**Zeitschrift:** Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))

**Band:** 71-F (1973)

**Heft:** 2

**Artikel:** Die Orientierung von Polygonzügen mit Sonnenazimuten

**Autor:** Wyss, N.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-226180

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 24.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Die Orientierung von Polygonzügen mit Sonnenazimuten

DK 528.283 : 528.414

N. Wyss, Unterseen

*Zusammenfassung*
Die Beobachtung von Sonnenazimuten ist mit einem minimen zusätzlichen instrumentellen Aufwand in wenigen Minuten mit einer Genauigkeit von etwa $0{,}5^c$ möglich. Die programmierbaren Tischcomputer ermöglichen eine problemlose und rasche Berechnung.

*Résumé*
L'observation des azimuts solaires est possible en quelques minutes sans grand apport instrumental supplémentaire et avec une précision d'environ $0{,}5^c$. Les ordinateurs garantissent un calcul rapide et sans problèmes.

## 1. Die Methode im allgemeinen und ihre Anwendung

Wegen der unbestreitbaren Vorteile der Azimutbestimmung mit Hilfe der Sonne erscheinen in der Fachliteratur immer wieder Beiträge, die sich mit der praktischen Durchführung beschäftigen. Trotzdem wird die Methode in der Praxis nur selten angewendet. Der entscheidende Nachteil dürfte in der komplizierten und fehleranfälligen Berechnung liegen. Mit den in vielen Vermessungsbüros bereits vorhandenen programmierbaren Tischcomputern läßt sich nun die Berechnung soweit vereinfachen, daß sie durch jeden Vermessungstechniker ohne zusätzliche Kenntnisse ausgeführt werden kann. Versuche und die praktische Anwendung haben gezeigt, daß die auch vom ungeübten Beobachter erreichbare Genauigkeit zum Beispiel für die Bestimmung der Azimutanschlüsse von Polygonzügen der Grundbuchvermessung genügt.
Sofern am Anfangs- oder Endpunkt eines Polygonzuges kein Anschlußzielpunkt sichtbar ist, dürfte die Bestimmung von Sonnenazimuten die wirtschaftlichste Lösung darstellen. Zum Zeitaufwand für die Signalisierung eines Zielpunktes kommt das Risiko, daß er nicht aufgefunden wird oder zerstört ist, sowie daß die Visur verbaut oder verwachsen ist.
Zur Berechnung der Sonnenazimute genügen die aus der Landeskarte auf etwa 25 m genau entnommenen Koordinaten des Standpunktes. Bei der Ausgleichung von Polygonzügen mit Zwischenazimuten entfällt daher die mehrmalige Durchrechnung, wie sie bei terrestrischen Azimuten notwendig ist. Bei langen Polygonzügen kann ohne großen Aufwand durch Sonnenazimute in den Zwischenpunkten die Genauigkeit in der Querrichtung wesentlich verbessert werden. Besonders bei den langen Polygonzügen für Straßenabsteckungen ist dieses Verfahren wertvoll. Werden bei Knotenpunkten die Teilzüge auf ein beobachtetes Sonnenazimut ausgeglichen, wird die Lagegenauigkeit entscheidend gewinnen. Daneben können Sonnenazimute zur Orientierung von Detailaufnahmen, die nicht an die Landeskoordinaten angeschlossen sind, zur Azimutkontrolle in freien Polygonzügen, zur Lokalisierung von Winkelfehlern und anderem mehr dienen.
Nachteilig ist allein die Abhängigkeit vom Wetter. Wird die Sonne während der Messung einer Station durch Wolken verdeckt, werden die Richtungen bezüglich eines beliebigen, weit entfernten Zielpunktes (Hausgiebel usw.) gemessen. Später können dann an einem schönen Tag auf allen Stationen die Azimute dieser Fernvisuren bestimmt werden. Als Kontrolle wird zudem ein Azimut zwischen bekannten Punkten gemessen.
Die beste Beobachtungszeit ist am Morgen und am Abend, wenn die Sonne tief steht. Mit zunehmender Höhe nimmt der Einfluß der Stehachsenschiefe und eines Fehlers der Zeitbestimmung zu. Beschränkt man sich auf einen Höhenwinkel kleiner als $60^g$, so beträgt der maximale Wert der Richtungsänderung pro Zeitsekunde $0{,}8^c$. Von Mitte April bis Ende August darf somit über Mittag nicht beobachtet werden:

15. April bis 15. Mai:
keine Beobachtung zwischen $10^h\ 30^m$ und $14^h\ 30^m$
15. Mai bis 31. Juli:
keine Beobachtung zwischen $10^h\ 00^m$ und $15^h\ 00^m$
31. Juli bis 31. August:
keine Beobachtung zwischen $10^h\ 30^m$ und $14^h\ 30^m$

Um die erreichbare Genauigkeit zu erhalten, müssen die Richtungen auf $0{,}1^c$ und die Zeit auf 0,1 s genau abgelesen werden.

In den folgenden Ausführungen werden zuerst die Instrumente und Beobachtungsverfahren, dann die praktische Berechnung und zuletzt die theoretischen Grundlagen und Überlegungen dargestellt. Dabei wird immer vorausgesetzt, daß die Messungen bei einer Sonnenhöhe von $\leq 60^g$ ausgeführt werden.

## 2. Messung

### *2.1 Instrumente*

Für die Beobachtungen eignen sich alle handelsüblichen Theodolite, die die geforderte Ablesegenauigkeit von $0{,}1^c$ zulassen. Zur Anzielung der Sonne braucht es grundsätzlich keine zusätzliche Ausrüstung, wie noch gezeigt werden soll. Jedoch ist die Anschaffung eines Sonnenfilters für wenige Franken empfehlenswert. Beim Kauf eines neuen Instrumentes sollte man ein Fadenkreuz mit den sogenannten Sonnenfäden verlangen. Die Firma Kern, Aarau, hat dem DKRT des Verfassers in zuvorkommender Weise nachträglich ein solches Fadenkreuz eingebaut, mit dem die Beobachtungen etwas vereinfacht werden.
Die Sonnenfäden sind zwei kleine seitliche Vertikalstriche symmetrisch zum Mittelfaden, deren Abstand etwas kleiner

als das Bild des Sonnendurchmessers ist (Abb. 1). Werden diese Fäden symmetrisch zu den beiden Sonnenrändern eingestellt, so ist der Mittelfaden nach dem Sonnenzentrum gerichtet. Noch besser wäre die Anschaffung eines Roelof-Prismas, auf dessen Verwendung der Kosten wegen verzichtet wurde.

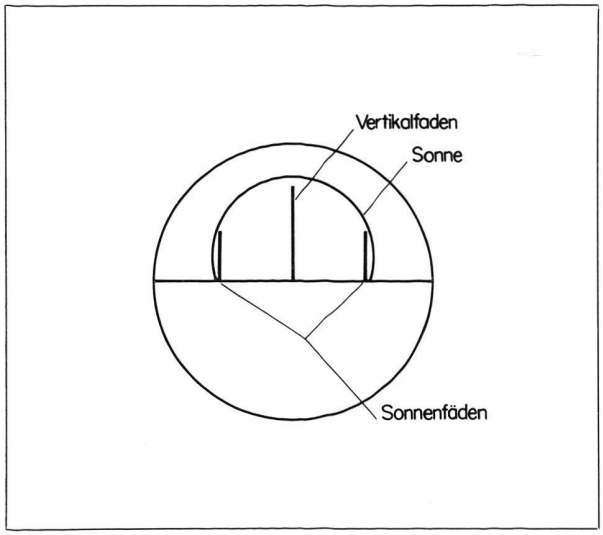


Abb. 1

Als Uhr genügt eine gute Armbanduhr, deren Zifferblatt in Mißachtung aller modischen Zutaten folgende Anforderungen erfüllt:

a) Auf der Minutenteilung müssen alle Teilstriche von Minute zu Minute aufgetragen sein.
b) Die Spitze des Sekundenzeigers aus der Mitte muß bis zum äußeren Rand der Teilung reichen.
c) Die Exzentrität der Teilung zum Drehpunkt des Sekundenzeigers darf $^1/_{10}$ des Intervalles nicht überschreiten.
d) Der Minutenzeiger soll über den ganzen Umfang stets den entsprechenden Teilstrich decken, wenn der Sekundenzeiger auf 12 Uhr zeigt.

Die Prüfung der Bedingung c) erfolgt am besten mit einem Polarkoordinatographen. Eine Exzentrizität des Minutenzeigers nach d) führt leicht zu groben Ablesefehlern von einer Minute.
Vor und nach jeder Azimutmessung wird die Uhr anhand des Sollwertes (Telephonzeit) geeicht. Eine beliebig dazwischenliegende, mit der linear interpolierten Uhrkorrektion verbesserte Ablesung darf maximal 0,2 s vom Sollwert abweichen. Da der Gang vieler Uhren im Laufe von 24 Stunden, namentlich zwischen Tag und Nacht, systematische Abweichungen zeigt, genügt es nicht, eine «genaue» Uhr, deren tägliche Abweichung klein ist, ohne Kontrolle zu verwenden.
Durch den wiederholten Vergleich mit der Telephonzeit über mehrere Stunden ist die zulässige Zeitspanne zwischen zwei Eichungen zu ermitteln, während der die Toleranz von 0,2 s eingehalten wird. Solange die Messungen in der Nähe eines Telephonanschlusses ausgeführt werden, wird praktisch jede Uhr genügen. Mit dem vom Verfasser benützten Chronometer HF von Girard-Perregaux mit einem mechanischen Werk genügt eine Abgleichung alle 12 Stunden.

Alle Uhrablesungen sind durch Schätzung auf 0,1 s genau vorzunehmen. Nach den Erfahrungen beträgt der mittlere Fehler einer Schätzung etwa 0,13 s.

### *2.2 Anzielung der Sonne*

Damit der Beobachter nicht von der Sonne geblendet wird, erfolgt die Grobzielung mit Hilfe des Schattenbildes auf dem Feldbuch. Die Neigung des Fernrohres wird so eingestellt, daß die Schatten des Objektives und Okulares über- oder untereinander zu liegen kommen. Nun wird die Alhidade gedreht, bis beide Schatten symmetrisch in der Vertikalen sind (Abb. 2).
Anschließend wird die Neigung geändert, bis die Projektion der Sonne als heller Fleck auf dem Feldbuch erscheint. Bei den weitern Anzielungen wird das Instrument anhand der Vertikalkreisablesung gerichtet.

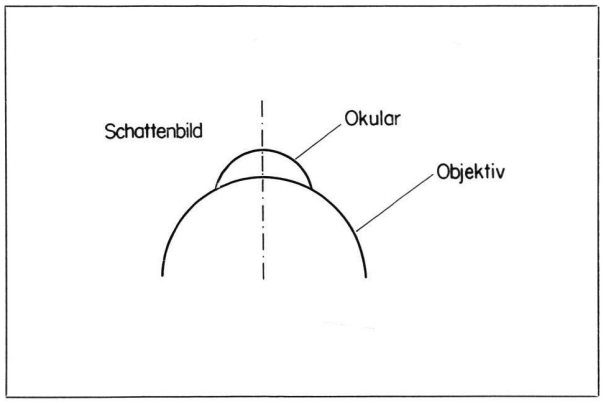


Abb. 2

Bei ganz klarem Wetter können die Zielungen direkt mit Hilfe der Projektion ausgeführt werden. Damit die Fäden auch außerhalb des Sonnenbildes sichtbar werden, muß als «Fadenkreuzbeleuchtung» seitlich ein Scotch-Klebeband vor das Objektiv geklebt werden (Abb. 3).
Dann wird das Okular auf etwa +6 Dioptrien verstellt und das Sonnenbild auf ein weißes oder graues Papier in etwa 15 cm Abstand vom Okular projiziert. Die Scharfstellung der Fäden erfolgt mit dem Okular und diejenige des Sonnenbildes mit der Fokussierung anhand von Sonnenflecken. Auf dem etwa 4 cm großen Sonnenbild kann der Zeitpunkt der Berührung des Sonnenrandes mit dem Vertikalfaden genau erfaßt werden.

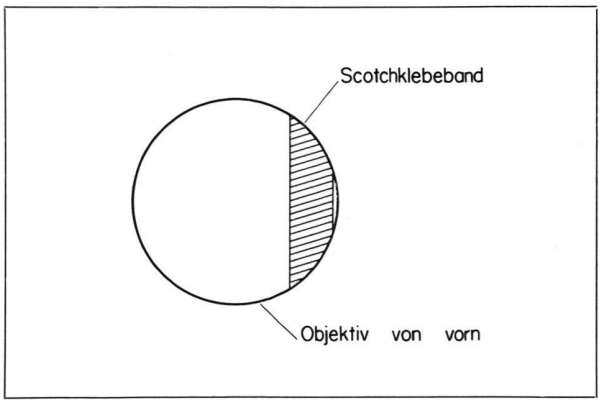


Abb. 3

Sofern ein Sonnenfilter vorhanden ist, wird dieser nach der Grobzielung aufgesetzt und direkt beobachtet. Damit kann ohne weitere Maßnahme auch bei verschleiertem Himmel gearbeitet werden.

### *2.3 Beobachtungen*

Nach der parallaxfreien Einstellung wird das Fadenkreuz etwas vor die sich bewegende Sonne gerichtet und dann der Zeitpunkt der Solleinstellung abgewartet. Auf den Befehl des Beobachters «Achtung-Top» schätzt der Schreiber die Zehntelssekunden und liest die Sekunden ab. Zugleich hält er mit der Bleistiftspitze die Lage des Sekundenzeigers auf dem Zifferblatt fest. Darauf liest er die Stunden und Minuten ab. Der Beobachter kontrolliert die Ablesung anhand der Bleistiftspitze auf grobe Fehler (5 oder 10 Sekunden-, Minuten- und Stundenfehler).

2.31 Beobachtung des Sonnenrandes
Sofern keine weiteren Hilfsmittel zur Verfügung stehen, werden beide Sonnenränder angezielt. Wegen der Reduktion auf das Sonnenzentrum muß folgende Anordnung eingehalten werden (siehe Abschnitt 4.32):

A) 1. Zielung: |⊖ Sonne läuft *in* den Faden

B) 2. Zielung: ⊖| Sonne läuft *vom* Faden

Die beiden Zielungen müssen innerhalb von 5 Minuten erfolgen. Die berechneten Azimute der beiden Zielungen können nicht ohne weiteres miteinander verglichen werden, da deren Differenz vom scheinbaren Sonnendurchmesser und der Sonnenhöhe abhängen.

2.32 Beobachtungen des Sonnenzentrums
Mit Hilfe der im Abschnitt 2.1 beschriebenen Sonnenfäden kann direkt die Richtung nach dem Sonnenzentrum abgelesen werden. Sofern 2 Zielungen innerhalb von 2 Minuten erfolgen, können sie in einer Berechnung zusammengefaßt werden.

### *2.4 Durchführung der Messung*

Da ein Fehler der Horizontierung bei einer Sonnenhöhe von $60^g$ mit dem 1,4fachen Betrag in das Azimut eingeht, muß diese sorgfältig ausgeführt und vor jeder Messung erneuert werden.

Der Ablauf ist folgender:
Uhrvergleich
Horizontierung des Instrumentes
1. Messung
  1. Lage: Richtung Anschlußzielpunkt $\varphi_1$
  1. Lage: 1. Zielung Sonne $\alpha_1$ (Zentrum oder Rand A)
    Zeitablesung $Z_1$
  2. Lage: 2. Zielung Sonne $\alpha_2$ (Zentrum oder Rand B)
    Zeitablesung $Z_2$
  2. Lage: Richtung Anschlußzielpunkt $\varphi_2$

Neue Horizontierung des Instrumentes, Kreisverstellung
2. Messung (analog der 1. Messung)

Neue Horizontierung des Instrumentes, Kreisverstellung
3. Messung (analog der 1. Messung)
usw.
Uhrvergleich

Bei der Zielung nach den Sonnenrändern sollten mindestens 2 Messungen zur Kontrolle ausgeführt werden, bei der Beobachtung des Sonnenzentrums genügt zum Erkennen von groben Ablesefehlern eine Messung.
Anstelle der Ablesungen einer Anschlußrichtung können mehrere Richtungen vor beziehungsweise nach der Sonnenbeobachtung analog der Satzmessung beobachtet werden.

## 3. Berechnung

Zur Berechnung der geographischen Koordinaten genügt es, die Landeskoordinaten aus der Karte auf etwa 25 m genau zu entnehmen. Daraus werden die Länge, Breite und Meridiankonvergenz berechnet. Die endgültigen Azimute werden im Projektionssystem angegeben.
Die Sonnenkoordinaten können jedem astronomischen Jahrbuch entnommen werden. Am besten bestellt man in einer Buchhandlung «The Star Almanac for land surveyers, London, Her Majesty's stationery office» im Abonnement, worauf dieser jeden Herbst für das kommende Jahr für wenige Franken zugestellt wird. Die benötigten Werte der Deklination (Dec.) und der Zeitgleichung ($E$) sind alle 6 Stunden tabelliert.
In der Berechnung wird neben dem Azimut auch dessen Ableitung nach der Zeit $da/dt$ bestimmt. Bei der Zusammenfassung der beiden Zielungen kann damit anstelle der genauen Mittelwerte der Zeit und Richtungen mit einer runden Zeit gerechnet und die Azimute der einzelnen Zielungen bestimmt werden. Damit können die Messungen separat beurteilt und grobe Fehler besser erkannt und eventuell korrigiert werden.
Mit der Uhrzeit $Z_0 \sim \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ wird das Sonnenazimut $a_0$ berechnet und auf die Uhrzeiten bei der Ablesung reduziert:

| Lage | Zielpunkt | Ablesung | Uhrzeit | Sonnenazimut | Azimut Anschlußzielpunkt |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $A$ | $\varphi_1$ | | | $\Phi_1$ |
| | $S$ | $\alpha_1$ | $Z_1$ | $a_0 - da/dt\ (Z_0 - Z_1)$ | |
| 2. | $S$ | $\alpha_2$ | $Z_2$ | $a_0 - da/dt\ (Z_0 - Z_2)$ | $\Phi_2$ |
| | $A$ | $\varphi_2$ | | | |

In den folgenden Definitionen sind die in der Programmierung verwendeten Einheiten anhand der beigefügten Zahlenwerte angegeben (Abb. 4):

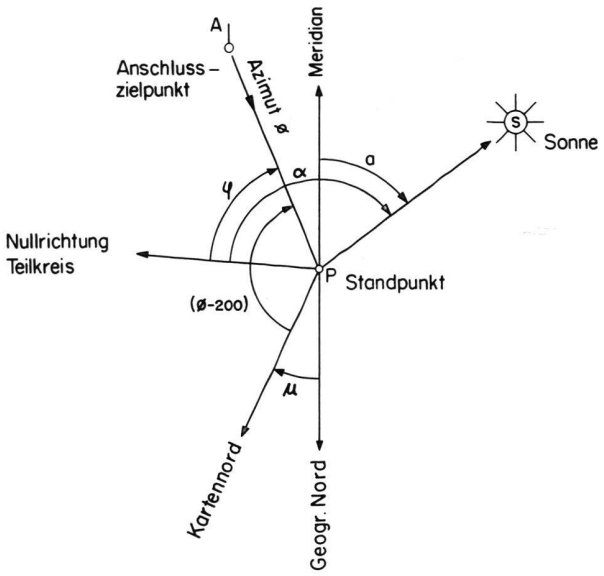


Abb. 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| *P* Standpunkt | | *a* Sonnenazimut | |
| *A* Anschlußzielpunkt | | $\mu$ Meridiankonvergenz | |
| *Y X* | Koordinaten des Standpunktes *P* | | $30^{km},95$ |
| $Z_n$ | Uhrablesung bei Zielung $\alpha_n$ | | $14^h41^m46^s,0$ |
| $Z_0 \sim [Z]/n$ | Gerundeter Wert der gemittelten Uhrzeit zur Berechnung | | $14^h43^m$ |
| MEZ | Mitteleuropäische Zeit (Sollwert) | | $14^h26^m00^s$ |
| $K = \text{MEZ} - Z$ | Uhrkorrektion im Zeitpunkt *Z* | | $-18^s,4$ |
| $K_0$ | Auf Zeitpunkt $Z_0$ interpol. Uhrkorr. | | $-18^s,57$ |
| $T_0 = Z_0$ | Auf MEZ korrigierte Zeit zur | | $14^h43^m$ |
| $+ K_0$ | Berechnung | | $-18^s,57$ |
| $\varphi_n$ | Ablesung Anschlußzielpunkt | | $354^g,499$ |
| $\alpha_n$ | Ablesung Sonne im Zeitpunkt $Z_n$ | | $37^g,388$ |
| $\Phi_n$ | Azimut Anschlußzielpunkt → Standpunkt (gemittelter Wert $\Phi_m$) | | $359^g,473$ |
| *E* | Zeitgleichung } a. d. Zeitpunkt $T_0$ | | $11^h51^m01^s,40$ |
| $\delta$ | Deklination } interpol. Tafelwerte | | $-2° -04',01$ |
| *t* | Stundenwinkel der Sonne | | $2^h,0848$ |
| *da/dt* | Änderung des Sonnenazimutes pro s | | $50^{cc},42$ |

Wie aus den Zahlenwerten hervorgeht, müssen bei sexagesimal unterteilten Zahlen (Zeit und Deklination) die einzelnen Werte nacheinander eingegeben werden. Bei einer südlichen Deklination ist zu beachten, daß das negative Vorzeichen bei beiden Werten (° und ′) eingegeben wird.
Die Interpolation der Deklination muß auf 0,01′ genau berechnet werden, damit keine zusätzlichen Rundungsfehler auftreten. Da mit mitteleuropäischer Zeit gearbeitet wird, werden bei der Interpolation von *E* und $\delta$ die Tafelwerte für die

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Welt-Zeiten | UT | 0, | 6, | 12, | $18^h$ |
| mit den Werten | MEZ | 1, | 7, | 13, | $19^h$ |

eingeführt.

Die praktische Berechnung wird zusammen mit den Messungen an zwei Beispielen gezeigt (Abb. 5). Beim ersten Beispiel wurden beide Sonnenränder angezielt. Da aus den Werten einer Messung nichts ausgesagt werden kann, müßte noch eine 2. Messung folgen. Im 2. Beispiel mit der Beobachtung nach dem Sonnenzentrum stimmen die Resultate der beiden Lagen gut überein, so daß wahrscheinlich keine groben Ablesefehler vorliegen.

*Sonnenazimutbestimmung*

Samstag, 15.3.1969

| | | | *y* | | *x* |
|---|---|---|---|---|---|
| Standpunkt | PP 52B | +30 | $953^m,13$ | −29 | $848^m,42$ |
| Anschlußzielpunkt | ♂ 10 | +31 | 467,89 | −30 | 553,06 |
| Azimut aus Koordinaten | | | $359^g,834$ | | |

| Tafelwerte | *UT* | | $\delta$ | *E* |
|---|---|---|---|---|
| Sa 15.3.1969 | $12^h$ | *S* | 2° 05′,7 | $11^h\ 51^m\ 00^s,2$ |
| | $18^h$ | | 1 59,8 | 51 04,4 |

| Uhrvergleich | Telephon | Uhrzeit | *K* |
|---|---|---|---|
| | $14^h\ 25^m\ 00^s$ | $14^h\ 25^m\ 18^s,3$ | |
| | 26 00 | 26 18,4 | $-18^s,4$ |
| | 15 24 00 | 15 24 18,9 | |
| | 24 00 | 25 19,0 | −19,0 |

| *Messung* | | | | *Berechnung* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lage | Zielpunkt | Uhrablesung *Z* | Richtung φ α | $Z_0$ $K_0$ *E* $\delta$ | *da/dt* $\Phi_1$ $\Phi_2$ $\Phi_m$ | |
| a) Sonnenrand | | | | | | |
| 1 | ♂ 10 | | 354g,499 | $14^h43^m00^s$ | $50^{cc},42$ | |
| 1 | *S* | $14^h41^m46^s,0$ | 37,388 | −18,57 | $359^g,473$ | $\Phi_2$ |
| 2 | *S* | 14 43 30,0 | 237,191 | 11 5101,40 | 360,194 | > $\Phi_1$ |
| 2 | ♂ 10 | | 154,499 | −1° −64′,01 | *359,833* | |
| b) Sonnenzentrum | | | | | | |
| 1 | ♂ 10 | | 395,314 | 15 20 00 | 45,71 | |
| 1 | *S* | 15 18 57,3 | 88,590 | −18,95 | 359,841 | |
| | | (Kreis verstellt) | | | | |
| 2 | *S* | 15 20 16,8 | 300,019 | 11 51 01,83 | 359,827 | |
| 2 | ♂ 10 | | 206,366 | −1 −63,41 | *359,834* | |

Abb. 5

In Abbildung 6 werden die Streifen der «Programma 101» von Olivetti gezeigt. Die Programmierung dürfte sich auf neueren Maschinen, der festverdrahteten Funktionsberechnungen wegen, noch etwas einfacher gestalten. Die Ein- und Ausgaben und damit die eigentliche Arbeit werden weitgehend dieselben bleiben. Die hier gezeigte Programmierung kann beim Verfasser bezogen werden.

Die Symbole bedeuten:

*i* ▼ Magnetkarte Nr. *i* eingeben
*V* Drücken Programmwahltaste *V*
→, *S* Eintasten eines Wertes
:, ◇ Maschine druckt den Wert

Bei der Interpolation werden beide Tafelwerte ($\delta$ und *E*) im gleichen Arbeitsgang berechnet. In einem zweiten Berechnungsgang wird die Uhrkorrektion interpoliert. In der Azimutberechnung wird am Schluß das gemittelte Resultat $\Phi_m$

Sonnenazimutberechnung

Interpolation

1. Tafelwerte

| | | | |
|---|---|---|---|
| ▼ V | | | V |
| $T_A$, h | → | 13 | S |
| m | → | 0 | S |
| $T_E$, h | → | 19 | S |
| m | → | 0 | S |
| $\delta_A$ | → | 65·7 | S |
| $\delta_E$ | → | 59·8 | S |
| $E_A$ | → | 0·2 | S |
| $E_E$ | → | 4·4 | S |
| $Z_0$, h | → | 14 | S |
| m | → | 43 | S |
| $\delta$ | : | 64·011946 | A0 |
| E | : | 1·401666 | A0 |
| $Z_0$, h | → | 15 | S |
| m | → | 20 | S |
| $\delta$ | : | 63·405557 | A0 |
| E | : | 1·833333 | A0 |

2. Uhrkorrektur

| | | | |
|---|---|---|---|
| V | | | V |
| $Z_A$, h | → | 14 | S |
| m | → | 26 | S |
| $Z_E$, h | → | 15 | S |
| m | → | 25 | S |
| $K_A$ | → | -18·4 | S |
| $K_E$ | → | -19·0 | S |
| Z | → | | Z |
| $Z_0$, h | → | 14 | S |
| m | → | 43 | S |
| $K_0$ | : | -18·572881 | A0 |
| $Z_0$, h | → | 15 | S |
| m | → | 20 | S |
| $K_0$ | : | -18·949152 | A0 |

Berechnung

| | | | Messung a) | | Messung b) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I▼,V | | | | V | | V |
| Y | | → | 30·95 | S | 30·95 | S |
| X | | → | -29·85 | S | -29·85 | S |
| 2▼,V | | | | V | | V |
| $T_0$=$Z_0$ | h | → | 14 | S | 15 | S |
| + | m | → | 43 | S | 20 | S |
| $K_0$ | s | → | -18·57 | S | -18·95 | S |
| E | h | → | 11 | S | 11 | S |
| | m | → | 51 | S | 51 | S |
| | s | → | 01·40 | S | 01·83 | S |
| $\delta$ | ° | → | -1 | S | -1 | S |
| | ' | → | -64·01 | S | -63·41 | S |
| r | | : | 2·084837 | A0 | 2·701517 | A0 |
| 3▼,V | | | | V | | V |
| da/dt | | : | 50·417161 | B0 | 45·711295 | B0 |
| 4▼,V | | | | V | | V |
| $Z_0$ | m | → | 43 | S | 20 | S |
| | s | → | 0 | S | 00 | S |
| $Z_1$ | m | → | 41 | S | 18 | S |
| | s | → | 46·0 | S | 57·3 | S |
| $\alpha_1$ | | → | 37·388 | S | 88·590 | S |
| $\mu_1$ | | → | 354·499 | S | 395·314 | S |
| $\Phi_1$ | | : | 359·472744 | A0 | 359·840895 | A0 |
| $Z_2$ | m | → | 43 | S | 20 | S |
| | s | → | 30·0 | S | 16·8 | S |
| $\alpha_2$ | | → | 237·191 | S | 300·019 | S |
| $\mu_2$ | | → | 154·499 | S | 206·366 | S |
| $\Phi_2$ | | : | 360·194082 | A0 | 359·827298 | A0 |
| Z | | | | Z | | Z |
| $\Phi$ | m | : | 359·833413 | c0 | 359·834096 | c0 |

Abb. 6

ausgedruckt. Bei der ersten Messung muß $\Phi_2 > \Phi_1$ sein, wenn die Sonnenränder in der richtigen Reihenfolge nach Abschnitt 2.31 beobachtet wurden.

Anmerkung:
Für genauere Azimutbestimmungen mit dem Polarstern wurden analoge Programme für die «Programma 101» geschaffen. Für die Grobzielung kann die genäherte Höhe vorausberechnet werden.
Das Programm der Sonnenazimutberechnung wurde für die Bestimmung von Schattendiagrammen, wie sie im Baurecht bei Sonderbauschriften verlangt werden, erweitert. Es dient so vor allem der Berechnung der beschränkten Besonnung in engen Gebirgstälern.

## 4. Formeln und Fehlerabschätzung

### *4.1 Astronomische Berechnungen*

Die Bezeichnungen beziehen sich auf den Abschnitt 3 und die Abbildung 4. Zusätzlich bedeuten

$z$ Zenitdistanz der Sonne
$p$ Winkel des nautischen Dreiecks an der Sonne
$\lambda$ Geographische Länge des Standpunktes
$\varphi$ Geographische Breite des Standpunktes

Aus Abbildung 4 ergibt sich

$$\mu + (\Phi - 200) - \varphi + \alpha - a = 200$$

und daraus

$$\Phi = (a - \mu) + (\varphi - \alpha) + 400 \tag{1}$$

Der Stundenwinkel der Sonne beträgt in Greenwich

$$t_0 = UT + E = (T - 1^h) + E$$

und im Standpunkt

$$t = t_0 + \lambda = (T - 1^h) + E + \lambda \tag{2}$$

Für die Berechnung des auf den Meridian bezogenen Sonnenazimutes erhalten wir aus den allgemein bekannten Grundformeln:

$$\begin{aligned} \sin z \sin a &= \cos\delta \sin t \\ \sin z \cos a &= \sin\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \sin\delta \\ \cos\delta \sin p &= \cos\varphi \sin a \end{aligned} \tag{3}$$

die Hilfsgrößen

$$A = \sin\varphi \cos t - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta = \sin z \cos a/\cos\delta \tag{4}$$

$$B = \sin t = \sin z \sin a/\cos\delta \tag{5}$$

$$C = +\sqrt{A^2 + B^2} = \sin z/\cos\delta \quad (\text{stets} > 0) \tag{6}$$

und damit

$$\sin a = B/C;\ \cos a = A/C \tag{7}$$

sowie

$$\sin z = C \cos\delta$$

Die Ableitung ergibt

$$da/dt = \cos\delta \cos p/\sin z = \cos p/C \quad (\text{stets} > 0)$$

und mit

$$\sin p = \sin a \cos\varphi/\cos\delta$$

wird

$$da/dt = +\,{}^1/C \sqrt{1 - \sin^2 a \cos^2\varphi/\cos^2\delta} \tag{8}$$

Bei der Programmierung kann mit den Werten (7) das Azimutprogramm des zur Verfügung stehenden Tischcomputers verwendet werden.

Innerhalb des Bereiches

$$-\,7^h 40^m \leq t \leq 7^h 40^m$$

beziehungsweise

$$-\,140^g \leq a \leq +\,140^g$$

muß die Programmierung vorzeichenrichtig und ohne Division durch Null arbeiten und dabei die Genauigkeit von $0{,}1^c$ ergeben.

Die für die Fehlerbetrachtung nötigen weiteren Differentialquotienten werden ohne Herleitung zusammengestellt:

$$d^2a/dt^2 = -\sin a \cos\varphi \left[\sin\varphi \operatorname{ctg} z + \frac{\cos\varphi \cos a}{\sin^2 z}(1 + \cos^2 z)\right] \tag{9}$$

$$da/d\delta = \sin p/\sin z = \frac{\sin a \cos\varphi}{\sin z \cos\delta} \tag{10}$$

$$da/d\varphi = -\sin a \operatorname{ctg} z \tag{11}$$

$$da/dp = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} p = \cos z + \operatorname{tg}\varphi \sin z/\cos a \tag{12}$$

*4.2 Umwandlung der Koordinaten*

Für die Berechnung von $\varphi$, $\lambda$ und $\mu$ aus den Koordinaten $y$ und $x$ wurden die Publikationen [2], [3] und [5] verwendet.

Die Breite $\varphi$ ergibt sich durch Einsetzen der Formel (60) von Rosenmund [5] in die inverse Reihe von (13) bis zu den Gliedern 4. Ordnung zu

$$\begin{aligned}\varphi = \varphi_0 &+ 3{,}238\,648\,777 \cdot 10^{-2}\; x \\ &- 2{,}713\,538\,1 \cdot 10^{-9}\; y^2 \\ &- 2{,}548\,682\,3 \cdot 10^{-11}\; x^2 \\ &- 1{,}324\,577\,5 \cdot 10^{-16}\; x^3 \\ &- 4{,}504\,442\,7 \cdot 10^{-16}\; y^2\, x \\ &- 7{,}553\,18 \cdot 10^{-23}\; y^2\, x^2 \\ &+ 2{,}442\,81 \cdot 10^{-23}\; y^4 \\ &+ 2{,}087\,92 \cdot 10^{-25}\; x^4\end{aligned}$$

Der maximale Betrag der Glieder 4. Ordnung ist für die ganze Schweiz kleiner als $0{,}2^{cc}$ und wird vernachlässigt.

Für die direkte Berechnung von $\cos\varphi$ ergibt die Taylorsche Reihe

$$\cos(\varphi_0 + h) = \cos\varphi_0 - h \cdot \sin\varphi_0 - h^2/2 \cdot \cos\varphi_0 + h^3/6 \cdot \sin\varphi_0 + \ldots$$

und für $x$ und $y$ in km mit

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 46^\circ\, 57'\, 08'',66 \\ \cos\varphi_0 &= 0{,}682\,605\,65 \\ \sin\varphi_0 &= 0{,}730\,786\,93\end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned}\cos\varphi = &+ 0{,}\,682\,605\,65 \\ &- 1{,}147\,438\,689 \cdot 10^{-4}\; x \\ &+ 9{,}613\,943\,4 \cdot 10^{-9}\; y^2 \\ &- 8{,}324\,288\,3 \cdot 10^{-9}\; x^2 \\ &+ 9{,}540\,069\,9 \cdot 10^{-13}\; x^3 \\ &+ 3{,}008\,904\,6 \cdot 10^{-12}\; y^2\, x\end{aligned}$$

Wird für die Programmierung

$$\cos\varphi = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$$

gesetzt, ergeben sich innerhalb der gewünschten Genauigkeit die Werte

$$\begin{aligned}f_0 &= +0{,}682\,606 \\ f_1 &= -{}^{x}/8715 \\ f_2 &= -{}^{f_1{}^2}/1{,}58 \\ f_3 &= -{}^{f_1{}^3}/1{,}58 \\ f_4 &= +({}^{y}/8715)^2/1{,}37 \\ f_5 &= -2 f_1\, ({}^{y}/8715)^2\end{aligned} \tag{13}$$

Für die Länge wird nach den Formeln 2.2 und 2.9 von [3] unter Vernachlässigung des weitern Gliedes 4. Ordnung $yx^3$:

$$\begin{aligned}\lambda^{\min} = &+ 29{,}758\,15 \\ &+ 5{,}255\,256 \cdot 10^{-2}\; y \\ &+ 8{,}806\,35 \cdot 10^{-6}\; y\; x \\ &- 4{,}919\,0 \cdot 10^{-10}\; y^3 \\ &+ 14{,}757\,0 \cdot 10^{-10}\; y\; x^2 \\ &- 2{,}833\,6 \cdot 10^{-13}\; y^3\, x\end{aligned}$$

und mit

$$\lambda^{\min} = l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$$

ergibt sich für die Programmierung

$$\begin{aligned}l_0 &= +29{,}758 \\ l_1 &= +y/19{,}0286 \\ l_2 &= +l_1 x/5968 \\ l_3 &= +l_2 x/5968 \\ l_4 &= -l_1\,(y/5968)^2/3 \\ l_5 &= -l_2\,(y/5968)^2\end{aligned} \tag{14}$$

Zur Berechnung von $\mu$ werden die Formeln 4.4 von [2] benützt. Der maximale Einfluß des weggelassenen Gliedes 4. Ordnung $yx^3$ beträgt für die ganze Schweiz weniger als $0{,}2^{cc}$.

$$\begin{aligned}\mu^g = &+ 1{,}066\,798 \cdot 10^{-2}\; y \\ &+ 1{,}787\,657 \cdot 10^{-6}\; y\; x \\ &- 1{,}435\,506 \cdot 10^{-10}\; y^3 \\ &+ 4{,}306\,51 \cdot 10^{-10}\; y\; x^2 \\ &- 7{,}948\,9 \cdot 10^{-14}\; y^3\, x\end{aligned}$$

Mit

$$\mu^g = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$$

und den Werten nach (14) wird

$$\begin{aligned}m_1 + m_2 &= {}^{(l_1+l_2)}/4{,}9262 \\ m_3 + m_4 + m_5 &= {}^{(l_3+l_4+l_5)}/3{,}43\end{aligned} \tag{15}$$

Mit den numerischen Werten nach (13), (14) und (15) war es möglich, die ganze Umformung mit einer Magnetkarteneingabe auf der «Programma 101» zu programmieren. Wird mit 7 Dezimalstellen gerechnet, betragen die maximalen Fehler innerhalb der ganzen Schweiz

$$\begin{aligned}\text{für } \cos\varphi &\leq 6 \cdot 10^{-7} \\ \lambda &\leq 0{,}03\ \text{s} \\ \mu &\leq 0{,}2^{cc}\end{aligned}$$

Die damit erreichte Genauigkeit genügt auch für die Berechnung von Polaris-Azimuten.

Anmerkung:
Die für die Programmierung verwendete Übereinstimmung der Zahlenwerte der Formeln (13), (14) und (15) ist nur zum Teil auf die innerhalb der Genauigkeit zulässige Zusammenfassungen zurückzuführen. Aus den Formeln (61) und (65) von Rosenmund [5] können zum Beispiel folgende Beziehungen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}l_2/l_1 &= l_3/l_2 = x/R \cdot \mathrm{tg}\, b_0 = x/5967{,}57 \\ m_1/l_1 &= m_2/l_2 = \alpha \cdot \varrho^g/\varrho^m \cdot \sin b_0 = l/4{,}92620 \\ m_3/l_3 &= m_4/l_4 = \alpha \cdot \varrho^g/\varrho^m\, (\sin b_0 + \cos b_0/2\, \mathrm{tg}\, b_0) \\ &= l/3{,}42666\end{aligned}$$

*4.3 Reduktion der Messungen*

4.31 Beobachtung des Sonnenzentrums
Die Taylor-Entwicklung ergibt für die Reduktion vom Zeitpunkt $Z_0$ auf den Zeitpunkt $Z$

$$\begin{aligned}\Delta t &= Z_0 - Z \\ a &= a_0 - \Delta t \cdot da/dt + \Delta t^2/\,2 \cdot d^2a/dt^2 + \cdots\end{aligned}$$

Bei der Bildung der genauen Mittelwerte aus $n$ Messungen oder der Berücksichtigung des Gliedes $-\Delta t \cdot da/dt$ nach Abschnitt 3 wird der Fehler am Mittel

$$f_{a\,\text{Zentrum}} = [\Delta t^2]/2\, n \cdot d^2a/dt^2 + \cdots \tag{16}$$

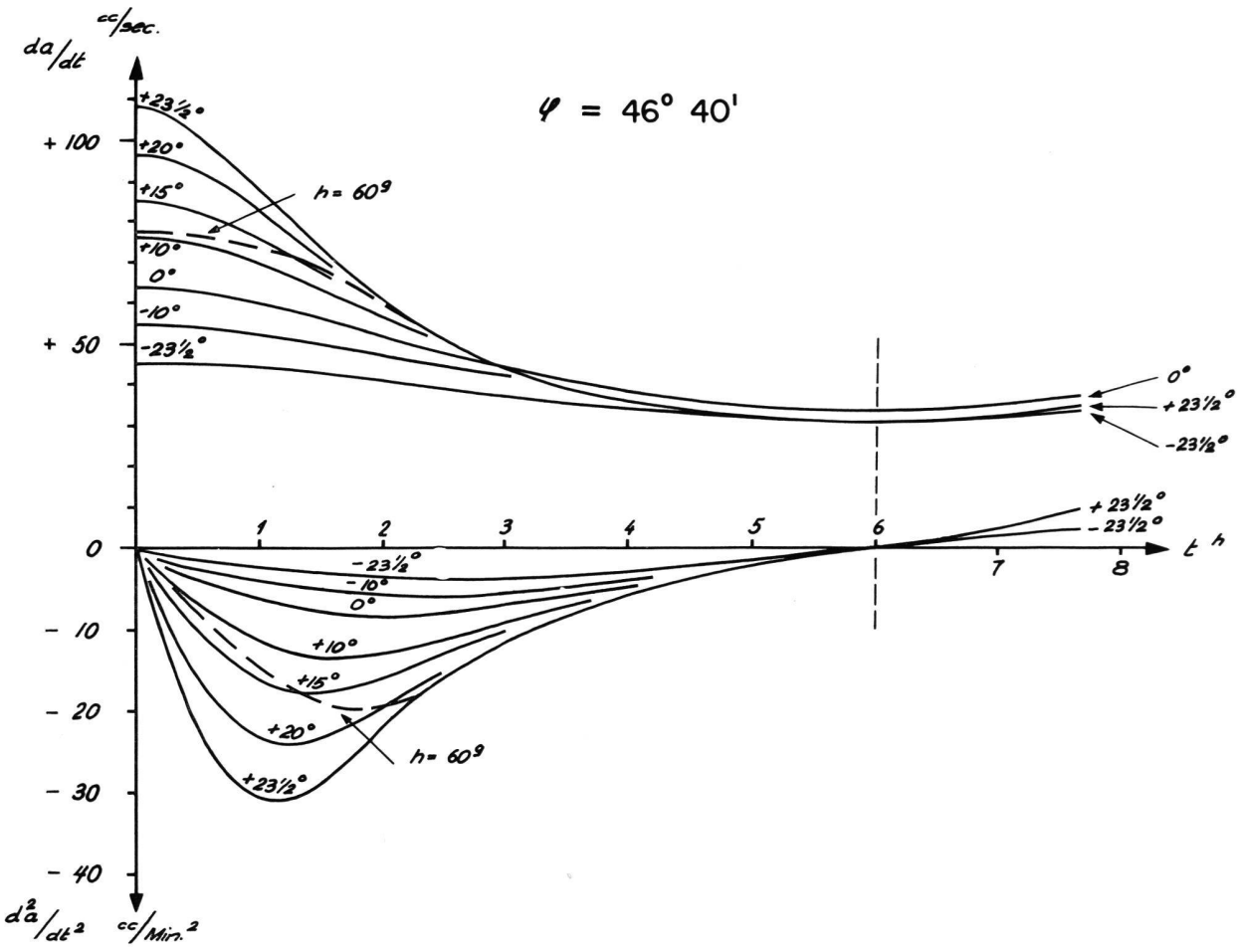


Abb. 7

Die Werte für die 2. Ableitung $d^2a/dt^2$ sind in der Abbildung 7 dargestellt. Wird die Beobachtung gemäß Abschnitt 1 auf eine Sonnenhöhe kleiner als $60^g$ eingeschränkt, beträgt der maximale Wert $\pm 20^{cc}/_{min^2}$ (für $\delta = 20°$ und $t = \pm 2^h$). Unter der Annahme, daß 2 Zielungen innerhalb von 2 Minuten erfolgen (Abschnitt 2.32) und $Z_0$ maximal $\frac{1}{2}$ Minute vom Mittelwert abweicht (Abschnitt 3) wird im Maximum

$\Delta t_1 = 1{,}5$ min $\qquad \Delta t_2 = 0{,}5$ min
$[\Delta t^2]/4 = 0{,}6$

und

$f_{a\,Z\,max.} = \pm 0{,}6 \cdot 20^{cc} = \pm 12^{cc}$

Wird die Zeit von 2 Minuten überschritten, muß jede Messung für sich berechnet werden.

### 4.32 Zielung nach dem Sonnenrand

Der Reduktion $\varepsilon$ vom Sonnenrand $R$ auf das Sonnenzentrum $S$ entspricht für den scheinbaren Sonnenradius $r$ eine Korrektur am Stundenwinkel $\tau$ (Abb. 8).

Da $r$ ein kleiner Winkel ist, ergibt sich aus dem Dreieck $PRS$.

$\tau = r \cos p / \cos \delta$

Mit dem Wert $r \sim 16{,}5'$ wird bei $\delta = 20°$ und

$t = \pm 2^h \qquad (d^2a/dt^2 = \text{max.})$

$\tau = \pm 1{,}3$ min

Damit wird die Reduktion

$\varepsilon = -\tau \cdot da/dt + \tau^2/2 \cdot d^2a/dt^2 + \ldots$

Werden die Zielungen beider Sonnenränder zusammengefaßt, ergibt sich als Fehler am Mittel mit Formel (16)

$$f_{a\,\text{Rand}} = [(\Delta t \pm \tau)^2]/4 \cdot d^2a/dt^2 + \ldots \qquad (17)$$

Wird die im Abschnitt 2.31 vorgeschriebene Reihenfolge der Zielungen eingehalten, ergeben sich die Maximalwerte

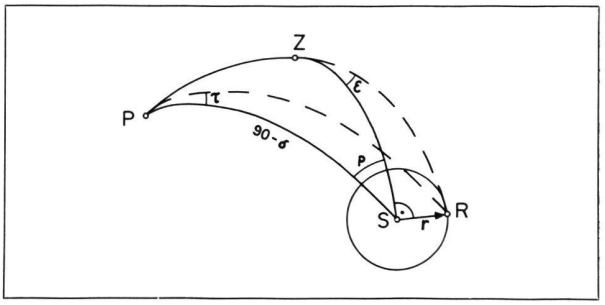


Abb. 8

$\Delta t'_1 = 3 - 1{,}3 = 1{,}7$ min, $\Delta t'_2 = 2 - 1{,}3 = 0{,}7$ min
$[(\Delta t')^2]/4 = 0{,}55$

und

$f_{a\,R\,\max.} = \pm 0{,}55 \cdot 20^{cc} = \pm 11^{cc}$

Sofern beide Zielungen nicht innerhalb von 5 Minuten liegen, muß die Reduktion unter Berücksichtigung der Änderung der Sonnenhöhe erfolgen.

Anmerkung:
Würden die Zielungen in der falschen Reihenfolge innerhalb von 2 Minuten durchgeführt, ergäbe sich der maximale Fehler zu:

$\Delta t'_1 = 1{,}5 + 1{,}3 = 2{,}8$ min,

$\Delta t'_2 = 0{,}5 + 1{,}3 = 1{,}8$ min

$[(\Delta t')^2]/4 = 2{,}8$

und

$f_{a\,R\,\max.} = \pm 2{,}8 \cdot 20^{cc} = \pm 56^{cc}$

### *4.4 Fehlerbetrachtungen*

Die numerischen Werte der Differentialquotienten $da/dt$ und $da/d\varphi$ sind in der Arbeit [4] als Graphiken enthalten. In Abbildung 7 des vorliegenden Artikels sind die wichtigen Werte $da/dt$ und $d^2a/dt^2$ (9) in Funktion von $\delta$ und $t$ dargestellt. Gestrichelt ist die Kurve für h = $60^g$ eingetragen, der die zulässigen Beobachtungszeiten gemäß Abschnitt 1 entnommen werden können.

Für h $\leq 60^g$ betragen die maximalen Werte

$da/dt = +80^{cc}/s$

$da/d\delta = \pm 1{,}2$

$da/d\varphi = \pm 1{,}3$

In der folgenden Zusammenstellung sind die Werte der geschätzten mittleren Fehler für das Mittel einer Messung in beiden Lagen und deren maximaler Einfluß auf das Azimut angegeben.

4.41 Beobachtungsfehler
Unter den eigentlichen Beobachtungsfehlern sollen diejenigen zufälligen Fehler, deren mittlerer Wert bei der Mittelbildung von unmittelbar folgenden Wiederholungen mit $\sqrt{n}$ abnimmt, verstanden werden.

| Fehler | Mittlerer Wert | Mittlerer Azimutfehler |
|---|---|---|
| Uhrablesung bei Zielung nach der Sonne inkl. Zielfehler | $\pm 0{,}3$ s | $\pm 24^{cc}$ |
| Stehachsenschiefe | $\pm$ 1/4 Pars $= \pm 23^{cc}$ | $\pm 32^{cc}$ |
| Richtung Anschlußzielpunkt | | $\pm 10^{cc}$ |
| Zusammengenommen ergibt das für 1 Messung $m_B = \pm 41^{cc}$ und für 2 Messungen $m_{B2} = \pm 29^{cc}$ | | |

4.42 Systematische Fehler
Die mit *) bezeichneten Werte können durch symmetrisch zum Meridiandurchgang der Sonne angeordnete Messungen eliminiert werden, da die betreffenden Differentialquotienten das Vorzeichen wechseln.

| Fehler | Mittlerer Wert | Mittlerer Azimutfehler | |
|---|---|---|---|
| Koordinaten des Standpunktes | $\pm 25$ m | aus $\mu$ und $\lambda$ | $\pm 8^{cc}$ |
| | | aus $\varphi$ | $\pm 4^{cc}$*) |
| Umrechnung auf geographische Koordinaten | | aus $\mu$ und $\lambda$ | $\pm 2^{cc}$ |
| | | aus $\varphi$ | $\pm 3^{cc}$*) |
| Tafelwerte $\delta$ | $\pm 0{,}05'$ | | $\pm 11^{cc}$*) |
| $E$ | $\pm 0{,}05$ s | | $\pm 4^{cc}$ |
| Uhrkorrektion | | $\pm 0{,}2$ s | $\pm 16^{cc}$ |
| Reduktion auf Mittelwert (Abschnitt 4.3) | | | $\pm 12^{cc}$*) |
| Rechnungsungenauigkeit | | | $\pm 10^{cc}$*) |

Werden diese Werte nach dem Gaußschen Gesetz in Ermangelung eines besseren Verfahrens quadratisch addiert, ergibt sich

$m_s = 27^{cc}$

und mit $m_{B2}$ ein mittlerer Gesamtfehler eines Azimutes aus 2 Messungen in je 2 Lagen von

$m_2 = \pm 40^{cc}$

Den größten Anteil trägt der mittlere Horizontierungsfehler bei, der mit der Sonnenhöhe rasch abnimmt, so daß $0{,}4^c$ den maximalen mittleren Fehler darstellen wird.
Die Messungen nach Abbildung 9 wurden bei der maximalen Deklination (25.6.1968, $\delta = 23° 23'$) durch einen Zeichner als Beobachter und einen Lehrling als Schreiber mit einem normalen Sekundentheodolit (DKM2) ausgeführt. Beobachtet wurden die Sonnenränder mit Hilfe der Projektion (Abschnitte 2.2 und 2.31). Die angegebenen Azimute sind die Mittel einer Messung in beiden Lagen. Die Messungen wurden absichtlich bei einer Sonnenhöhe von $67^g$ begonnen und über den ganzen Nachmittag verteilt, um sie auf systematische Abweichungen zu kontrollieren. Die erreichten mittleren Fehler bestätigen die vorgehende Fehlerabschätzung.

Abb. 9

| $Z$ | $t$ | h | $da/dt$ cc/s | Azimut | $v$ | $vv$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $14^h00^m$ | $1^h{,}532$ | $67^g{,}0$ | 72,15 | $60^g{,}837$ | 0 | 0 |
| 14 30 | 2,015 | 62,7 | 60,00 | 60,839 | −2 | 4 |
| 15 00 | 2,498 | 58,0 | 50,75 | 65,841 | −4 | 16 |
| 16 15 | 3,731 | 44,3 | 37,20 | 60,830 | +7 | 49 |
| 17 10 | 4,631 | 34,0 | 32,86 | 60,836 | +1 | 1 |
| 17 50 | 5,348 | 26,0 | 31,32 | 60,837 | 0 | 0 |
| | | | | $60{,}837^3$ | +2 | 70 |
| | Azimut aus Koordinaten | | | $60{,}838^8$ | | |

| | |
|---|---|
| Mittlerer Fehler einer Messung in beiden Lagen | $m = 0{,}38^c$ |
| Mittlerer Fehler am Mittel von 2 Messungen | $m_2 = 0{,}27^c$ |
| Mittlerer Fehler am Mittel aller Messungen | $M = 0{,}15^c$ |

*Literatur*


[1] *Th. Albrecht:* Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. 3. Auflage, Leipzig 1894.
[2] *W. K. Bachmann:* Utilisation du théodolite à bussole pour la polygonation. Bulletin Technique de la Suisse romande, Lausanne, 27. November 1954.
[3] *P. Howald:* Formules simplifiées pour le calcul de la latitude et de la longitude. Bulletin Technique de la Suisse romande, Lausanne, 2. April 1955.
[4] *P. Howald:* Etude sur la détermination astronomique de l'azimut du soleil. Bulletin Technique de la Suisse romande, Lausanne, 30. April 1955.
[5] *M. Rosenmund:* Die Änderung des Projektionssystems der Schweizerischen Landesvermessung, Bern 1903.