB}{db} \right) = \alpha^2 - \frac{\beta^2}{\cos^2 b}$$

$$B = \int_0^b \sqrt{a^2 - \frac{\beta^2}{\cos^2 b}} db$$

Der Integrand muss reell sein. Man setzt deshalb $\beta = a \cdot \cos i$, wo i der Maximalwert von b ist. Die zu a und β kanonisch konjugierten Konstanten ξ und η erhält man aus:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{a}{a^2} s - \int_0^b \frac{a db}{\sqrt{a^2 - \frac{\beta^2}{\cos^2 b}}} \\ &= \frac{a}{a^2} s - \int_0^b \frac{\cos b db}{\sqrt{\cos^2 b - \cos^2 i}} \end{aligned}$$

Das letzte Integral löst man durch Einführung einer neuen Variablen u anstelle von b mittels: $\sin b = \sin i \cdot \sin u$. Damit wird

$$\xi = \frac{a}{a^2} \cdot s - u$$

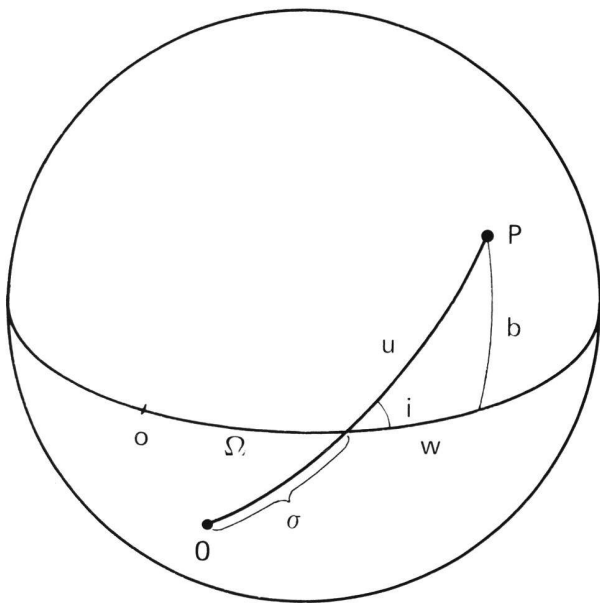
Setzt man für $u = 0$: $s = \sigma$, so ist auch $u = \frac{a}{a^2} \cdot (s - \sigma)$

$$\eta = -\frac{\partial W}{\partial \beta} = -1 + \int_0^b \frac{\beta db}{\cos^2 b \sqrt{a^2 - \frac{\beta^2}{\cos^2 b}}}$$

Hier führt die Einführung von w durch: $\tan b = \tan i \cdot \sin w$ auf

$$\eta = w - 1$$

Setzt man für $w = 0$: $1 = \Omega$, so ist $\eta = -\Omega$



Die anschauliche Bedeutung der neu eingeführten Größen i , u , σ , w und Ω ist der Figur zu entnehmen. Das «ungestörte» Problem ist die geodätische Linie auf einer Kugel ($e^2 = 0$). Variiert s , so durchläuft der Punkt P die geodätische Linie, einen Grosskreis mit der Neigung i gegen den Äquator und der Knotenlänge Ω .

a , $\cos i = \frac{\beta}{a}$, $\sigma = \frac{a^2 \xi}{a}$, $\Omega = -\eta$ sind die «Bahnelemente», die nun in der «gestörten» Bahn als variabel betrachtet werden. Zur Herleitung der Differentialgleichungen für die «gestörten» Bahnelemente sei auf die Lehrbücher der Himmelsmechanik verwiesen. Für ein Bahnelement E_k gilt:

$$\frac{dE_k}{ds} = \sum_l \left\{ E_k, E_l \right\} \frac{\partial R}{\partial E_l}$$

$\{E_k, E_l\}$ sind die Poissonschen Klammerausdrücke, von denen in unserem Falle nur drei von null verschieden sind, nämlich:

$$\{a, \sigma\} = \frac{a^2}{a}, \{ \cos i, \sigma \} = -\frac{\beta}{a} = -\cos i, \{ \cos i, \Omega \} = \frac{1}{a}$$

Auf den rechten Seiten sind die ungestörten Elemente einzusetzen. $a_0 = a$, wegen $H = \frac{1}{2}$.

Die Störungsfunktion R muss nun noch durch die Elemente ausgedrückt werden. Wir entwickeln sie nur bis zur ersten Potenz in e :

$$R = \frac{e^2}{2a^2} p^2 \cos^2 b = \frac{e^2}{2a^2} a^4 \cos^2 b \cdot \left(\frac{db}{ds} \right)^2$$

$$\cos b \cdot \frac{db}{ds} = \sin i \cdot \cos u \cdot \frac{du}{ds} = \frac{a}{a^2} \sin i \cdot \cos u$$

$$R = \frac{e^2 a^2}{2a^2} \sin^2 i \cdot \cos^2 \left\{ \frac{a}{a^2} (s - \sigma) \right\}$$

Die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunktion nach den Elementen sind:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{e^2}{a} \sin^2 i (\cos^2 u - u \cdot \sin u \cdot \cos u)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \cos i} = -e^2 \cos i \cdot \cos^2 u$$

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{e^2}{a} \sin^2 i \cdot \sin u \cdot \cos u$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = 0$$

Mit diesen Differentialquotienten und den Poissonschen Klammerausdrücken erhält man schliesslich die Differentialgleichungen für die Elemente.

$$\frac{da}{ds} = e^2 \sin^2 i \cdot \sin u \cdot \cos u$$

$$\frac{d \cos i}{ds} = -\frac{e^2}{a} \cos i \cdot \sin^2 i \cdot \sin u \cdot \cos u$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = -e^2 (\cos^2 u - \sin^2 i \cdot u \cdot \sin u \cdot \cos u)$$

$$\frac{d\Omega}{ds} = -\frac{e^2}{a} \cos i \cdot \cos^2 u$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich sofort integrieren, wenn man beachtet, dass man auf der rechten Seite die ungestörten Elemente $\alpha_0 = a$, $\cos i_0$, σ_0 und Ω_0 einsetzen darf und ausserdem $ds = a du$ ist. Man erhält:

$$\alpha = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 i_0 \sin^2 u \right)$$

$$\cos i = \cos i_0 \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 i_0 \sin^2 u \right)$$

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{e^2 a}{2} \left(u + \sin u \cdot \cos u - \frac{\sin^2 i_0}{2} (\sin u \cdot \cos u - u \cdot \cos 2u) \right)$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{e^2}{2} \cos i_0 (u + \sin u \cdot \cos u)$$

Die Gleichungen lassen den Verlauf der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid im Grossen erkennen. Insbesondere stellt man nach der letzten Gleichung fest, dass sich die Knotenlänge nach einem Umlauf ($u = 2\pi$) um

den Betrag $\pi e^2 \cos i_0$ nach rückwärts verschoben hat. Man beachte jedoch, dass i nur genähert die Neigung der geodätischen Linie gegen den Äquator darstellt, und dass für diese das Clairautsche Theorem gilt, das sofort aus der vierten kanonischen Gleichung gewonnen werden kann. Es ist:

$$\frac{dq}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial l} = 0,$$

$$q = \text{konst.} = a^2 \cos^2 b \left(\frac{dl}{ds} \right)$$

$$\cos b \frac{dl}{ds} = \sin A,$$

$$\cos b \sin A = \text{konst.}$$

Prinzipiell können mit Hilfe dieser Gleichungen auch die geodätischen Hauptaufgaben lösen; praktisch bietet dies jedoch kaum Vorteile.

Literatur

(1) Courant, R., und Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik II, Berlin 1937.

Adresse des Verfassers

Prof. Dr. Max Schürer, Astronomisches Institut der Universität Bern, Sidlerstrasse 5, 3006 Bern

Zur Bedeutung der Schwerereduktion bei der Bestimmung der Figur und Massenverteilung der Erde*

H.-G. Kahle, E. Klingelé und St. Müller, Zürich

Zusammenfassung

Es wird eine Übersicht über die Grundlagen und Anwendungen von verschiedenen Schwerereduktionen gegeben, die für geodätische und geophysikalische Zwecke wichtig sind. Diese Reduktionen umfassen die Bouguer-, topographische, Freiluft-, isostatische und geologische Reduktion. Für die Reduktion der Geländewirkung in den Alpen sind besondere Berechnungsmethoden erforderlich. Modelle und Anwendungen dafür sind zusammenfassend dargestellt.

A. Einleitung

Als Figur der Erde bezeichnet man jene Äquipotentialfläche des Schwerfeldes der Erde, die etwa mit dem mittleren Meeresniveau zusammenfällt. Diese als Geoid bezeichnete Niveaulfläche ist definiert durch das Schwerepotential $W = W_0 = \text{const.}$ W enthält das Potential U der nur von der geographischen Breite φ abhängigen Normalschwere $g(\varphi)$ und das Potential T der Störungsmassen: $W = U + T$. Die Kompliziertheit der Niveaulflächen legt es nahe, das Geoid auf eine Referenzfläche zu beziehen, die man nach geometrischen oder potentialtheoretischen Gesichtspunkten auswählen kann. Im Fall der potentialtheoretischen Definition bezieht man das

Geoid mit dem Potential $W_0 = \text{const.}$ zweckmässigerweise auf die Niveaulfläche der Normalschwere $g(\varphi)$. Diese Niveaulfläche ist dadurch definiert, dass auf ihr das Potential U der Normalschwere genau so gross ist wie das Schwerepotential W auf dem Geoid: $U(Q) = W(P') = W_0 = \text{const.}$ Wegen ihrer kugelähnlichen Gestalt ist es üblich, die Referenzfläche als Sphäroid (genauer als Referenzellipsoid) zu bezeichnen (Abb. 1). Der Abstand

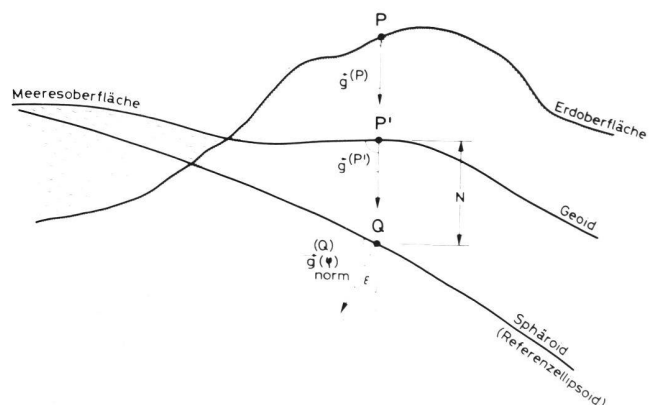


Abbildung 1 Geoid und Referenzellipsoid, stark überhöht dargestellt

N	= Geoidundulation
ϵ	= Lotabweichung
$\rightarrow g(P)$	= beobachteter Schwervektor im Punkt P (auf der Erdoberfläche)
$\rightarrow g(P')$	= Vektor der beobachteten Schwere, umgerechnet auf den Punkt P' (auf dem Geoid)
$\rightarrow g(Q)$	= Vektor der Normalschwere im Punkt Q (auf dem Referenzellipsoid)

Auf dem Geoid herrscht das Potential $W = U + T$, auf dem Referenzellipsoid das Potential U der Normalschwere $g_{\text{norm}}(\varphi)$ mit $T = \text{Störpotential}$

* Dieser Aufsatz wird als «Beitrag Nr. 115 des Institutes für Geophysik, ETH Zürich» bezeichnet.