

Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 70-F (1972)

Heft: 4

Artikel: Der Einfluss der Lotabweichungen auf Raumnetze

Autor: Ramsayer, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-225008>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der Einfluß der Lotabweichungen auf Raumnetze

Von K. Ramsayer

Zusammenfassung

Zur Untersuchung des Einflusses der Lotabweichungen auf ein Raumnetz wurden die Testnetze Heerbrugg (H) im Alpenvorland und Stuttgart (S) im Hügelland dreidimensional mit und ohne Berücksichtigung astronomischer Beobachtungen ausgeglichen. Wie zu erwarten, macht sich der Einfluß hauptsächlich bei der Höhenbestimmung bemerkbar. Die Höhen ohne Berücksichtigung der Lotabweichungen, die sich, wie gezeigt wird, genähert auf die mittlere Niveaufläche innerhalb des Netzes beziehen, weichen von den strengen ellipsoidischen Höhen bis zu 29 cm (H) beziehungsweise 5 cm (S) ab. Die Lageverschiebung beträgt bis zu 5 cm (H) beziehungsweise 3 cm (S). Die aus den ausgeglichenen Koordinaten berechneten Raumstrecken ändern sich um maximal 7 cm (H) beziehungsweise 1 cm (S). Im Gebirge müssen deshalb bei hohen Genauigkeitsansprüchen die strengen Verfahren der dreidimensionalen Geodäsie angewendet werden. Auch im Flach- und Hügelland gewährleisten sie die absolute Orientierung und die geometrisch einwandfreie Höhenübertragung insbesondere auf große Entfernung.

Résumé

Pour étudier l'influence des déviations de la verticale sur un réseau spatial on a compensé les réseaux d'épreuve de Heerbrugg (H) situé dans une zone au nord des alpes et de Stuttgart (S), situé dans la zone d'un plateau avec et sans introduire les observations astronomiques. Comme c'était à prévoir, l'influence s'est manifestée en première ligne dans la détermination des altitudes. Ces altitudes calculées sans introduction des déviations de la verticale et qui – ce que sera montré – se réfèrent environ à la surface de niveau moyenne du réseau, diffèrent des altitudes ellipsoïdiques jusqu'à 29 cm (H) respectivement 5 cm (S). Le déplacement le plus grand de la situation est de 5 cm (H) et de 3 cm (S). Les distances spatiales calculées des coordonnées compensées changent jusqu'à 7 cm (H) respectivement 1 cm (S). Il faut appliquer par conséquent en montagne les procédés strictes de la géodésie tridimensionnelle pour satisfaire à de hautes exigences de précision. Dans les plaines et un des terrains coupés de collines ils garantissent une orientation absolue et une détermination des altitudes qui est du point de vue géométrique juste et cela en particulier pour les grandes distances.

Summary

To investigate the influence of the deflections of the vertical to a spatial network the test nets Heerbrugg (H) at the border of the Alps and Stuttgart (S) in a hilly country were adjusted three-dimensionally with and without consideration of the deflections of the vertical. As to be expected, the deflections of the vertical influence especially the determination of altitudes. The altitudes without taking into account deflections of the vertical, which, as it is shown, refer approximately to the mean level surface of the network, deviate from the rigorous ellipsoidal heights up to 29 cm (H) respectively 5 cm (S). The maximum deviation in horizontal position is 5 cm (H) respectively 3 cm (S). The slope distances computed with the adjusted coordinates are changing up to 7 cm (H) respectively 1 cm (S). Hence in mountainous areas the rigorous methods of threedimensional geodesy have to be applied, if high accuracy is required. In flat or hilly areas these methods guarantee too the absolute orientation and the geometrically rigorous transfer of altitudes, especially over large distances.

1. Einleitung

In den letzten Jahren wurde durch mehrere Testmessungen und -berechnungen nachgewiesen, daß eine strenge und hochgenaue Bestimmung der Raumkoordinaten und der absoluten Orientierung von dreidimensionalen Netzen und Polygonzügen auch ohne Beobachtung von Satelliten oder künstlichen Hochzielen mit einem vertretbaren Meß- und Rechenaufwand praktisch durchführbar ist [1], [2], [3]. Hieraus ergibt sich die Frage, inwieweit sich die streng ermittelten Koordinaten und ausgeglichenen Größen von den entsprechenden Größen, die konventionell unter Vernachlässigung der Lotabweichungen bestimmt wurden, unterscheiden. Zur Beantwortung dieser Frage wird nach Diskussion der bekannten Einflüsse auf Höhenwinkel und horizontale Richtungen der Einfluß der Lotabweichungen in einem Raumnetz im Alpenvorland bei Heerbrugg und in einem Netz im Stuttgarter Hügelland untersucht.

2. Einfluß der Lotabweichungen auf Höhen- und Horizontalwinkelmessungen

Die Meßwerte der Höhenwinkel β , der astronomischen Azimute A^* und der horizontalen Richtungen α beziehen sich auf die wahre Lotrichtung im Beobachtungsort. Diese Lotrichtungen weichen, wenn wir ein beliebiges ellipsoidisches Referenzsystem einführen, von den Ellipsoidnormalen um die Lotabweichungen ab. Bezeichnen wir die Komponente der Lotabweichung in Meridianrichtung mit ξ und die Komponente im ersten Vertikal mit η , so können die Reduktionen der Meßwerte β und A^* auf die Ellipsoidnormale berechnet werden aus

$$\Delta\beta = -\xi \cdot \cos A - \eta \cdot \sin A, \quad (1)$$

$$\Delta A = \eta \cdot \tan \varphi + (\xi \cdot \sin A - \eta \cdot \cos A) \cdot \tan \beta, \quad (2)$$

wobei φ der geographischen Breite und A dem ellipsoidischen Azimut der Zielung entsprechen.

Gleichung (2) gilt auch für die Reduktion einer horizontalen Richtung α . Das Hauptglied $\eta \cdot \tan \varphi$ bewirkt eine konstante Verdrehung des horizontalen Richtungssatzes und hat deshalb auf die Horizontalwinkel keinen Einfluß. Die Reduktion

$$\Delta(\alpha_2 - \alpha_1) = (\xi \cdot \sin A_2 - \eta \cdot \cos A_2) \cdot \tan \beta_2 - (\xi \cdot \sin A_1 - \eta \cdot \cos A_1) \cdot \tan \beta_1 \quad (3)$$

eines beliebigen Horizontalwinkels $(\alpha_2 - \alpha_1)$ kann im Gebirge ins Gewicht fallende größere Beträge annehmen, da dort große Werte für ξ , η und β auftreten können. Im Hügelland und erst recht im Flachland sind ξ , η und β in der Regel so klein, daß die Richtungsreduktionen auf die Ellipsoidnormalen keinen wesentlichen Einfluß auf die Punktbestimmungen haben.

Der durch Gleichung (1) beschriebene Einfluß der Lotabweichung auf die Höhenwinkelmessung entspricht der jeweiligen Komponente der Lotabweichung in Zielrichtung. Er kann im Gebirge mehrere Zehnersekunden betragen. Im Hügelland können Lotabweichungen bis etwa $10''$ auftreten. Auch im Flachland kann der Einfluß der Lotabweichungen größer sein als die Fehler der Höhenwinkelmessungen.

Die Messungen von Raumstrecken sind von den Lotabweichungen völlig unabhängig. Ein Raumnetz, das in allen drei Dimensionen etwa dieselbe Ausdehnung hat, kann deshalb, wenn wir von der Orientierung absehen, unbeeinflußt durch die vorhandenen Lotabweichungen, streng aus Streckenmessungen allein bestimmt werden. In der Regel wird jedoch die Höhenausdehnung wesentlich kleiner sein als die horizontale Ausdehnung, so daß für die Höhenübertragung zusätzliche Messungen, zum Beispiel von den Lotabweichungen beeinflußte Höhenwinkelmessungen, erforderlich werden.

Aus den bisherigen Ausführungen folgt, daß sich die Lotabweichungen hauptsächlich auf die Höhenbestimmung auswirken. Auf die Lagebestimmung ist ihr Einfluß im Flach- und Hügelland gering. Im Gebirge sind bei Lagebestimmungen durch Triangulation störende Verschiebungen zu erwarten. Diese lassen sich vermutlich wesentlich verkleinern, wenn an Stelle von Horizontalwinkeln Strecken gemessen werden.

3. Fehlergleichungen für ein Raumnetz ohne astronomische Beobachtungen in einem ellipsoidischen Bezugssystem

Wird ein Raumnetz ohne astronomische Beobachtungen berechnet, so werden bei der Ausgleichung die durch die Meßfehler und die durch die Vernachlässigung der Lotabweichungen verursachten Widersprüche beseitigt. Zur Erfassung des Einflusses der Lotabweichungen müssen diese bekannt sein, das heißt, im Netz müssen ausreichend viele astronomische Beobachtungen durchgeführt werden, so daß eine strenge dreidimensionale Ausgleichung möglich ist. Wird dann die Ausgleichung ohne Berücksichtigung der astronomischen Beobachtungen unter Beibehaltung der Koordinaten eines Punktes und eines Azimuts unter sonst gleichen Voraussetzungen wiederholt, so entsprechen die Differenzen zwischen den beiden Ausgleichungen dem Einfluß der Lotabweichungen.

Die Ausgleichungen können in einem ellipsoidischen, geozentrischen oder lokalen kartesischen Koordinatensystem durchgeführt werden. Die Ergebnisse sind völlig gleichwertig, da die Koordinaten in einem beliebigen System streng in die Koordinaten der anderen Systeme umgerechnet werden können. Für den vorliegenden Fall empfiehlt sich die Verwendung eines ellipsoidischen oder – für kleinere Netze – eines lokalen Bezugssystems, da dann der unterschiedliche Einfluß der Lotabweichungen auf die Lage- und Höhenbestimmung sofort erkennbar ist.

Nachstehend werden als Beispiel die Fehlergleichungen für die Ausgleichung eines Raumnetzes ohne astronomische Beobachtungen in einem ellipsoidischen Bezugssystem zusammengestellt. Sie ergeben sich aus den Fehlergleichungen für die strenge Ausgleichung, wenn der Einfluß der astronomischen Beobachtungen vernachlässigt wird. Das heißt,

die Fehlergleichungen für die astronomischen Größen (Breite φ , Länge λ und Azimut A^*) entfallen, und in den übrigen Gleichungen sind anstelle von φ und λ die ellipsoidischen Werte (Breite B und Länge L) zu setzen. Aus den in [4] und [7] angegebenen Fehlergleichungen erhalten wir in der Schreibweise nach [2], wenn wir die ellipsoidischen Koordinaten mit B, L, H bezeichnen und statt der Unbekannten dB und dL die Hilfsgrößen

$$d\xi = \frac{M + H}{\varrho} \cdot dB \text{ und } d\eta = \frac{(N + H) \cdot \cos B}{\varrho} \cdot dL \quad (3.1)$$

mit M = Meridiankrümmungsradius, N = Querkrümmungsradius des Ellipsoids und $\varrho = 206\ 265''$ einführen, folgende Fehlergleichungen:

a) Räumliche Strecken \bar{d} :

$$\begin{aligned} v_{\bar{d}_{ik}} = & -\cos \beta_{ik} \cdot \cos A_{ik} \cdot d\xi_i - \cos \beta_{ik} \cdot \sin A_{ik} \cdot d\eta_i \\ & -\sin \beta_{ik} \cdot dH_i - \cos \beta_{ki} \cdot \cos A_{ki} \cdot d\xi_k \\ & -\cos \beta_{ki} \cdot \sin A_{ki} \cdot d\eta_k - \sin \beta_{ki} \cdot dH_k \\ & -(d_{ik} - \bar{d}_{ik0}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für kürzere Strecken gilt nach [2] ausreichend genau

$$\begin{aligned} v_{\bar{d}_{ki}} = & \cos \beta_{ik} \cdot \cos A_{ik} (d\xi_k - d\xi_i) \\ & + \cos \beta_{ik} \cdot \sin A_{ik} (d\eta_k - d\eta_i) \\ & + \sin \beta_{ik} (dH_k - dH_i) - (d_{ik} - \bar{d}_{ik0}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Zur Berechnung von \bar{d}_{ik0} sind die Näherungscoordinaten B_{i0}, L_{i0}, H_{i0} und B_{k0}, L_{k0}, H_{k0} von P_i und P_k zunächst in geozentrische Koordinaten X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0} und X_{k0}, Y_{k0}, Z_{k0} umzurechnen. \bar{d}_{ik0} ergibt sich dann aus

$$\bar{d}_{ik0}^2 = (X_{k0} - X_{i0})^2 + (Y_{k0} - Y_{i0})^2 + (Z_{k0} - Z_{i0})^2. \quad (3.4)$$

b) Horizontale Richtungen α :

$$\begin{aligned} v_{\alpha_{ik}} = & +\varrho \frac{\sin A_{ik}}{\bar{d}_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} \cdot d\xi_i - \varrho \frac{\cos A_{ik}}{\bar{d}_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} \cdot d\eta_i \\ & - \varrho \frac{\sin A_{ik}}{\bar{d}_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} [\cos(B_k - B_i) + \\ & \sin B_k \cdot \sin(L_k - L_i) \cdot \cotan A_{ik}] \cdot d\xi_k \\ & + \varrho \frac{\cos A_{ik}}{\bar{d}_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} [\cos(L_k - L_i) + \\ & \sin B_i \cdot \sin(L_k - L_i) \cdot \tan A_{ik}] \cdot d\eta_k \\ & + \varrho \frac{\cos A_{ik} \cdot \cos B_k}{\bar{d}_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} [\sin(L_k - L_i) + \\ & \sin B_i \cdot \cos(L_k - L_i) - \tan B_k \cdot \cos B_i] \cdot dH_k \\ & - dw_i - (\omega_{i0} + \alpha_{ik} - A_{ik0}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\omega_i = \omega_{i0} + dw_i$ = Orientierungsunbekannte,

$$\begin{aligned} \tan A_{ik0} = & \frac{(Y_{k0} - Y_{i0}) \cdot \cos L_{i0} - (X_{k0} - X_{i0}) \cdot \sin L_{i0}}{(Z_{k0} - Z_{i0}) \cdot \cos B_{i0} - (X_{k0} - X_{i0})} \\ & \frac{(Y_{k0} - Y_{i0}) \cdot \cos L_{i0} - (X_{k0} - X_{i0}) \cdot \sin L_{i0}}{-X_{i0} \cdot \sin B_{i0} \cdot \cos L_{i0} -} \\ & \frac{(Y_{k0} - Y_{i0}) \cdot \cos L_{i0} - (X_{k0} - X_{i0}) \cdot \sin L_{i0}}{-(Y_{k0} - Y_{i0}) \cdot \sin B_{i0} \cdot \sin L_{i0}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Für kurze Strecken gilt ausreichend genau

$$v_{\alpha_{ik}} = -\varrho \frac{\sin A_{ik}}{d_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} (d\xi_k - d\xi_i) + \varrho \frac{\cos A_{ik}}{d_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} (d\lambda_k - d\lambda_i) - dw_i - (\omega_{i0} + \alpha_{ik} - A_{ik0}). \quad (3.5a)$$

c) Höhenwinkel β :

$$\begin{aligned} v_{\beta_{ik}} &= \varrho \frac{\sin \beta_{ik} \cdot \cos A_{ik}}{d_{ik}} \cdot d\xi_i + \varrho \frac{\sin \beta_{ik} \cdot \sin A_{ik}}{d_{ik}} \cdot d\eta_i \\ &- \varrho \frac{\cos \beta_{ik}}{d_{ik}} \cdot dH_i - \varrho \frac{\cos B_i \cdot \sin B_k \cdot \cos (L_k - L_i)}{d_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} \\ &- \sin B_i \cdot \cos B_k - \sin \beta_{ik} \cdot \cos \beta_{ki} \cdot \cos A_{ki} d\xi_k - \\ &\quad \frac{\cos B_i \cdot \sin (L_k - L_i) - \sin \beta_{ik} \cdot \cos \beta_{ki} \cdot \sin A_{ki}}{d_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} \cdot d\eta_k + \\ &+ \varrho \frac{\sin \beta_{ik} \cdot \sin \beta_{ki} + \sin B_i \cdot \sin B_k}{d_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} + \\ &+ \frac{\cos B_i \cdot \cos B_k \cdot \cos (L_k - L_i)}{d_{ik} \cdot \cos \beta_{ik}} dH_k + \\ &+ \cos \beta_{ik} \cdot \frac{\bar{d}_{ik}}{2 r_m} \cdot \varrho \cdot dk - \\ &- (\beta'_{ik} - k_0 \cdot \cos \beta'_{ik} \cdot \frac{\bar{d}_{ik}}{2 r_m} \cdot \varrho - \beta_{ik0}). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Die Refraktionsunbekannte $k = k_0 + dk$ wird nur dann berücksichtigt, wenn für jede Station ein besonderer k -Wert oder für das ganze Netz ein mittlerer k -Wert ermittelt werden soll. r_m entspricht dem mittleren Erdradius, β'_{ik} dem gemessenen Höhenwinkel ohne Refraktionsverbesserung. Der den Näherungskoordinaten von P_i und P_k entsprechende Höhenwinkel β_{ik0} ergibt sich aus Formel (3.8)

Für kurze Strecken gilt ausreichend genau

$$\begin{aligned} v_{\beta_{ik}} &= -\varrho \frac{\sin \beta_{ik} \cdot \cos A_{ik}}{d_{ik}} (d\xi_k - d\xi_i) \\ &- \varrho \frac{\sin \beta_{ik} \cdot \sin A_{ik}}{d_{ik}} (d\eta_k - d\eta_i) \\ &+ \varrho \frac{\cos \beta_{ik}}{d_{ik}} (dH_k - dH_i) + \cos \beta_{ik} \cdot \frac{\bar{d}_{ik}}{2 r_m} \cdot \varrho \cdot dk \\ &- (\beta'_{ik} - k_0 \cdot \cos \beta'_{ik} \cdot \frac{\bar{d}_{ik}}{2 r_m} \cdot \varrho - \beta_{ik0}). \quad (3.7a) \end{aligned}$$

Die Fehlergleichungen im geozentrischen und in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem lassen sich entsprechend den hier gemachten Ausführungen ebenfalls leicht aus den entsprechenden strengen Gleichungen ableiten [4], [2]. Darauf kann jedoch hier nicht näher eingegangen werden.

4. Einfluß der Lotabweichungen im Raumnetz Heerbrugg

Der Einfluß der Lotabweichungen im Raumnetz Heerbrugg im Alpenvorland der Ostschweiz [2] wurde wie folgt ermittelt: In dem Netz, Abb. 1, das ein Ausschnitt aus dem Basisvergrößerungsnetz Heerbrugg ist, waren von der Schweizerischen Geodätischen Kommission folgende Größen gemessen worden: die horizontalen Richtungen und gegenseitigen Höhenwinkel, die astronomischen Breiten und Längen in allen Netzpunkten mit Ausnahme der Länge in P_4 und die markierten astronomischen Azimute. Der Netzmäßigstab wird durch die mit Invardrähten gemessene Horizontalentfernung P_0P_1 festgelegt. Raumstrecken wurden nicht gemessen. Diese Daten wurden streng in einem ellipsoidischen Bezugssystem ausgeglichen. Dabei wurden die Refraktionskoeffizienten für die Reduktion der Höhenwinkel linienweise durch eine Vorausgleichung unter Berücksichtigung der Lotabweichungen, also der astronomischen Beobachtungen, ermittelt und in die Hauptausgleichung als bekannte Größen eingeführt [5]. Die Ausgleichung wurde dann ohne astronomische Beobachtungen mit den in Abschnitt 3 beschriebenen Fehlergleichungen wiederholt. Dabei wurden die Koordinaten des Zentralpunktes P_0 und das Azimut der Seite P_0P_2 festgehalten. Ferner wurden für die einzelnen Linien dieselben Refraktionskoeffizienten eingesetzt wie bei der strengen Ausgleichung, um den Einfluß der Lotabweichungen auf die Form und Größe des Netzes möglichst unverfälscht zu erhalten. Dadurch wird strenggenommen die Kenntnis der Lotabweichungen vorausgenommen, da bei der Ermittlung der Refraktion aus gegenseitigen Höhenwinkeln der Einfluß der Lotabweichungen nicht vernachlässigt werden darf. Wird bei der Ermittlung der Refraktionskorrekturen der Höhenwinkel der Einfluß der Lotabweichungen außer Betracht gelassen, so ergeben sich etwas andere Raumkoordinaten der Netzpunkte.

In Abb. 1 sind der Grundriß des Raumnetzes Heerbrugg und die Lotabweichungen dargestellt. Im Zentralpunkt P_0 wurde die Lotabweichung zu Null angenommen. In Tabelle 1 sind die Änderungen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, ΔH der ellipsoidischen Koordinaten durch Vernachlässigung der Lotabweichungen angegeben. Die Vorzeichen sind im Sinne Koordinaten ohne Lotabweichungen minus strenge Koordinaten mit Lotabweichungen festgelegt. Wir erkennen, daß sich trotz der Kleinheit des Netzes die ellipsoidischen Höhen um Beträge bis zu 29 cm ändern. Auch die Lageänderungen sind beträchtlich. Aus Tabelle 1 folgt ferner, daß die mittleren Fehler der Raumkoordinaten durch die Vernachlässigung der Lotabweichungen im Vergleich zur strengen Ausgleichung auf etwa das Dreifache anwachsen, ein Zeichen dafür, daß durch die Vernachlässigung erhebliche Zwänge entstehen. Dies starke Anwachsen der mittleren Fehler röhrt hauptsächlich vom Anwachsen der Höhenwinkelverbesserungen her. Deshalb würden getrennte Ausgleichungen nach Lage und Höhe für die Lagefehler kleinere, das heißt realistischere Zahlenwerte liefern.

$$\sin \beta_{ik0} = \frac{(X_{k0} - X_{i0}) \cdot \cos B_{i0} \cdot \cos L_{i0} + (Y_{k0} - Y_{i0}) \cdot \cos B_{i0} \cdot \sin L_{i0} + (Z_{k0} - Z_{i0}) \cdot \sin B_{i0}}{\sqrt{(X_{k0} - X_{i0})^2 + (Y_{k0} - Y_{i0})^2 + (Z_{k0} - Z_{i0})^2}}. \quad (3.8)$$

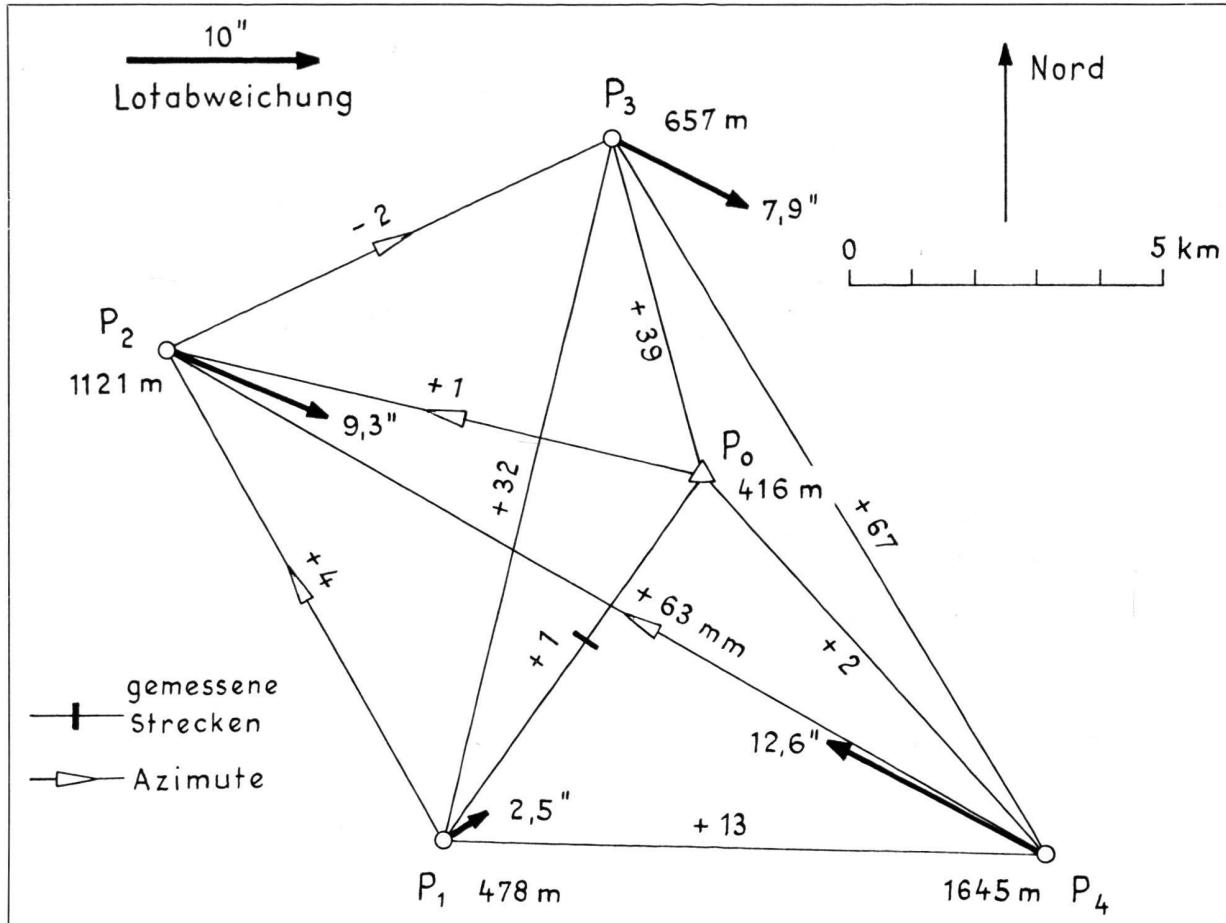


Abb. 2 Raumnetz Stuttgart: Lotabweichungen, ellipsoidische Höhen und Änderungen der ausgeglichenen Raumstrecken in Millimeter bei Ausgleichung ohne Lotabweichungen

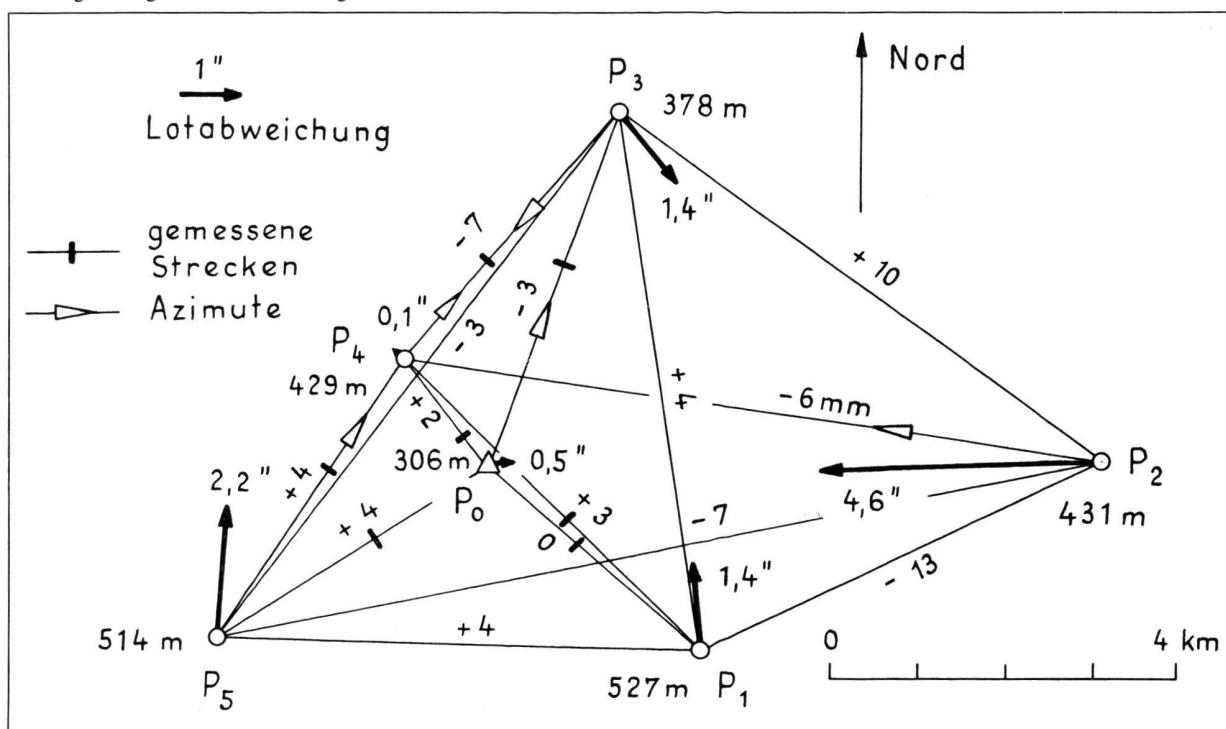


Tabelle 1 Raumnetz Heerbrugg:

| Punkt | $\Delta\xi$ [mm] | m_ξ [mm] | m_ξ^* [mm] | $\Delta\eta$ [mm] | m_η [mm] | m_η^* [mm] | Δ_H [mm] | m_H [mm] | m_H^* [mm] |
|-------|---------------------|-----------------|-------------------|----------------------|------------------|--------------------|--------------------|---------------|-----------------|
| P_0 | 0 | ± 0 | ± 0 | 0 | ± 0 | ± 0 | 0 | ± 0 | ± 0 |
| P_1 | - 3 | ± 18 | ± 7 | + 2 | ± 26 | ± 10 | - 61 | ± 81 | ± 28 |
| P_2 | + 3 | ± 11 | ± 12 | - 19 | ± 45 | ± 12 | - 221 | ± 85 | ± 30 |
| P_3 | + 36 | ± 104 | ± 21 | - 25 | ± 87 | ± 25 | - 52 | ± 72 | ± 25 |
| P_4 | - 22 | ± 39 | ± 14 | + 42 | ± 46 | ± 18 | - 286 | ± 93 | ± 33 |

$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta_H$ = Einfluß der Lotabweichungen auf die ellipsoidischen Koordinaten

m_ξ, m_η, m_H = mittlere Koordinatenfehler bei Vernachlässigung der Lotabweichungen

m_ξ^*, m_η^*, m_H^* = mittlere Koordinatenfehler bei Berücksichtigung der Lotabweichungen

Tabelle 2 Raumnetz Stuttgart:

| Punkt | $\Delta\xi$ [mm] | m_ξ [mm] | m_ξ^* [mm] | $\Delta\eta$ [mm] | m_η [mm] | m_η^* [mm] | Δ_H [mm] | m_H [mm] | m_H^* [mm] |
|-------|---------------------|-----------------|-------------------|----------------------|------------------|--------------------|--------------------|---------------|-----------------|
| P_0 | 0 | ± 0 | ± 0 | 0 | ± 0 | ± 0 | 0 | ± 0 | ± 0 |
| P_1 | - 8 | ± 13 | ± 16 | - 6 | ± 16 | ± 18 | - 8 | ± 20 | ± 22 |
| P_2 | - 33 | ± 25 | ± 32 | - 9 | ± 38 | ± 41 | - 52 | ± 44 | ± 49 |
| P_3 | - 3 | ± 18 | ± 19 | - 1 | ± 6 | ± 19 | - 6 | ± 23 | ± 27 |
| P_4 | + 4 | ± 11 | ± 11 | + 2 | ± 7 | ± 10 | 0 | ± 6 | ± 7 |
| P_5 | + 8 | ± 16 | ± 19 | - 9 | ± 17 | ± 18 | - 15 | ± 21 | ± 24 |

$\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta_H$ = Einfluß der Lotabweichungen auf die ellipsoidischen Koordinaten

m_ξ, m_η, m_H = mittlere Koordinatenfehler bei Vernachlässigung der Lotabweichungen

m_ξ^*, m_η^*, m_H^* = mittlere Koordinatenfehler bei Berücksichtigung der Lotabweichungen

In Abb. 1 ist auch noch der Einfluß der Lotabweichungen auf die ausgeglichenen Raumstrecken eingetragen. Wir erkennen, daß auf den Strecken P_0P_3 , P_1P_3 , P_2P_4 und P_3P_4 die Abweichungen zwischen 32 mm und 67 mm liegen. Diese Beträge können bei einem Vergleich mit elektrooptischen Streckenmessungen nicht mehr vernachlässigt werden.

5. Einfluß der Lotabweichungen im Raumnetz Stuttgart

In dem in der Hügellandschaft von Stuttgart gelegenen Raumnetz [2], Abb. 2, wurden folgende Größen gemessen: In allen Netzknoten die astronomischen Breiten und Längen, die horizontalen Richtungen und gegenseitigen Höhenwinkel der eingezeichneten Linien, ferner die markierten Raumstrecken und astronomischen Azimute. Die Höhenunterschiede und die Lotabweichungen sind hier wesentlich kleiner als im Heerbrugger Netz. Diese Daten wurden wie beim Heerbrugger Netz zunächst streng in einem ellipsoidischen Bezugssystem ausgeglichen. Bei der anschließenden Ausgleichung ohne astronomische Beobachtungen wurden die Koordinaten des Zentralpunktes P_0 und das Azimut der Seite P_0P_3 festgehalten. Ferner wurde für die Reduktion der Höhenwinkel für jede Strecke derselbe Refraktionskoeffizient verwendet wie bei der strengen Ausgleichung.

In Tabelle 2 sind die durch die Vernachlässigung der Lotabweichungen verursachten Änderungen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, ΔH der ellipsoidischen Koordinaten angegeben. Die Lageänderungen $|\Delta\xi|$, $|\Delta\eta|$ sind hier, wenn wir von $\Delta\xi_2 = -33$ mm absehen, ≤ 9 mm. Die Höhenänderung ist nur im Punkt P_2 mit der größten Lotabweichung ins Gewicht fallend. Interessant ist, daß im Stuttgarter Netz bei Weglassung der astronomischen Beobachtungen die mittleren Fehler der Raumkoordinaten geringfügig kleiner werden. Dies dürfte

auf den Fortfall der nicht sehr genauen astronomischen Azimute zurückzuführen sein. Der Einfluß der Lotabweichungen auf die Fehlerrechnung ist hier vernachlässigbar. Die berechneten Koordinatenänderungen enthalten neben der Verformung des Raumnetzes nach Lage und Höhe noch Anteile durch eine Verdrehung und eine Maßstabsänderung des Netzes. Zur weiteren Beurteilung der Netzerformung wurden wieder die Änderungen der Längen der ausgeglichenen Raumstrecken durch die Vernachlässigung der Lotabweichungen berechnet. Sie sind in Abb. 2 eingetragen. Die Änderungen liegen zwischen -13 mm und +10 mm, sind also sehr klein.

Aus den Untersuchungen des Stuttgarter Raumnetzes folgt, daß im Hügelland bei kleinen Netzen, wie zu erwarten war, der Einfluß der Lotabweichungen auf die Gestalt des Raumnetzes klein ist. Auf größere Entfernung kann jedoch auch im Hügelland der Einfluß der Lotabweichungen auf die Höhenbestimmung beträchtlich sein. So verursacht zum Beispiel eine konstante Lotabweichung von $1''$ auf eine Entfernung von 200 km eine Höhenänderung von 1 m. Es darf auch nicht vergessen werden, daß zur absoluten Netzorientierung astronomische Beobachtungen erforderlich sind.

6. Zusammenhang zwischen astronomischem Nivellelement und ellipsoidischen Höhen

Der Unterschied der ellipsoidischen Höhen H_i und H_k der Punkte P_i und P_k kann bekanntlich auch durch Kombination eines geometrischen und eines astronomischen Nivellelements ermittelt werden. Bezeichnen wir den Abstand benachbarter Niveaumassen mit dh , die Lotabweichungskomponente in Profilrichtung an einer beliebigen Stelle der Erdoberfläche mit ε und das Wegelement mit ds , so gilt bekanntlich

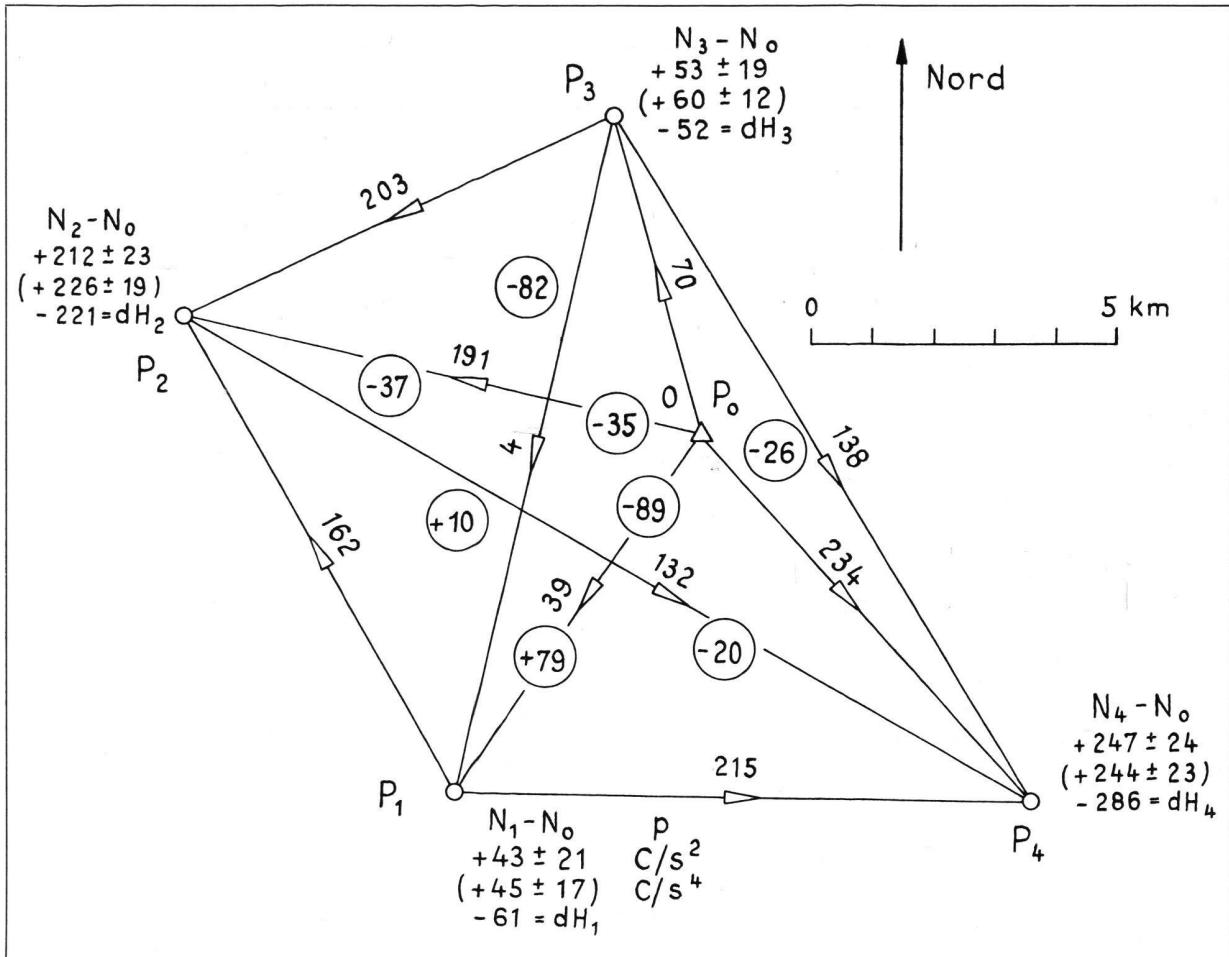


Abb. 3 Raumnetz Heerbrugg: Astronomisches Nivellement ohne Lotkrümmung. Zahlenwerte in Millimeter

$$H_k - H_i = \int_{P_i}^{P_k} dh - \int_{P_i}^{P_k} \varepsilon \cdot ds. \quad (6.1)$$

Bezeichnen wir den Abstand des Geoids vom Referenzellipsoid mit N und die Lotabweichung im Profil $P_i P_k$ an einer beliebigen Stelle auf dem Geoid mit ε' , so gilt für die Änderung des Geoidabstands von P_i nach P_k

$$N_k - N_i = - \int_{P_i}^{P_k} \varepsilon \cdot ds + \int_{P_i}^{P_k} (\varepsilon - \varepsilon') \cdot ds. \quad (6.2)$$

Das letzte Glied entspricht dem Einfluß der Lotkrümmungen ($\varepsilon - \varepsilon'$) und ist identisch mit der orthometrischen Nivellementsverbesserung. Aus (6.1) und (6.2) folgt

$$\begin{aligned} - \int_{P_i}^{P_k} \varepsilon \cdot ds &= (H_k - H_i) - \int_{P_i}^{P_k} dh = (N_k - N_i) - \\ &- \int_{P_i}^{P_k} (\varepsilon - \varepsilon') \cdot ds. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Das astronomische Nivellement liefert also die Reduktion, die an dem nivellierten Höhenunterschied anzubringen ist, um den ellipsoidischen Höhenunterschied zu erhalten.

Da in den Testnetzen Heerbrugg und Stuttgart keine Nivellements Höhen verfügbar sind, soll im folgenden der durch das astronomische Nivellement erfaßbare Höhenanteil näher untersucht werden. Er entspricht nach (6.2), wenn wir die Lotkrümmungen berücksichtigen, dem Einfluß der Geoidundulationen N . Der Einfluß der Lotkrümmung längs einer Linie von der Länge $s = 15$ km kann im Gebirge einige Zentimeter betragen. Der Einfluß auf eine geschlossene Schleife ist in der Regel jedoch klein, sofern $|s| \leq 60$ km. Deshalb soll für die weiteren Untersuchungen in (6.2) das letzte Glied vernachlässigt sein. Es wird also gesetzt

$$N_k - N_i \approx - \int_{P_i}^{P_k} \varepsilon \cdot ds. \quad (6.4)$$

Dieser Ansatz entspricht in guter Näherung der Änderung der ellipsoidischen Höhe der Projektionen von P_i und P_k auf die Niveauplätze, die in der Mitte zwischen P_i und P_k verläuft. Dabei ist die Annäherung um so besser, je kleiner der Höhenunterschied zwischen P_i und P_k ist, weil dann der Einfluß der Lotkrümmungen auf den Lotstücken zwischen P_i und P_k und ihrer mittleren Niveauplätze um so kleiner wird.

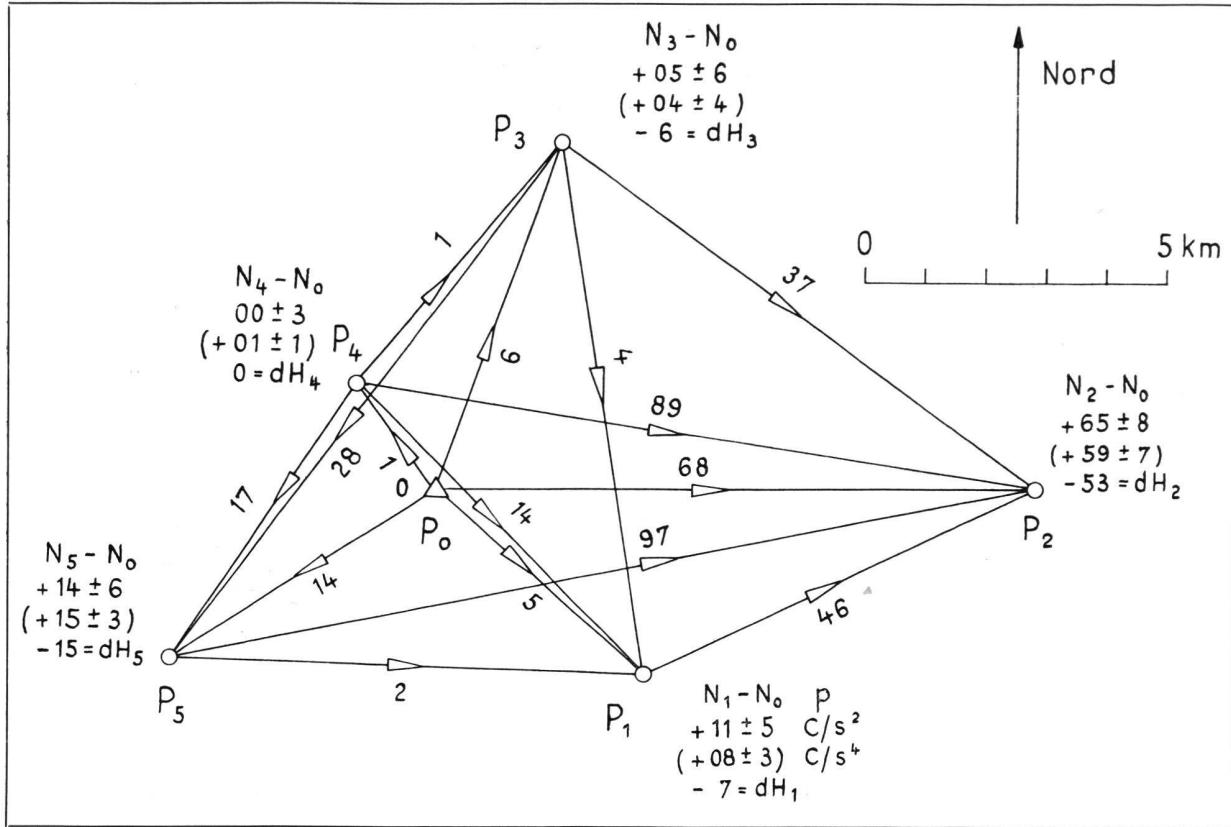


Abb. 4 Raumnetz Stuttgart: Astronomisches Nivellement ohne Lotkrümmung. Zahlenwerte in Millimeter

Da ε nur in P_i und P_k bekannt ist, nehmen wir eine lineare Änderung längs des Profils an und setzen

$$N_k - N_i \approx -\frac{1}{2}(\varepsilon_i + \varepsilon_k) \cdot s_{ik}, \quad (6.5)$$

wobei s_{ik} der Horizontalentfernung von P_i nach P_k entspricht. Führen wir die Lotabweichungskomponenten ξ, η und einen mittleren Erdradius R ein und bezeichnen die geographischen Koordinaten der beiden Punkte mit B_i, L_i und B_k, L_k , so gilt nach [6], S. 182,

$$\begin{aligned} N_k - N_i &\approx -0,898 \frac{\text{cm}}{1' \cdot 1''} \left[(B_k - B_i)' \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \right)'' + \right. \\ &\quad \left. (L_k - L_i)' \left(\frac{\eta_i - \eta_k}{2} \right)'' \cdot \cos B_m \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Hierin sind die Breiten- und Längendifferenzen in Minuten und die Lotabweichungskomponenten in Altsekunden einzusetzen. B_m entspricht der Mittelbreite des Profils $P_i P_k$.

Zur genäherten numerischen Bestimmung der Hebungen und Senkungen des Geoids oder genauer der mittleren Niveaufläche innerhalb des Netzes nehmen wir N_0 im Zentralpunkt P_0 beliebig an und führen die Geoidundulationen N_i in den Netzpunkten P_i ($i = 1, 2, 3 \dots$) als Unbekannte ein. Dann gelten unter Vernachlässigung des Einflusses der Lotkrümmungen genähert Fehlergleichungen von der Form

$$\begin{aligned} v_{ik} &= N_k - N_i - a_{ik} (\xi_i + \xi_k)'' - b_{ik} (\eta_i + \eta_k)'', \\ a_{ik} &= -0,449 (B_k - B_i)' \left[\frac{\text{cm}}{1' \cdot 1''} \right], \\ b_{ik} &= -0,449 (L_k - L_i)' \cdot \cos B_m \left[\frac{\text{cm}}{1' \cdot 1''} \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Diese Fehlergleichungen sind zwar nicht unabhängig voneinander, da dieselben ξ - und η -Werte jeweils in mehreren Gleichungen vorkommen. Für eine überschlägige Abschätzung der Änderungen der N -Werte ist jedoch die Behandlung als unabhängige Größen vertretbar, zumal der Verlauf der wahren Lotabweichungen zwischen den Netzpunkten unbekannt ist.

Auch der Gewichtsansatz für die «Beobachtungsgrößen»

$$\Delta N_{ik} = a_{ik} (\xi_i + \xi_k) + b_{ik} (\eta_i + \eta_k) \quad (6.8)$$

ist problematisch. Für die Untersuchung der Testnetze wurden folgende Gewichtsansätze gemacht:

$$p_{ik} = C/s_{ik}^2, \quad (6.9)$$

$$p_{ik} = C/s_{ik}^4. \quad (6.10)$$

Hierbei wurde angenommen, daß die Lotabweichungen selbst fehlerfrei sind und daß der mittlere Fehler von ΔN_{ik} proportional zu s_{ik} (6.9) beziehungsweise zu s_{ik}^2 (6.10) anwächst. Diesen Annahmen liegt die Vorstellung zugrunde, daß der Einfluß der Fehler der Lotabweichungen in P_i und P_k wesentlich kleiner ist als der Einfluß der unbekannten, nicht linearen Änderungen zwischen P_i und P_k .

In Abb. 3 sind die Ergebnisse der Näherungsausgleichung des astronomischen Nivellements für das Raumnetz Heerbrugg dargestellt. Die längs der Linien eingetragenen Zahlen bedeuten die rohen Werte ΔN_{ik} vor der Ausgleichung in Millimeter, wobei die Pfeile der Steigungsrichtung entsprechen. Die in Kreisen eingetragenen Zahlen entsprechen den Schleifenschlußfehlern beim Durchlaufen der Dreiecke im Uhrzeigersinn. Die in den Randpunkten $P_1 \dots P_4$ einge-

tragenen Zahlenwerte entsprechen den Hebungen ($N_i - N_0$) des Geoids oder genauer der mittleren Niveaufläche innerhalb des Netzes relativ zum Zentralpunkt P_0 und den mittleren Fehlern von ($N_i - N_0$). Dabei entsprechen die Zahlen ohne Klammern dem Gewichtsansatz C/s^2 und die Zahlen in runden Klammern dem Gewichtsansatz C/s^4 . Wir stellen fest, daß der Gewichtsansatz C/s^4 etwas kleinere mittlere Fehler liefert. Ferner sind in Abb. 3 die Änderungen ΔH der ellipsoidischen Höhen bei Vernachlässigung des Einflusses der Lotabweichungen nach Tabelle 1 eingetragen. Wir erkennen, daß die ($N_i - N_0$)-Werte etwa denselben Betrag wie die entsprechenden ΔH -Werte haben und daß die Vorzeichen von ($N_i - N_0$) stets positiv und die von ΔH stets negativ sind.

In Abb. 4 sind die nach dem soeben beschriebenen Verfahren ermittelten Ergebnisse des astronomischen Nivellements im Raumnetz Stuttgart dargestellt. Hier wurden alle möglichen Verbindungen in die Ausgleichung einbezogen. Die Schleifenwidersprüche wurden der Übersichtlichkeit halber nicht eingetragen. Wir stellen wieder fest, daß der Gewichtsansatz

C/s^4 etwas kleinere mittlere Fehler liefert als der Ansatz C/s^2 . Auch hier stimmen die stets positiven Geoidhebungen ($N_i - N_0$) weitgehend mit den entsprechenden ΔH -Werten nach Tabelle 2 überein, wenn letztere negativ angesetzt werden.

Aus den astronomischen Nivellements in beiden Testnetzen folgt, daß sich die «ellipsoidischen Höhen» ohne Berücksichtigung der Lotabweichungen weitgehend auf das Geoid oder genauer auf die mittlere Niveaufläche beziehen, also eigentlich genäherte Meereshöhen sind. Ferner folgt aus dem Vergleich, daß der Unterschied zwischen trigonometrisch bestimmten Höhen mit und ohne Berücksichtigung der Lotabweichungen im wesentlichen der Änderung des vom astronomischen Nivelllement erfaßten Höhenanteils entspricht.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Dipl.-Ing. Rainer Zoglmeier für die Durchführung der numerischen Berechnungen und Herrn Dipl.-Ing. Max Mayer für deren Überprüfung auch an dieser Stelle vielmals zu danken.

Literatur

- [1] L. Hradilek: Trigonometric levelling and spatial triangulation in mountain regions. Bull. Géod. 1968, S. 33–52.
- [2] K. Ramsayer: Strenge und genäherte Ausgleichung von Raumnetzen in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem und Erprobung in den Raumnetzen Heerbrugg und Stuttgart. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 71, 1971.
- [3] K. Ramsayer: Untersuchung der Genauigkeit eines Raumpolygons. Zeitschrift für Vermessungswesen 1971, S. 429–439.
- [4] H. Wolf: Die Grundgleichungen der Dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1963, S. 225–233.
- [5] K. Ramsayer: Verbesserte Genauigkeitsabschätzung der Ausgleichung von Raumnetzen durch Einführung von streckenweise verschiedenen Refraktionskoeffizienten für die Reduktion der Höhenwinkel. (In Vorbereitung)
- [6] K. Ledersteger: Astronomische und Physikalische Geodäsie (Erdmessung). Handbuch der Vermessungskunde, 10. Ausgabe, Band V, 1969.
- [7] M. Hotine: A Primer of Non-Classical Geodesy. Vorgelegt dem Symposium der IAG in Venedig 1959.