

**Zeitschrift:** Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 72-M (1974)

**Heft:** 8

**Artikel:** Austauschverfahren und Elimination der Orientierungsunbekannten

**Autor:** Carosio, A.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-227098>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Austauschverfahren und Elimination der Orientierungsunbekannten

A. Carosio, Pregassona

## Zusammenfassung

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über die Zweckmäßigkeit der vom Ingenieur-Geometer verwendeten Algorithmen zeigt der Verfasser am Beispiel der Elimination der Orientierungsunbekannten, daß Vereinfachungen, die didaktische Vorteile bringen, eingeführt werden können, ohne daß die Rechengeschwindigkeit darunter leidet muß.

## Résumé

Après quelques considérations générales sur l'opportunité d'adapter à la réalité actuelle les algorithmes employés par les ingénieurs géomètres, l'auteur montre avec l'exemple de l'élimination des inconnues d'orientation que des simplifications à but didactique peuvent être réalisées sans devoir renoncer à la rapidité de calcul.

## 1. Allgemeines

### 1.1 Die Handrechnung im jetzigen Vermessungswesen

Das Zeitalter der elektronischen Rechenanlagen hat auch den Ingenieur-Geometern Vorteile gebracht. Die Rechenmethoden und die Arbeitsorganisation – diese zwar recht langsam – werden angepaßt, um die neuen technischen Mittel optimal auszunützen. Trotzdem kann auf die Handrechnung nicht verzichtet werden. Der Ingenieur muß auch in Zukunft die Operationen, die er normalerweise durch die Maschine ausführen läßt, kennen, damit er die Resultate vernünftig interpretiert und die verfügbaren Anlagen vorteilhaft einsetzt. Leider fehlt in unserem Land eine Koordination der Arbeiten, so daß die erwünschte Vollautomatisierung auf große Schwierigkeiten stößt. Dazu kommt, daß die neuen Taschenrechner mit festprogrammierten Funktionen dem Rechnen mit Formularen wieder Auftrieb gegeben haben.

### 1.2 Die Algorithmen

Diese Bemerkungen deuten an, wann der Geometer in Zukunft von Hand rechnen wird: während der akademischen Ausbildung – um die Rechenverfahren kennenzulernen – und nachher in der Praxis –, falls die Resultate sofort benötigt werden und die Verbindung zum Computer nicht möglich ist. Der Bürogeometer, als Kenner und Erfinder von ausgeklügelten Formularen, wird endgültig verschwinden.

Welche Rechenverfahren sind unter diesen Voraussetzungen zweckmäßig? Meine Antwort: einfache Algorithmen, leicht zu behalten und auch dem, der selten rechnet, leicht zugänglich. Ein umständliches Formular, auch wenn es Überschreibungen und Rechenoperationen weitgehend reduziert, nimmt dem heutigen Geometer mehr Zeit weg als ein weniger ausgeklügeltes, das aber leicht verständlich ist.

## 2. Die Matrizeninversion als Beispiel

### 2.1 Austauschverfahren und Gaußscher Algorithmus

Das Beispiel der Matrizeninversion zeigt, daß es sich lohnt, bisher verwendete Algorithmen zu überprüfen.

In der neuesten Literatur über Ausgleichsrechnungen wird immer noch der sogenannte Gaußsche Algorithmus für die Auflösung der Normalgleichungen und für die Matrizeninversion angegeben. Demgegenüber wird zum Beispiel an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich seit bald zwei Jahrzehnten in den Vorlesungen über angewandte Mathematik und seit einigen Jahren in der Vorlesung über Ausgleichsrechnung [1] das Austauschverfahren (AT-Verfahren) gezeigt, das deshalb einfacher ist, weil es nur die mehrfache Wiederholung der einzigen elementaren Operation «AT-Schritt» verlangt. Das Verfahren wird hier nicht beschrieben. Es wird auf die Literatur, zum Beispiel [2], verwiesen.

Wenn man den Rechenaufwand vergleichen will, kommt man für die Anzahl wesentlicher Operationen (Multiplikationen und Divisionen) zu folgendem Resultat:

Anzahl der Unbekannten	Anzahl Operationen AT-Verfahren	Anzahl Operationen Gaußscher Algorithmus
2	18	22
3	42	52
4	80	100
5	135	170
10	770	990

Die Tabelle zeigt die Anzahl der nötigen Multiplikationen und Divisionen für die Inversion der Matrix, die Lösung des Gleichungssystems, die Summenkontrolle und die  $[p_{vv}]$ -Kontrolle. In beiden Fällen werden die Symmetrieeigenschaften ausgenützt.

Die Unterschiede kommen daher, daß im Gaußschen Algorithmus ein Teil der inversen Matrix zweimal gerechnet wird: Das Verfahren ist für die reine Auflösung der Gleichungssysteme sehr vorteilhaft, für die Inversion hingegen nicht.

### 2.2 Didaktischer Aspekt

Viele Herleitungen von Formeln der Ausgleichsrechnung werden einfach, manchmal sogar trivial, wenn die Matrizen mit dem AT-Verfahren invertiert werden: Die AT-Schritte haben eine klare algebraische Bedeutung.

Eine interessante Anwendung ergibt sich auch bei der Elimination der Orientierungsunbekannten: Die Erklärung der Methode von Schreiber wird überflüssig, weil – wenn man die Reihenfolge der AT-Schritte zweckmäßig wählt und die nicht interessierenden Teile der Matrix so bald als möglich vernachlässigt – man zum gleichen Resultat mit der gleichen Anzahl Operationen kommt. Die Matrix der Verbesserungsgleichungen bleibt *unverändert*; damit werden alle heiklen Interpretationsfehler von  $Q_{LL}$  und  $Q_{vv}$  (Kofaktorenmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen bzw. der Verbesserungen) vermieden.

### 3. Die Elimination der Orientierungsunbekannten

#### 3.1 Verbesserungsgleichungen

Gegeben sei ein System von Verbesserungsgleichungen mit der Koeffizientenmatrix  $A$ , den Absolutgliedern  $L$ ; es liegen  $n$  Beobachtungen,  $m$  Orientierungsunbekannte und  $k$  Koordinatenunbekannte vor. Um zu vereinfachen, führen wir die Überlegungen mit  $n = 9$ ,  $m = 3$ ,  $k = 4$  durch und nehmen die Gewichte = 1 an. Die Resultate gelten natürlich auch im allgemeinen Fall. Es ist zweckmäßig, die Orientierungsunbekannten vor die Koordinatenunbekannten einzuröhren.

$$A = \begin{array}{ccccccc|c} O_1 & O_2 & O_3 & Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & \\ \hline -1 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & l_1 \\ -1 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & l_2 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & l_3 \\ 0 & -1 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & l_4 \\ 0 & -1 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & l_5 \\ 0 & 0 & -1 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & l_6 \\ 0 & 0 & -1 & a_7 & b_7 & c_7 & d_7 & l_7 \\ 0 & 0 & -1 & a_8 & b_8 & c_8 & d_8 & l_8 \\ 0 & 0 & -1 & a_9 & b_9 & c_9 & d_9 & l_9 \end{array}; L =$$

und die Absolutglieder

$$AG = A^T \cdot L = \begin{array}{c} -[l_1]^3 \\ -[l_4]^5 \\ -[l_6]^9 \\ [a1] \\ [b1] \\ [c1] \\ [d1] \end{array}$$

NG und AG können wie folgt in Teilmatrizen dargestellt werden:

$$NG = \left\| \begin{array}{c|c} B_{m \cdot m} & C_{m \cdot k} \\ \hline C^T_{k \cdot m} & D_{k \cdot k} \end{array} \right\|; AG = \left\| \begin{array}{c} F_{m \cdot 1} \\ \hline G_{k \cdot 1} \end{array} \right\| \quad (2)$$

Bemerkenswert ist, daß die Matrix  $-C$  bzw.  $-F$  identisch ist mit der Koeffizienten- bzw. Absolutgliedermatrix der fiktiven Verbesserungsgleichungen, die man bei der Schreiberschen Elimination eingeführt hätte. Überdies ist die Teilmatrix  $B$  über die Beziehung  $P_A = -B^{-1}$  mit der Matrix  $P_A$  (negative Schreibersche Gewichte) verbunden.  $P_A$  ist eine Diagonalmatrix, so daß die Transformation offensichtlich ist.

Die Matrix  $D$  entspricht den Normalgleichungsanteilen der  $n$  Beobachtungen bei der Berechnung nach Schreiber. Damit ist gezeigt, daß die Berechnung der Normalgleichungskoeffizienten nicht mehr Arbeit verlangt, wenn die Orientierungsunbekannten nicht eliminiert werden, denn die zusätzlichen Koeffizienten hätten auch mit Schreiber berechnet werden müssen.

#### 3.2 Die Normalgleichungsmatrix

Ohne vorgängige Elimination erhält man die Matrix der Normalgleichungen:

$$NG = A^T \cdot A = \left\| \begin{array}{c|c} 3 \ 0 \ 0 & -[a_1]^3 \ -[b_1]^3 \ -[c_1]^3 \ -[d_1]^3 \\ 0 \ 2 \ 0 & -[a_4]^5 \ -[b_4]^5 \ -[c_4]^5 \ -[d_4]^5 \\ 0 \ 0 \ 4 & -[a_6]^9 \ -[b_6]^9 \ -[c_6]^9 \ -[d_6]^9 \\ \hline \dots & [aa] \ [ab] \ [ac] \ [ad] \\ \dots & [bb] \ [bc] \ [bd] \\ \dots & [cc] \ [cd] \\ \dots & [dd] \end{array} \right\| \quad (1)$$

wo zum Beispiel  $[a]_6^9 = \sum_{i=6}^{i=9} a_i$

Wenn man auf den Kofaktor der Orientierungsunbekannten verzichtet, kann die vollständige Normalgleichungsmatrix (mit der Absolutglieder-Kolonne) wie folgt behandelt werden:  $m$  AT-Schritte werden ausgeführt, der Pivot wird in der Diagonale von oben nach unten gewählt, und man rechnet nur die Koeffizienten der Teilmatrix  $\| D \mid G \|$ , denn die Koeffizienten von  $C$  und  $F$  ändern nur in der Pivot-Zeile und werden nachher nicht mehr gebraucht.

Als Beispiel wählen wir das erste Element der Diagonalen von NG als Pivot; nach diesem ersten AT-Schritt erhält man als neue Teilmatrix:

$$\begin{aligned} \| D \mid G \|_{(1)} &= \left\| \begin{array}{c|c} [aa] - \frac{1}{3} [a_1]^3 [a_1]^3 & [ab] - \frac{1}{3} [a_1]^3 [b_1]^3 \ [ac] - \frac{1}{3} [a_1]^3 [c_1]^3 \ [ad] - \frac{1}{3} [a_1]^3 [d_1]^3 \\ [bb] - \frac{1}{3} [b_1]^3 [b_1]^3 & [bc] - \frac{1}{3} [b_1]^3 [c_1]^3 \ [bd] - \frac{1}{3} [b_1]^3 [d_1]^3 \\ [cc] - \frac{1}{3} [c_1]^3 [c_1]^3 & [cd] - \frac{1}{3} [c_1]^3 [d_1]^3 \\ \hline [dd] - \frac{1}{3} [d_1]^3 [d_1]^3 & [d_1] - \frac{1}{3} [d_1]^3 [l_1]^3 \end{array} \right\| = \\ &= \| D \mid G \| + \left\| \begin{array}{c|c} -\frac{1}{3} [a_1]^3 [a_1]^3 - \frac{1}{3} [a_1]^3 [b_1]^3 - \frac{1}{3} [a_1]^3 [c_1]^3 - \frac{1}{3} [a_1]^3 [d_1]^3 & -\frac{1}{3} [a_1]^3 [l_1]^3 \\ -\frac{1}{3} [b_1]^3 [b_1]^3 - \frac{1}{3} [b_1]^3 [c_1]^3 - \frac{1}{3} [b_1]^3 [d_1]^3 & -\frac{1}{3} [b_1]^3 [l_1]^3 \\ -\frac{1}{3} [c_1]^3 [c_1]^3 - \frac{1}{3} [c_1]^3 [d_1]^3 & -\frac{1}{3} [c_1]^3 [l_1]^3 \\ -\frac{1}{3} [d_1]^3 [d_1]^3 & -\frac{1}{3} [d_1]^3 [l_1]^3 \end{array} \right\| \quad (3) \end{aligned}$$

Im Vergleich mit der Schreiberschen Regel bemerkt man, daß dieser erste AT-Schritt die Normalgleichungsanteile der ersten Schreiberschen Gleichung zu den Normalgleichungsanteilen der Beobachtungen addiert (das zugehörige Gewicht ist im Beispiel  $-\frac{1}{3}$ ). Die Anteile der folgenden fiktiven Gleichungen werden mit den folgenden AT-Schritten berechnet und addiert.

Daraus wird ersichtlich, daß keineswegs eine Reduktion der Rechenarbeit durch die Schreibersche Elimination erzielt wird. Jedenfalls werden die gleichen Rechenoperationen durchgeführt, weil die Berechnung der Normalgleichungsanteile der fiktiven Verbesserungsgleichungen identisch mit der Berechnung der ersten  $m$  AT-Schritte der Inversion ist. Die Inversion wird mit der Durchführung der noch fehlenden

den  $k$  AT-Schritte nur unter Berücksichtigung der Koeffizienten der Teilmatrizen  $D_{(i)}$  und  $G_{(i)}$  vervollständigt, bis man  $D_{\text{inv}}$  (interessante Teilmatrix von  $\text{NG}^{-1}$ ) und die Unbekannten erhält. Aus der AT-Schritt-Definition ist leicht ersichtlich, daß die Koeffizienten der vernachlässigten Teilmatrizen für die Vervollständigung der Inversion nicht nötig sind.

### 3.4 In Matrizenform

Das Ganze kann in Matrizenform unter Verwendung der folgenden Darstellung einfacher gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \text{NG} &= \left\| \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline C^T & D \end{array} \right\| ; \quad \text{NG}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} B_{\text{inv}} & C_{\text{inv}} \\ \hline C^T_{\text{inv}} & D_{\text{inv}} \end{array} \right\| \\ \text{AG} &= \left\| \begin{array}{c} F \\ G \end{array} \right\| ; \quad X = \left\| \begin{array}{c} O \\ XY \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (4)$$

$B_{\text{inv}}$ ,  $C_{\text{inv}}$  usw. sind Teile der Matrix  $\text{NG}^{-1}$  und deswegen nicht zu verwechseln mit den Bezeichnungen  $B^{-1}$ ,  $C^{-1}$  usw.

Das Normalgleichungssystem lautet

$$\text{NG} \cdot X + \text{AG} = 0 \quad (5)$$

so daß

$$X = -\text{NG}^{-1} \cdot \text{AG} \quad (6)$$

Nach [3] ist

$$D_{\text{inv}} = (D - C^T \cdot B^{-1} \cdot C)^{-1} \quad (7)$$

und

$$C^T_{\text{inv}} = -(D - C^T \cdot B^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot C^T \cdot B^{-1} \quad (8)$$

Daraus folgen unmittelbar die nicht zu eliminierenden Unbekannten,

$$XY = -(C^T_{\text{inv}} \cdot F + D_{\text{inv}} \cdot G)$$

$$\text{d. h. } XY = (D - C^T \cdot B^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot (C^T \cdot B^{-1} \cdot F - G) \quad (9)$$

Man betrachte jetzt die folgende zusammengesetzte Matrix

$$\left\| \begin{array}{c|c|c} B & C & F \\ \hline C^T & D & G \end{array} \right\| \quad (10)$$

Nach Durchführung der  $m$  AT-Schritte mit Pivot in der Diagonalen von  $B$  erhält man

$$\left\| \begin{array}{c|c|c} B_{(m)} & C_{(m)} & F_{(m)} \\ \hline (C^T)_{(m)} & D_{(m)} & G_{(m)} \end{array} \right\| \quad (11)$$

Nach [3] ist:

$$D_{(m)} = D - C^T \cdot B^{-1} \cdot C \quad (12)$$

$$G_{(m)} = G - C^T \cdot B^{-1} \cdot F \quad (13)$$

Dies entspricht der Addition der Normalgleichungsanteile der fiktiven Verbesserungsgleichungen von Schreiber mit denen der Beobachtungen. Nun können aber die Untermatrizen  $B$ ,  $C$ ,  $C^T$ ,  $F$  vernachlässigt werden. In der Tat, führt man die  $k$  AT-Schritte nur in den Teilmatrizen  $D$  und  $G$  mit Pivotelement in der Diagonalen von  $D$  durch, so ergibt sich

$$D_{(m+k)} = (D_{(m)})^{-1} = (D - C^T \cdot B^{-1} \cdot C)^{-1} = D_{\text{inv}} \quad (14)$$

und

$$\begin{aligned} G_{(m+k)} &= -(D_{(m)})^{-1} \cdot G_{(m)} = \\ &= (D - C^T \cdot B^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot (C^T B^{-1} \cdot F - G) = XY \end{aligned} \quad (15)$$

$XY$  sind die nicht zu eliminierenden Unbekannten und  $D_{\text{inv}}$  die dazugehörige Kofaktorenmatrix.

### 4. Schlußfolgerungen

Das Beispiel des AT-Verfahrens zeigt, daß die Vereinfachung von häufig verwendeten Algorithmen ohne vergrößerten Rechenaufwand möglich ist. Die im Artikel behandelte Elimination der Orientierungsunbekannten stellt ein Beispiel der möglichen Anwendungen des AT-Verfahrens dar. Das beschriebene Vorgehen kann leicht auch auf die Elimination jeder beliebigen Gruppe Unbekannter erweitert werden. Das würde einer verallgemeinerten Schreiber-schen Regel entsprechen, in welcher die Gewichtsmatrix der fiktiven Verbesserungsgleichungen nicht mehr diagonal ist. So kann mehr als eine Unbekannte pro Beobachtung eliminiert werden.

### Literatur

- [1] R. Conzett: Vorlesung über Ausgleichungsrechnung. Eidg. Technische Hochschule Zürich, nicht veröffentlicht.
- [2] E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart 1963.
- [3] N. Wunderlin: Zur Bildung der Kofaktorenmatrix der Unbekannten einer durch Vereinigung von Teilausgleichungen entstandenen Gesamtausgleichung. Vermessung – Photogrammetrie – Kulturtechnik, Fachblatt 3-72, September 1972.
- [4] W. Grossmann: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Berlin 1969.

## La protection du sol contre l'érosion dans les vignobles

A. Riva

### Résumé

Les sols viticoles sont souvent pauvres en humus, se dégradent chaque année par suite des fortes précipitations provoquant en certains endroits une importante érosion dont l'effet est encore aggravé par les méthodes modernes de cultures.

Dans le but de réduire les frais d'ouvrages de protection, très coûteux, l'Institut de Génie rural de l'EPFL a entrepris des recherches sur l'érosion et sur les effets d'une application de compost de gadoues, comme moyen de protection du sol. Une dizaine de parcelles expérimentales ont été aménagées afin de pouvoir observer l'efficacité du compost.

On expose donc brièvement les différents procédés utilisés et certains résultats de ces recherches.

### Zusammenfassung

Rebberge sind oft arm an Humus. Die Böden werden jedes Jahr durch starke Regenfälle abgetragen. Sie bewirken stellenweise eine bedeutende Erosion, die durch die modernen Bewirtschaftungsmethoden noch verschärft wird.

Um die Kosten der sehr teuren Schutzbauten zu vermindern, hat das Institut für Technik in der Landwirtschaft der EPFL Untersuchungen über die Erosion und die Verwendung von Müllkompost als Bodenschutzmittel vorgenommen. Auf zehn Versuchsparzellen wurde die Wirksamkeit des Kompostes ausprobiert.

In der Folge werden die verschiedenen Vorgehen und das Ergebnis dargestellt.