Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))

Band: 71-M (1973)

Heft: 12

Artikel: Höheninterpolation mittels gleitender Schrägebene und Prädiktion

Autor: Koch, K.R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-226412

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Höheninterpolation mittels gleitender Schrägebene und Prädiktion

K. R. Koch

Zusammenfassung

Die Höheninterpolation mittels gleitender Schrägebene wird für die Zeichnung der Höhenlinien topographischer Karten durch die Prädiktion ergänzt, indem die gleitende Schrägebene zur Abspaltung des Trends in der Geländeoberfläche benutzt und die verbleibenden Abweichungen einer Prädiktion unterzogen werden. Bei der Berechnung der Kovarianzfunktion werden zwar isotrope, nicht aber homogene Verhältnisse vorausgesetzt, da die Annahme der Homogenität zu unbefriedigenden Ergebnissen bei der Prädiktion führte. Als Beispiel für das entwickelte Verfahren dient die Höhenlinienzeichnung für einen Ausschnitt der Deutschen Grundkarte 1 : 5000 «Güstenerhof», für die photogrammetrisch bestimmte Höhen und die aus ihnen vom Topographen im Gelände konstruierten Höhenlinien vorliegen.

Résumé

La prédiction d'après la méthode des moindres carrés, y compris des termes déterminants, est appliquée pour interpoler les altitudes d'un modèle digital de terrain et pour représenter la surface du terrain par des combes de niveau. Les termes déterminants sont obtenus par une compensation d'après la méthode des moindres carrés en introduisant des surfaces locales du premier degré pour arriver par approximation à la surface du terrain. Afin de calculer la fonction de convariance pour la prédiction, on suppose l'état d'isotropie. Cependant, s'il se montre que cette supposition n'est pas satisfaisante, chaque altitude est déterminée par des prédictions de convariances différentes, qu'on reçoit à l'aide des distances entre des points donnés. Un exemple montre les combes de niveau d'un plan topographique à l'échelle 1 : 5000.

Summary

Least-squares prediction with the inclusion of deterministic terms is applied to interpolate heights for a digital terrain model and to represent the surface of the terrain by contour lines. The deterministic terms are obtained by least-squares adjustments using local surfaces of first degree to approximate the surface of the terrain. In order to compute the covariance function for the prediction, isotropy is assumed. However, the assumption of homogeneity proved to be unsatisfactory so that each height is predicted by a different covariance function which is obtained by means of the distances between the data points. As an example the contour lines of a topographic map 1 : 5000 are drawn.

1. Einleitung

Wie in [4] gezeigt wurde, läßt sich sowohl für glatte Geländeoberflächen als auch für Gelände mit Böschungen ein digitales Geländemodell mit anschließender Höhenlinienzeichnung durch die Interpolation mittels gleitender Schrägebene gewinnen. Dabei wird, wie im folgenden noch gezeigt werden soll, für jede zu interpolierende Höhe eine ausgleichende Ebene mit Hilfe der Höhen der umliegenden Meßpunkte berechnet. Die Gewichte der Ausgleichung werden so gewählt, daß die Ebene durch die Meßpunkte verläuft, falls die Meßpunkte mit einem zu interpolierenden Punkt zusammenfallen. Man kann sich also vorstellen, daß für die Interpolation die Ebene entlang des Geländes gleitet. Nun läßt sich eine gekrümmte Geländeoberfläche mittels gleitender Schrägebene nicht vollkommen darstellen, da man den Meßpunktabstand nicht beliebig klein wählen kann. Die gekrümmte Oberfläche wird also an den Stellen, an denen keine Meßpunkte liegen, etwas abgeflacht oder aufgefüllt werden [4]. Dieser Effekt führt kurzperiodische Schwingungen in das Bild der Höhenlinien ein, so daß die Geländeoberfläche rauher erscheint, als sie in Wirklichkeit ist. Für Höhenlinienpläne der Ingenieurvermessung kann das akzeptiert werden, da die geometrische Genauigkeit hierdurch nur unwesentlich beeinträchtigt wird. Werden jedoch die Höhenlinien für topographische Karten gezeichnet, wünscht man sich, daß auch die Morphologie des Geländes richtig dargestellt wird.

Möglichkeiten, die gekrümmte Geländeoberfläche bei der Interpolation besser herauszuarbeiten, bestehen darin, statt einer gleitenden Schrägebene die gleitende Fläche zweiter Ordnung zu wählen [4] oder aus den gegebenen Höhen die Geländeneigungen in den Meßpunkten zu ermitteln und diese zur Interpolation zu verwenden [1]. Bei beiden Methoden besteht die Gefahr der Überhöhung oder Vertiefung des Geländes.

Vorteilhafter ist die Methode der Prädiktion, bei der die Erhaltungstendenzen der Geländeoberfläche in der Kovarianzfunktion ausgedrückt und bei der Interpolation berücksichtigt werden, so daß man die Krümmung der Geländeoberfläche bei der Höhenbestimmung erfaßt. Die Interpolation mittels gleitender Schrägebene läßt sich einfach durch die Prädiktion ergänzen, indem die Schrägebene zur Abspaltung der Deterministik oder des Trends der Geländeoberfläche dient, während die verbleibenden zufälligen Abweichungen mit Hilfe der Prädiktion verteilt werden. Da die gleitende Schrägebene sich bereits gut dem Gelände anpaßt, sind die zufälligen Abweichungen klein, so daß Vereinfachungen zur Bestimmung der Kovarianzfunktion eingeführt werden können.

Die Höheninterpolation mit Hilfe der Prädiktion wurde bereits praktisch angewendet [5, 6, 8]. Kraus [5, 6] zerlegt das Interpolationsgebiet in Recheneinheiten, für die jeweils durch ein Polynom zweiter Ordnung eine gemeinsame Trendfunktion und durch Mittelung in Entfernungsklassen eine gemeinsame Kovarianzfunktion bestimmt werden. Innerhalb der Recheneinheit wird also Homogenität, das heißt Ortsunabhängigkeit, des durch die Höhenmessungen gegebenen stochastischen Prozesses vorausgesetzt. Weiter wird Isotropie, also Richtungsunabhängigkeit angenommen. Lauer [8] spaltet durch ausgleichende Horizontalebenen in jedem Interpolationspunkt den Trend ab, setzt aber ebenfalls zur Bestimmung der Kovarianzfunktion neben der Isotropie die Homogenität für größere Gebiete voraus.

Hier durchgeführte Untersuchungen haben gezeigt, daß in schwach geneigtem Gelände, das mit kleinen, örtlich begrenzten Vertiefungen und Erhebungen durchsetzt ist, trotz Abspaltung des Trends in jedem Interpolationspunkt mit der Prädiktion nur dann befriedigende Ergebnisse erzielt werden, wenn die Voraussetzung der Homogenität des durch die gemessenen Geländehöhen definierten stochastischen Prozesses fallengelassen wird. Dies gilt nicht nur für schwach geneigtes Gelände, sondern für alle Geländetypen, deren großregionale Formen mit Kleinformen durchsetzt sind, falls man nicht den Rechenaufwand bei der Bestimmung des Trends extrem steigern will. Es wird daher für jede zu interpolierende Höhe zunächst durch eine gleitende Schrägebene der Trend beseitigt und dann mit Hilfe

einer isotropen Kovarianzfunktion prädiziert, die für jeden Interpolationspunkt neu bestimmt wird. Die zur Berechnung der Kovarianzfunktion erforderliche Information gewinnt man, wie im folgenden erläutert wird, aus dem Abstand der Meßpunkte.

2. Prädiktionsfilterung

Das Signal s, das hier mit den Geländehöhen identifiziert wird, enthalte neben zufälligen Anteilen η, die den Erwartungswert Null besitzen, auch deterministische Anteile. Gemessen werde das Signal s mit den zufälligen Messungsfehlern ζ, die den Erwartungswert Null besitzen und mit den Anteilen η nicht korreliert seien. Dann ergibt sich das aus der Prädiktionsfilterung gewonnene Signal $\hat{s}$ zu [7, 9, 10]

$$\hat{s} = \mathbf{g}^T{}_P\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Q}^T{}_{P_\eta}(\mathbf{Q}_{\eta\eta} + \mathbf{Q}_{\zeta\zeta})^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{G}\boldsymbol{\beta}) \tag{1}$$

mit $$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{G}^T(\mathbf{Q}_{\eta\eta} + \mathbf{Q}_{\zeta\zeta})^{-1}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T(\mathbf{Q}_{\eta\eta} + \mathbf{Q}_{\zeta\zeta})^{-1}\mathbf{u} \tag{2}$$

Die Matrix $\mathbf{G}$* enthält die Koeffizienten des mathematischen Modells des Trends, der Vektor $\mathbf{g}_P$ die entsprechenden Koeffizienten für den zu prädizierenden Punkt und der Vektor $\boldsymbol{\beta}$ die Parameter des Trendmodells. $\mathbf{u}$ bezeichnet den Vektor der Messungen. $\mathbf{Q}_{\eta\eta}$ ist die Kovarianzmatrix der zufälligen Anteile η des Signals und $\mathbf{Q}_{\zeta\zeta}$ die Kovarianzmatrix der Messungsfehler ζ. Der Vektor $\mathbf{Q}_{P_\eta}$ erhält die Kovarianzen zwischen den Werten für η in den Meßpunkten und dem Wert im zu prädizierenden Punkt.

Nimmt man die Messungen als fehlerfrei an, was in der Regel für die Interpolation von Höhen geschieht, so gilt

$$\mathbf{Q}_{\zeta\zeta} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Man spricht dann im Gegensatz zur Prädiktionsfilterung von reiner Prädiktion. Die auf diese Weise gewonnene Geländeoberfläche verläuft durch die Meßpunkte [7].

3. Trendabspaltung

Bei der Abspaltung der Deterministik wird die Geländeoberfläche durch eine mathematisch einfach definierte Fläche angenähert, so daß die Abweichungen des Geländes von der Näherungsfläche zufälligen Charakter annehmen. Wie aus (2) ersichtlich, ergeben sich die Parameter des Trendmodells durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, in der als Kovarianzmatrix die Kovarianzen der zufälligen Anteile des Signals und der Messungsfehler benötigt werden. Da es bei der Abspaltung des Trends in erster Linie darauf ankommt, eine gute Approximation der Geländeoberfläche zu erhalten, kann man näherungsweise die Kovarianzen in (2) durch geeignet gewählte Gewichte ersetzen, so daß die Methode der gleitenden Schrägebene anwendbar ist.

Die Koordinaten der Meßpunkte seien in einem rechtwinkligen x, y, z-Koordinatensystem gegeben, in dem z die Höhe bezeichnet. Wird z mit Hilfe einer Schrägebene ausgedrückt

$$z = a_{00} + a_{10}\,x + a_{01}\,y$$

und sollen für die Höheninterpolation die Koeffizienten a_{00}, a_{10} und a_{01} durch eine Ausgleichung bestimmt werden, so ergibt sich für die Verbesserung $\mathbf{v}$ der gemessenen Höhe z die Beziehung

$$a_{00} + xa_{10} + ya_{01} = z + \mathbf{v} \tag{4}$$

* Vektoren und Matrixen sind fett gedruckt.

Für das Gewicht p gelte

$$p = \frac{1}{([x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^m} \text{ mit } m > 0 \tag{5}$$

wenn x_0 und y_0 die Koordinaten des zu interpolierenden Punktes bedeuten. Die Wahl der Gewichte bewirkt, daß die gleitende Schrägebene durch die Meßpunkte verläuft [4]. In Matrizenschreibweise lassen sich die aus (4) folgenden Verbesserungsgleichungen abgekürzt schreiben

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

so daß mit der nach (5) definierten Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ die Normalgleichungen folgen

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{G}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{u} \tag{6}$$

Anstelle von (2) wird also (6) zur Bestimmung der Trendfunktion benutzt, da die gute Anpassung an das Gelände entscheidend ist.

Die nach (6) ermittelten Werte müssen allerdings noch zentriert werden, damit die Werte $\mathbf{u} - \mathbf{G}\boldsymbol{\beta}$ den Mittelwert Null erhalten. Für jeden zu interpolierenden Punkt werden die Komponenten von $\boldsymbol{\beta}$ neu bestimmt, so daß die Schrägebene entlang des Geländes gleitet.

4. Kovarianzfunktion

Maßgebend für den Erfolg einer Prädiktion ist die Güte der Kovarianzfunktion für die zufälligen Anteile η des Signals. Da hier mit der gleitenden Schrägebene bereits eine gute Anpassung an das Gelände gefunden wird, kann zunächst angenommen werden, daß die Kovarianzfunktion isotrop ist. Als mathematisches Modell dient dann eine Abklingfunktion, die nur vom Abstand l zwischen den Meßpunkten oder den Meßpunkten und dem interpolierten Punkt abhängig ist. Hier wird das von Hirvonen [2] vorgeschlagene Modell gewählt,

$$\mathbf{Q}\eta\eta\,(l) = \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{c}\right)^2} \tag{7}$$

das einen ähnlichen Verlauf wie die Exponentialfunktion zeigt, dessen Halbwertsbreite c aber bequem zu variieren ist. Von Halbwertsbreite spricht man, da mit $c = l$ folgt $\mathbf{Q}\eta\eta\,(c) = 0{,}5$.

Die Kovarianzfunktion (7) ist auf die Varianz 1 normiert. Bei der Prädiktionsfilterung muß daher die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}_{\zeta\zeta}$ der Meßfehler entsprechend normiert werden. Hierzu dividiert man die Elemente der Matrix $\mathbf{Q}_{\zeta\zeta}$, die in der Regel durch eine Diagonalmatrix angenähert werden, durch die Varianzen der Anteile η, die sich näherungsweise aus den Quadraten der mittleren Höhenfehler bei den Ausgleichungen für die gleitende Schrägebene ergeben.

Beispielrechnungen ergaben, daß die Prädiktionsergebnisse unbefriedigend waren, wenn gebietsweise mit der gleichen Kovarianzfunktion (7), das heißt mit der gleichen Halbwertsbreite c gearbeitet wurde. Es dürfen also keine homogenen Verhältnisse bei der Bestimmung der Kovarianzfunktion vorausgesetzt werden. Das läßt sich leicht dadurch erklären, daß die Abweichungen des Geländes von der gleitenden Schrägebene in Gebieten mit rasch wechselnden Höhenunterschieden sich anders verhalten als die Abweichungen bei langsam sich ändernden Höhen. Im ersten Fall nimmt die in der Kovarianzfunktion zum Ausdruck kom-

mende Erhaltungstendenz des Geländes sehr viel rascher ab als im zweiten Fall. Die Halbwertsbreiten der Kovarianzfunktionen müssen also unterschiedlich lang sein. Diese Überlegungen gelten nicht nur für Trendabspaltungen mit Hilfe einer Schrägebene, also Polynomen ersten Grades, sondern allgemein für Polynome niedrigen Grades. Erst wenn bei großem Rechenaufwand mit Polynomen hohen Grades oder ähnlichen Modellansätzen für die Deterministik gearbeitet wird, werden sich gebietsweise homogene Verhältnisse herstellen lassen.

Das übliche Verfahren der Bildung von Mittelwerten in Entfernungsklassen zur Bestimmung der richtungsunabhängigen Kovarianzfunktion versagt bei nicht homogenen Verhältnissen, denn diese Vorgehensweise setzt die Ergodizität des stochastischen Prozesses voraus, die nur für homogene Prozesse gegeben sein kann [3]. Da selbstverständlich auch die Verteilungsfunktionen der zufälligen Anteile η nicht bekannt sind, mit denen die Kovarianzfunktionen zu berechnen wären, muß zusätzliche Information zur Bestimmung der Kovarianzfunktionen zur Hilfe genommen werden. Diese ist bei der Höheninterpolation durch den Abstand der Meßpunkte gegeben. Der Meßingenieur im Gelände wählt nämlich die Entfernung der Meßpunkte danach aus, wie rasch sich die Geländeformen ändern. Für die Erfassung von Kleinformen ist der Meßpunktabstand kürzer als in Gebieten mit nur langsam sich ändernden Höhen. Bei einer punktweisen Höhenauswertung an einem photogrammetrischen Gerät, die näherungsweise in Profilen abläuft, werden die Profilabstände nach Art des Geländes gewählt und zusätzliche Höhen von Geländeformen bestimmt, die die Profile nicht erfassen, so daß bei der photogrammetrischen Höhenaufnahme ähnliche Verhältnisse wie bei der terrestrischen Aufnahme vorliegen.

Versuche haben gezeigt, daß gute Prädiktionsergebnisse mit einer Halbwertsbreite von etwa

$$c = 0{,}58\, r \tag{8}$$

in (7) erzielt werden, falls r die Summe der Abstände des zu prädizierenden Punktes von den beiden nächstgelegenen Meßpunkten bedeutet. Wird die Halbwertsbreite verlängert, beginnt die Prädiktion die Höhen in Kuppen zu überhöhen und in Wannen zu vertiefen. Effekte in entgegengesetzter Richtung treten bei der Verkürzung der Halbwertsbreite auf. Da Homogenität nicht vorausgesetzt wird, können auch die Höhen von Gelände mit Böschungen prädiziert werden, falls an den Böschungskanten eine dichte Folge von Meßpunkten durch lineare Interpolation eingeschaltet wird [4].

5. Beispielrechnung

Die Interpolation mittels gleitender Schrägebene und mit Hilfe der Prädiktion wurde zur Höhenlinienzeichnung des Blattes «Güstenerhof» (2530 Rechts, 5644 Hoch) der Deutschen Grundkarte 1:5000 angewendet. Die Höhenunterschiede in dem von diesem Blatt bedeckten Gebiet sind so gering, daß die Höhenlinien mit dem photogrammetrischen Auswertegerät nicht direkt gezeichnet werden konnten, sondern daß näherungsweise in Profilen die Höhen punktweise ausgemessen wurden unter Einschaltung zusätzlicher Höhenpunkte für Geländeformen, die durch die Profilmessung nicht erfaßt worden waren. Insgesamt wurden im Gebiet der Grundkarte «Güstenerhof» 1995 Meßpunkte bestimmt, deren Koordinaten vom Landesvermessungsamt Nordrhein-Westfalen für die Beispielrechnungen zur Verfügung gestellt wurden. Den farbigen Zusammendruck der Ergebnisse besorgte ebenfalls das Landesvermessungsamt, wofür seinem Direktor, Herrn Professor Krauss, herzlich gedankt sei.

Für die Interpolation der Höhe eines Punktes mittels gleitender Schrägebene oder Prädiktion benötigt man lediglich die Meßpunkte in der Umgebung des Punktes mit der zu berechnenden Höhe. Die Anzahl der Meßpunkte wird hier auf zwanzig beschränkt, da eine Erhöhung auch bei der Prädiktion keine oder eine nur unwesentliche Verbesserung der Ergebnisse bringen würde. Der Kernspeicherbedarf für die Prädiktion im Anschluß an die Interpolation mittels gleitender Schrägebene vergrößert sich daher nur geringfügig, so daß das hier entwickelte Verfahren zum Aufbau eines digitalen Geländemodells und zur automatischen Höhenlinienzeichnung auch von Rechenanlagen mittlerer Größe mit weniger als 128 K Bytes Kernspeicherplätzen zu bewältigen ist [4]. Die Rechenzeit wächst allerdings bei der Prädiktion im Vergleich zur Interpolation mittels gleitender Schrägebene erheblich an, da für jede zu interpolierende Höhe symmetrische Gleichungssysteme mit bis zu zwanzig Unbekannten aufzulösen sind.

Für die Höhenlinienzeichnung des Grundkartenblattes «Güstenerhof» wurden zunächst die Höhen eines digitalen Geländemodells mit einem Rasterabstand von 10 m bestimmt und dann die Höhenlinien nach dem in [4] angegebenen Verfahren gezeichnet, wobei das Zeichengerät als einzige Funktion die geradlinige Verbindung zweier aufeinanderfolgender Punkte auf der Höhenlinie zu übernehmen hatte. Bei Zeichenanlagen mit Interpolator können selbstverständlich Interpolationsaufgaben beim Zeichnen gekrümmter Linien der Zeichenanlage übertragen werden. Die Höhen des digitalen Geländemodells wurden einmal mit Hilfe der gleitenden Schrägebene bei Berücksichtigung der minimalen Punktanzahl von mehr als vier Punkten in der Nachbarschaft des Punktes mit der zu berechnenden Höhe interpoliert und zum anderen mit Hilfe der Prädiktion aus mehr als zwölf Punkten in der Nachbarschaft. Beim Auswählen der Punkte für die Interpolation geht man von den nächstgelegenen Punkten zu den weiter entfernt liegenden Punkten vor. Die Höhenlinien der Prädiktion sind in Abbildung 1, die einen Ausschnitt aus dem Grundkartenblatt «Güstenerhof» zeigt, in Rot ausgezeichnet, während die Höhenlinien aus der Interpolation mittels gleitender Schrägebene in Grün dargestellt sind. Zum Vergleich wurden auch die Höhenlinien des entsprechenden Ausschnittes der Deutschen Grundkarte «Güstenerhof» in Schwarz hinzugefügt. Diese Höhenlinien konstruierte der Topograph im Gelände aus den photogrammetrischen Höhenwerten, die auch für die automatische Zeichnung benutzt wurden. Bei der Konstruktion der Höhenlinien durch den Topographen können daher photogrammetrische Auswertefehler korrigiert worden sein. Es besteht aber auch die Möglichkeit, daß Fehler beim Entwerfen der Höhenlinien eingeführt worden sind.

Aus Abbildung 1 ist unmittelbar ersichtlich, daß die automatisch gezeichneten Höhenlinien sehr gut mit denen des

Topographen übereinstimmen. Das gilt nicht nur für den hier gezeigten Ausschnitt, sondern auch für den Rest des Grundkartenblattes sowie für weitere durchgerechnete Beispiele. Ferner stimmen die Höhenlinien aus der Prädiktion sehr gut mit denen aus der Interpolation mittels gleitender Schrägebenen überein, obwohl, wie bereits erläutert, mit unterschiedlichen Anzahlen von Punkten für die Berechnung einer Rasterhöhe nach den beiden Interpolationsmethoden gearbeitet wurde. Wegen der Berücksichtigung der weiteren Punktumgebung bei der Prädiktion wird aber das Höhenlinienbild ruhiger und vermag den Geländecharakter besser herauszuarbeiten. Allerdings muß die Verbesserung mit einem erhöhten Rechenaufwand erkauft werden, denn die Rechenzeit für die Interpolation der 36100 Rasterpunkte des Grundkartenblattes (ein 50 m breiter Streifen an den Rändern des Blattes mußte wegen der fehlenden Meßpunkte außerhalb des Blattes von der Höhenlinienzeichnung ausgeschlossen werden) einschließlich der Erzeugung der Steuerbefehle für die Zeichenanlage betrug 87 Sekunden bei der Interpolation mittels gleitender Schrägebene und 394 Sekunden bei der Prädiktion. Der Kernspeicherbedarf für das Beispiel lag unter 128 K Bytes.

Die Rechnungen wurden auf der IBM 370/165 und die Zeichnungen mit dem Mikrofilmplotter von Calcomp der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, ausgeführt.

Literatur

[1] CALCOMP: A General Purpose Contouring Program. California Computer Products, Anaheim, California, 1971.

[2] *R. A. Hirvonen:* On the Statistical Analysis of Gravity Anomalies. Publ. Isostatic Inst. Int. Assoc. Geod., No. 37, Helsinki, 1962.

[3] *A. M. Jaglom:* Einführung in die Theorie der stationären Zufallsfunktionen. Akademie-Verlag, Berlin, 1959.

[4] *K. R. Koch:* Digitales Geländemodell und automatische Höhenlinienzeichnung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 98. Jg., S. 346–352, 1973.

[5] *K. Kraus:* Automatische Berechnung digitaler Höhenlinien. Zeitschrift für Vermessungswesen, 96. Jg., S. 233–239, 1971.

[6] *K. Kraus:* Rationalisierung der tachymetrischen Geländeaufnahme und Automatisierung der Weiterverarbeitung zur großmaßstäbigen Karte. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 80. Jg., S. 3–16, 1973.

[7] *S. Lauer:* Über die stochastischen Eigenschaften lokaler Schwereanomalien und ihre Prädiktion. Dissertation, Bonn, 1971.

[8] *S. Lauer:* Anwendung der skalaren Prädiktion auf das Problem des digitalen Geländemodells. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe I, Nr. 51, S. 105–116, 1972.

[9] *M. Moritz:* Neuere Ausgleichungs- und Prädiktionsverfahren. Zeitschrift für Vermessungswesen, 98. Jg., S. 137–146, 1973.

[10] *P. Whittle:* Prediction and Regulation. The English Universities Press, London, 1963.

Die Bezugssysteme in der Geodäsie

M. Schürer

Zusammenfassung

Die dreidimensionale Geodäsie hat zur Klärung der Definitionen der verschiedenen geodätischen Bezugssysteme beigetragen. Es werden die natürlichen Systeme von den geodätischen unterschieden; erstere sind physikalisch, letztere rein geometrisch definiert. Die gegenseitigen Beziehungen werden aufgezeigt.

Sommaire

La géodésie à trois dimensions a contribué à la clarification des définitions des différents systèmes géodésiques de référence. On distingue systèmes naturels et systèmes géodésiques; alors que les premiers sont définis physiquement, les seconds le sont purement géométriquement. On présente les relations entre ces systèmes.

1. Einleitung

Die neueren Entwicklungen in der Geodäsie (die modernen Methoden der Entfernungsmessung und der Satellitengeodäsie, theoretisch fundiert durch die dreidimensionale Geodäsie) haben auch zur Klärung der Grundlagen beigetragen, und diese Grundlagen der mathematischen Geodäsie sollen im Lichte der neueren Theorien mit besonderer Betonung des Dreidimensionalen im folgenden dargelegt werden. Wenn teilweise bekannte und elementare Begriffe in diesem Zusammenhang nochmals erklärt werden, möge man dies mit dem Streben nach Vollständigkeit entschuldigen.

Etwas überspitzt formuliert, ist die mathematische Geodäsie die Wissenschaft von den geodätischen Bezugssystemen. Die natürliche Unterscheidung zwischen Lage- und Höhebestimmungen wie auch die verschiedenen Meßmethoden für Horizontal- und Vertikalwinkel und der unangenehme Einfluß der Refraktion auf die Vertikalwinkelmessungen haben in der klassischen Geodäsie zu einer natürlichen Aufteilung nach Lage- und Höhenkoordinaten geführt, die aus praktischen Gründen immer ihre Berechtigung haben wird. Die dreidimensionalen Systeme lassen diese Aufspaltung der Koordinaten meist auch noch erkennen.

2. Natürliche globale Systeme

Als natürliche globale Koordinaten eines Punktes bieten sich die Breite Φ, die Länge λ und die geopotentielle Kote C der durch den Punkt gehenden Niveaufläche des Schwerepotentials der Erde an. Breite und Länge müssen mit Hilfe eines astronomischen Bezugssystems bestimmt werden. Die Breite Φ ist identisch mit der Deklination des Zenitpunktes, die Länge λ mit dem Stundenwinkel eines noch zu definierenden Nullmeridians. Das astronomische System ist ein sphärisches Polarkoordinatensystem, dessen Polachse mit der Rotationsachse der Erde zusammenfällt. Da diese und die Lote im Erdkörper nahezu festliegen, bleiben auch Breiten und Längen der einzelnen Beobachtungspunkte praktisch konstant. Die geopotentielle Kote C, das ist die Potentialdifferenz gegenüber einer ausgezeichneten Niveaufläche des Schwerepotentials, dem Geoid, bestimmt man aus:

$$C = \int_0^P g dh,$$