

Zeitschrift: Mensuration, photogrammétrie, génie rural
Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) =
Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF))
Band: 70-F (1972)
Heft: 3

Artikel: Arbeiten und Entwicklungen zur analytischen Photogrammetrie am
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z
Autor: Schenk, T.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-225003>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Arbeiten und Entwicklungen zur analytischen Photogrammetrie am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z

T. Schenk, Zürich

Zusammenfassung

Am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z ist eine neue Programmkonzeption zur Anwendung der Blocktriangulation nach der Bündelmethode entstanden. Die vorliegende Arbeit orientiert darüber. Nach einigen einleitenden Bemerkungen zur Entwicklung und zu den Methoden der Blocktriangulation wird etwas näher auf die Bündelmethode eingegangen. Nach einer kurzen thematischen Erörterung wird vor allem das Problem der Normalgleichungsauflösung diskutiert. Danach wird der ganze Arbeitsablauf einer Blocktriangulation nach der Bündelmethode, mit einigen Hinweisen auf die Rechenkosten, beschrieben. Der letzte Abschnitt ist den Anwendungen gewidmet.

Résumé

Une nouvelle conception de programme du calcul électronique dans l'application de l'aérotriangulation par blocs vient d'être développée à l'Institut de géodésie et photogrammétrie de l'EPF-Z. Après quelques explications d'ordre général et de la méthode des faisceaux en particulier, le problème de la résolution des équations normales est discuté. Puis tout le processus de l'aérotriangulation de blocs par la méthode des faisceaux de rayons est développée avec quelques remarques sur le coût du calcul électronique et les possibilités d'application de la méthode.

I. Einleitung

Die räumliche Photogrammetrie hat zum Ziel, aus Luftbildern topographische Karten oder Landeskoordinaten diskreter Punkte zu gewinnen. Dazu ist ein Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes notwendig: Die Messungen im photographischen Bild werden in einem Bildkoordinatensystem oder einem daraus abgeleiteten Modellkoordinatensystem durchgeführt; die Karten oder Punktkoordinaten hingegen wünscht man meistens in einem Landeskoordinatensystem.

Gemeinsames Element der beiden Koordinatensysteme sind die Paßpunkte. Mit ihrer Hilfe lassen sich die beiden Systeme ineinander überführen.

Bei der modellweisen Auswertung sind etwa 5 bis 6 Paßpunkte wünschenswert, um die absolute Orientierung rasch und bequem durchführen zu können. Die wirtschaftliche Leistungsfähigkeit der Photogrammetrie wird ernstlich in Frage gestellt, wenn alle erforderlichen Paßpunkte terrestrisch zu bestimmen sind. Man trachtete deshalb schon früh danach, die Paßpunkte photogrammetrisch zu bestimmen. Damit setzte die Entwicklung verschiedener Verfahren der Aerotriangulation ein. Die Aufgabe der Aerotriangulation besteht somit in der Verdichtung eines terrestrisch bestimmten Punktfeldes.

Die analytische Durchführung einer Aerotriangulation ist mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden. Das einzig wirtschaftlich vertretbare Verfahren bestand bis vor kurzem darin, die Aerotriangulation soweit wie möglich instrumentell durchzuführen. Dank diesem Umstand er-

lebte die photogrammetrische Instrumentenindustrie einen großen Aufschwung, und es wurden eigens für die analoge oder instrumentelle Aerotriangulation spezielle Autographen, sogenannte Geräte 1. Ordnung, entwickelt, welche nach einer Reihe von Zwischenschritten als Endprodukt Streifenkoordinaten liefern.

Für die mehr oder weniger gleichmäßigen Abweichungen, die die Streifenkoordinaten gegenüber den geodätischen Paßpunkten aufweisen, machte man systematische Gerätefehler verantwortlich. Demzufolge interpolierte man die Streifenkoordinaten mit Korrekturflächen 2. Ordnung in das vorhandene Paßpunktfeld. Sprunghafte Änderungen der Streifenkoordinaten an einzelnen Stellen sowie die Tatsache, daß ein hin- und rücktriangulierter Streifen zu zwei verschiedenen Ergebnissen führte, deckte die Unzulänglichkeit dieser Methode auf.

Die entscheidende Wende zugunsten von strengeren und allgemeineren Verfahren der Aerotriangulation brachte die Entwicklung von elektronischen Rechenanlagen. Die Einwände gegen die analytische Aerotriangulation wurden angesichts dieser neuen aussichtsreichen Situation mehr und mehr entkräftet, und es setzte etwa in der Zeit zwischen 1950 und 1960 eine intensive mathematische Erörterung der Grundformeln ein. Dabei erwiesen sich die von Schmid gemachten Vorschläge [1] als die umfassendsten und fehlertheoretisch strengsten aller vorgeschlagenen Lösungen. Nach [1] werden alle Luftbilder eines Blockes zusammen mit den zu bestimmenden Punkten einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zugeführt.

Der Begriff der Aerotriangulation, unter welchem man bis zu diesem Zeitpunkt (1960) ausschließlich Streifenausgleichung verstand, weitete sich zwangsläufig aus auf ganze Blöcke (mehrere nebeneinanderliegende und sich überlappende Streifen). Aus diesem Grund bevorzugt man heute den Begriff der *Blocktriangulation*.

Um eine gewisse Übersicht in die bekanntesten und in die Praxis eingeführten Methoden der Blocktriangulation zu bringen, erscheint eine grobe Einteilung in 3 Gruppen zweckmäßig. Tafel 1 zeigt, nach welchen Gesichtspunkten die Einteilung vorgenommen wurde: Maßgebend ist die kleinste Einheit, die in die Ausgleichung eingeht. Bei den Interpolationsverfahren sind dies ganze Streifen, bei der Methode der unabhängigen Modelle einzelne Modelle und bei der Bündelmethode schließlich einzelne Luftbilder. Aus Tafel 1 geht weiter hervor, welche Operationen analog (mit einem Δ bezeichnet) und welche analytisch (mit einem O symbolisiert) durchgeführt werden.

1. Interpolationsverfahren

Die Interpolationsverfahren reichen bis in die Anfänge der Streifenausgleichung zurück. Wie oben erwähnt, versuchte man die Streifendeformationen, deren Ursache in systema-

ARBEITSVORGÄNGE		STREIFEN-TRIANGULATION	METHODEN DER BLOCKTRIANGULATION		
			Interpol. verfahren	unabhängige Modelle	Bündel
Vorbereitungen	Festlegen des Bildhauptpunktes	△	△	△	○
	Berücksichtigung von Filmschrumpfung	△	△	△	○
	Berücksichtigung von Verzerrung (und Erdkrümmung)	△	△	△	○
Messungen	Bildkoordinaten messen	△	△	△	△
	Modellkoordinaten messen	△	△	△	△
	Streifenbildung (Folgebildanschluss)	△	△	△	△
Berechnungen	Streifenausgleich	○	○	○	○
	Blockausgleich		○	○	○

Tafel 1

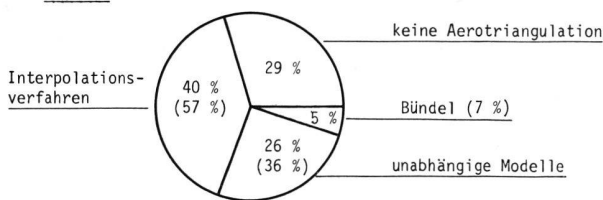
△ analoge Operation
○ analytische Operation

tischen Gerätefehlern gesucht wurde, mit Polynomen zu eliminieren.

Die Verfahren der Polynomausgleichung sind heute wohl feiner ausgearbeitet, auf mehrere nebeneinanderliegende Streifen erweitert und vor allem der elektronischen Berechnung zugeführt worden, im Grunde genommen stützen sie sich aber immer noch auf die Fehlertheorie der dreißiger Jahre.

Wie viele Blockausgleichungen werden heute noch nach einer Interpolationsmethode gerechnet? Auf diese Frage gibt eine Untersuchung von Kubik und Kure [2] Auskunft. Die vorläufige Auswertung der vom ITC, Delft, an 267 Organisationen versandten Fragebogen ist in Figur 1 graphisch dargestellt:

Figur 1



Es fällt auf, daß 29% aller photogrammetrischen Organisationen keine Aerotriangulation anwenden und daß von den übrigen Stellen 57% ein Interpolationsverfahren bevorzugen. Als Gründe für die doch recht weite Verbreitung der Interpolationsverfahren können genannt werden:

- Die Methode ist einfach zu verstehen und vor allem einfach zu programmieren.
- Fertige Rechenprogramme stehen zur Verfügung (zum Beispiel vom National Research Council of Canada [4]).
- Die Programme stellen in bezug auf Kernspeichergroße, Geschwindigkeit und externe Speichermöglichkeiten keine großen Ansprüche an die Rechenanlagen. Sie können aus

diesem Grunde ohne große Schwierigkeiten auf kleinere bis mittlere Anlagen übernommen werden.

- Ein mehr psychologischer Grund dürfte darin zu sehen sein, daß die Interpolationsmethoden viel mehr als die anderen Verfahren der Tradition der Aerotriangulation entsprechen.

2. Methode der unabhängigen Modelle

Zu dieser Gruppe zählen alle Verfahren, deren kleinste in die Ausgleichung eingehende Einheit ein Modell oder eine Gruppe von Modellen ist. Wie mehrere Modelle zu einer Gruppe oder wie man, angelehnt an den englischen Sprachgebrauch, oft auch sagt, zu Sektionen zusammengefaßt werden, ist hier offengelassen. Damit gehören auch die Verfahren der verknüpften Polynome in diese Gruppe. Der Übergang zu den Interpolationsverfahren ist fließend: Faßt man alle Modelle eines Streifens zu einer Sektion zusammen, haben wir den Fall der Interpolationsverfahren vor uns.

Die Entwicklung der Verfahren mit unabhängigen Modellen leitete van den Hout ein. Seine Methode – heute allgemein als Anblock bezeichnet – setzt horizontierte Modelle voraus, es findet also nur ein Lageausgleich statt. Räumliche Versionen sind vor allem vom photogrammetrischen Institut der Universität Stuttgart [5] und – seit längerer Zeit schon – von King [6] bekannt.

Die Verfahren der zweiten Gruppe sind, verglichen mit der ersten, fehlertheoretisch wesentlich differenzierter. Sie sind deshalb auch leistungsfähiger und ergeben strengere Resultate.

Diesen Vorzügen stehen wesentlich höhere Anforderungen an die Datenverarbeitung gegenüber: Der erhöhte numerische Aufwand ist sinnvoll nur noch durch große, mit leistungsfähigen externen Speichern versehene Rechenanlagen zu bewältigen. Das hat zur Folge, daß der Aufwand zur Erstellung eines effizienten Rechenprogrammes um ein Mehrfaches ansteigt. Damit sind aber auch gleich die Gründe aufgezählt, weshalb die Methode der unabhängigen Modelle in der Praxis noch nicht so weit eingeführt ist, wie man das vielleicht erwarten könnte.

II. Bündelmethode

Am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z sind seit einiger Zeit Computerprogramme zur Anwendung der Bündelmethode fertiggestellt und ausgetestet worden. Aus diesem Grund soll diese Methode hier etwas eingehender erläutert werden.

Die Bündelmethode ist das bisher strengste Verfahren, da die eigentlichen Messungen, nämlich die Bildkoordinaten, direkt in die Ausgleichung eingehen. In dieser Tatsache ist der wichtigste Unterschied zu den übrigen Verfahren zu sehen, denn dort führt man ja immer Größen in die Ausgleichung ein, die durch mehrere Schritte aus den Grundelementen der Aerotriangulation – den Bildkoordinaten – hergeleitet werden.

Vor allem die in Tafel 1 unter der Kolonne «Arbeitsvorgänge» bezeichnete Vorbereitungsphase erhellet den Sachverhalt besser: Die zwei Operationen «Festlegung des Bildhauptpunktes» und «Berücksichtigung der Objektivverzerrung und eventuell Erdkrümmung» lassen sich bei den übrigen Verfahren nur analog durchführen (durch manuelles Einpassen der Bilder in die Bildträger und durch Kompen-

sationsplatten). Schließlich ist die unter Umständen wichtige Operation der Berücksichtigung von Filmschrumpfun- gen nur bei der Bündelmethode möglich.

Es ist vor allem diese «Vorgeschichte» der Bildkoordina- tion – wir fassen sie als Bildkoordinatenbereinigung zusam- men –, die eine weitere Leistungssteigerung gegenüber allen anderen Verfahren bringt.

Wir können aus Tafel 1 weiter entnehmen, daß nur noch eine Operation – die Messung der Bildkoordinaten – analog durchgeführt wird. Diesem Umstand wird im englischen Sprachgebrauch dadurch Rechnung getragen, daß man die Bündelmethode als «fully analytical method» bezeichnet. Im Deutschen kennen wir diesen Begriff nicht wörtlich, und unter analytischer Aerotriangulation versteht man nicht ausschließlich die Bündelmethode. Wie ein Blick auf Ab- bildung 1 zeigt, wenden nur 7% aller Organisationen, die Blocktriangulation benutzen, die Bündelmethode an. Das ist weiter nicht erstaunlich, denn die Anforderungen an die Rechenprogramme und Computer steigen nochmals an im Vergleich zu den übrigen Verfahren.

1. Mathematisches Modell¹

Bezogen auf die Bündelmethode lautet die Frage nach dem funktionalen Modell¹: wie erhält man aus den an einem Komparator gemessenen Bildpunkten ausgeglichene Koor- dinaten der Neupunkte in einem Landeskoordinaten- system?

Die bei der optischen Abbildung wirksamen physikalischen Vorgänge werden in der Photogrammetrie seit jeher durch die Gesetze der Zentralperspektive beschrieben. Alle erfaß- baren Abweichungen davon, wie etwa Verzeichnung, Film- schrumpfung, Refraktion und andere werden auf dieses Modell reduziert, wobei man in diesem Zusammenhang von der Korrektur systematischer Fehler spricht.

Durch die Elemente der inneren Orientierung wird das Pro- jektionszentrum bezüglich dem Luftbild festgelegt. Die Ge- raden durch das Projektionszentrum und durch die Bild- punkte definieren ein Strahlenbündel. Die Aufgabe der Blockausgleichung besteht darin, die Bündel so zu orien- tieren und zu verbessern, daß alle homologen Strahlen durch einen Punkt gehen.

Die Kollinearitätsbedingung (das Projektionszentrum O_i , der Bildpunkt P_{ij} und der Bodenpunkt P_j liegen auf einer Geraden, nämlich auf dem Bündelstrahl ij , vgl. Abb. 2) und die Gesetze der Zentralprojektion liefern die Beob- achtungsgleichungen:

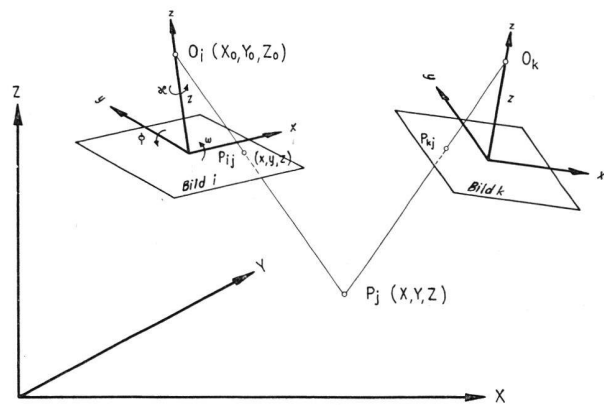
$$\frac{x}{z} = \frac{(X - X_0) a_{11} + (Y - Y_0) a_{12} + (Z - Z_0) a_{13}}{(X - X_0) a_{31} + (Y - Y_0) a_{32} + (Z - Z_0) a_{33}} \quad (1)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{(X - X_0) a_{21} + (Y - Y_0) a_{22} + (Z - Z_0) a_{23}}{(X - X_0) a_{31} + (Y - Y_0) a_{32} + (Z - Z_0) a_{33}}$$

Darin bedeuten:

x, y Bildkoordinaten
 z Projektionsdistanz

X, Y, Z Koordinaten des Bodenpunktes P_j
 X_0, Y_0, Z_0 Koordinaten des Projektionszentrums O_i



Figur 2

Die a sind die Koeffizienten der orthogonalen Drehmatrix A :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

oder mit den in Abbildung 4 eingeführten Drehwinkeln

Gleichung (3) siehe Seite 85

Die Gleichungen (1) gelten für jeden Bündelstrahl ij . Somit liefert jeder Bildpunkt P_{ij} ein Paar Gleichungen (1), die in Verbesserungsgleichungen übergehen, wenn Verbesserungen v_x und v_y an den Bildkoordinaten x, y eingeführt werden:

$$x + v_x = F(\omega, \phi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0, X, Y, Z) \quad (4)$$

$$y + v_y = F(\omega, \phi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0, X, Y, Z)$$

Alle Terme auf der rechten Seite sind Unbekannte: Die ersten sechs sind die Orientierungsparameter (drei Dreh- winkel, drei Koordinaten für das Projektionszentrum) und die letzten drei Parameter sind die unbekanntenen Koor- dinaten der Bodenpunkte.

Die Gleichungen (4) sind nicht linear. Um aus ihnen Fehler- gleichungen zu erhalten, muß man sie linearisieren, was be- kanntlich durch eine Taylor-Entwicklung unter Vernach- lässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung erreicht werden kann. Diese Vernachlässigung hat zur Folge, daß man von den Unbekannten Näherungen kennen muß, will man vermeiden, daß die Ausgleichung mehrfach durch- geführt werden soll. Im allgemeinen nimmt man für die Aerotriangulation den Normalfall an ($\omega = \phi = \kappa = 0$).

Die Programmkonzeption, wie sie in den beiden nächsten Abschnitten etwas näher beschrieben wird, sieht vor, daß sowohl für die unbekanntenen Transformationsparameter wie für die Bodenpunkte Näherungen berechnet werden. Das hat den Vorteil, daß die linearisierten Formeln auch für Nicht-Senkrechtaufnahmen noch gültig sind.

Die Linearformen aus (4) ergeben sich durch Differenziation der Gleichungen (1). Wir verzichten hier auf die detaillierte Wiedergabe und verweisen auf [3].

¹ Das mathematische Modell wird hier als Oberbegriff des funktio- nalen und des stochastischen Modelles verwendet. Das funktionale Modell ist die mathematische Beschreibung eines tatsächlichen phy- sikalischen Vorganges. Im stochastischen Modell werden jedem Ele- ment des funktionalen Modelles stochastische Eigenschaften zuge- schrieben.

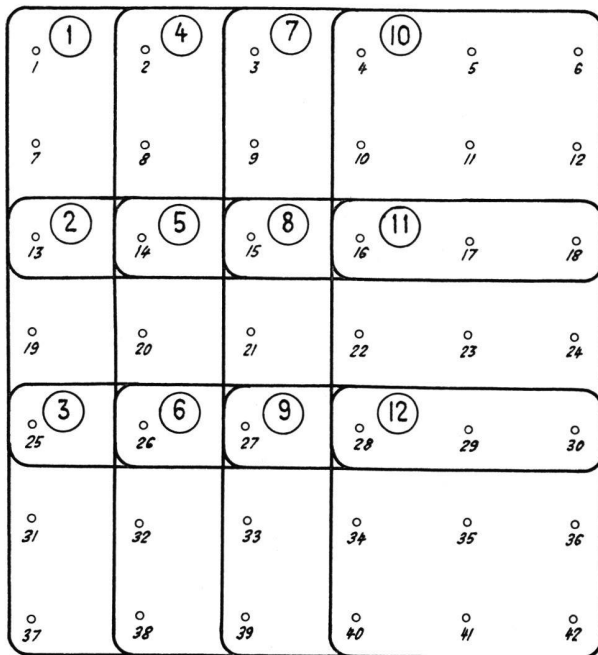
$$A = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \kappa & (\cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \phi \cos \kappa) & (\sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \phi \cos \kappa) \\ -\cos \phi \sin \kappa & (\cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \phi \sin \kappa) & (\sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \phi \sin \kappa) \\ \sin \phi & -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega \cos \phi \end{vmatrix} \quad (3)$$

2. Lösung der Normalgleichungen

Die Hauptschwierigkeit bei der Realisierung der Bündelmethode liegt in der Lösung des umfangreichen Normalgleichungssystem. Nach II.1. treten als Unbekannte auf: 6 Orientierungsparameter eines Luftbildes (3 Drehungen ω , φ , κ und X_0 , Y_0 und Z_0 des Projektionszentrums) sowie drei Koordinaten (X , Y , Z) jedes unbekanntes Bodenpunktes. Bei einer Blockgröße von 200 Bildern und 1600 unbekanntes Bodenpunkten ergeben sich somit 6000 Unbekannte, die es simultan aufzulösen gilt.

Es ist nicht Zweck der vorliegenden Arbeit, alle in Frage kommenden Lösungsmöglichkeiten für solch große Normalgleichungssysteme zu diskutieren, man vergleiche dazu [3] mit den dort enthaltenen Literaturhinweisen. Wir skizzieren hier nur die im Bündelprogramm BUEND (vgl. IV.) verwirklichte Lösung.

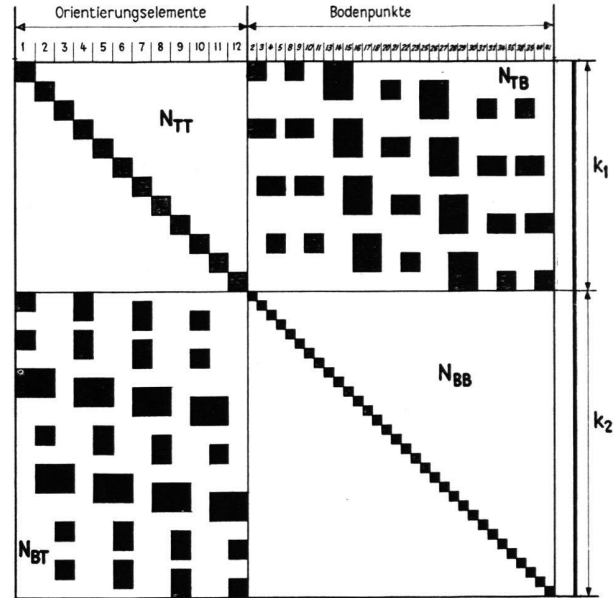
Um die folgenden Überlegungen an einem Beispiel verfolgen zu können, ist in Abbildung 3 ein Block dargestellt, der sich aus drei Streifen zu je 4 Bildern zusammensetzt.



Figur 3

Die zu diesem Block gehörende Normalgleichungsstruktur ist in Abbildung 4 angedeutet. Die direkte Lösung des vollständigen Normalgleichungssystems kommt nicht in Frage: der Rechenaufwand dazu wird selbst auf Großcomputern unverantwortlich groß. Es ist vielmehr angezeigt, das Normalgleichungssystem zu reduzieren. Wie aus Abbildung 4 hervorgeht, drängt sich als Teilungspunkt der Übergang von den Orientierungselementen zu den Bodenpunkten auf. Man muß sich somit nur noch entscheiden, welche der beiden Unbekanntengruppen (Orientierungselemente oder Bodenpunkte) zu eliminieren sei. Im allgemeinen überwiegen

die Bodenpunkte, es ist also zweckmäßig, diese zu eliminieren.



Figur 4

Mit den in Abbildung 4 eingeführten Bezeichnungen können wir schreiben:

$$N_{TT} \underline{t} + N_{TB} \underline{x} = \underline{k}_1 \quad (5a)$$

$$N_{TB} \underline{t} + N_{BB} \underline{x} = \underline{k}_2 \quad (5b)$$

Um die Unbekanntengruppe \underline{x} zu eliminieren, multiplizieren wir Gleichung (5b) linksseitig mit N_{BB}^{-1} :

$$N_{BB}^{-1} \cdot N_{TB}^T \underline{t} + N_{BB}^{-1} \cdot N_{BB} \underline{x} = N_{BB}^{-1} \cdot \underline{k}_2 \quad (6)$$

Da N_{BB} als Normalgleichungsmatrix sicher regulär ist, gilt $N_{BB}^{-1} \cdot N_{BB} = E$, wobei E die Einheitsmatrix bedeutet. Damit folgt für obige Gleichung:

$$\underline{x} = N_{BB}^{-1} \cdot \underline{k}_2 - N_{BB}^{-1} \cdot N_{TB}^T \cdot \underline{t} \quad (7)$$

Ersetzen wir in Gleichung (5a) \underline{x} durch den in (7) gefundenen Ausdruck, so erhält man

$$N_{TT} \cdot \underline{t} + N_{TB} \cdot (N_{BB}^{-1} \cdot \underline{k}_2 - N_{BB}^{-1} \cdot N_{TB}^T \cdot \underline{t}) = \underline{k}_1 \quad (8)$$

oder nach einigen Umformungen:

$$(N_{TT} - N_{TB} \cdot N_{BB}^{-1} \cdot N_{TB}^T) \cdot \underline{t} = \underline{k}_1 - N_{TB} \cdot N_{BB}^{-1} \cdot \underline{k}_2 \quad (9)$$

Zur weiteren Vereinfachung von (9) setzen wir das Matrizenprodukt $N_{BB}^{-1} \cdot N_{TB}^T = B$. Aus der Symmetrie von N_{BB} folgt:

$$(N_{BB}^{-1} \cdot N_{TB}^T)^T = N_{TB} \cdot N_{BB}^{-1} = B^T \quad (10)$$

Damit läßt sich für Formel (9) schreiben:

$$(N_{TT} - N_{TB} \cdot B) \cdot \underline{t} = \underline{k}_1 - B^T \cdot \underline{k}_2 \quad (11)$$

In Formel (9) und (11) ist also der Vektor \underline{x} (unbekannte Verschiebungen der Bodenpunkte) eliminiert. Damit ist aber noch nicht viel gewonnen, denn die zu bildende Inverse ist im allgemeinen mit einem sehr hohen numerischen Rechenaufwand verbunden (n^3 -Prozeß). Nun sei aber an die spezielle Struktur der Matrix N_{BB} erinnert (vgl. Abb. 4): Sie besteht aus 3×3 -Untermatrizen, die in der Diagonalen angeordnet sind und somit keinerlei Verbindungen untereinander haben. Aus diesem Umstand folgt, daß auch die Inverse N_{BB}^{-1} wieder dieselbe Struktur aufweist und daß damit der numerische Aufwand zur Invertierung in angemessenen Grenzen bleibt.

Verfolgen wir weiter die Struktur der Matrix $B = N_{BB}^{-1} N_{TB}^T$. Da N_{BB}^{-1} eine Diagonalmatrix ist – mit 3×3 Untermatrizen als Diagonalelemente – überträgt sich die Struktur der Matrix N_{TB}^T auf B .

Nach Formel (11) ist das Produkt $N_{TB} \cdot B$ zu bilden, und wir interessieren uns wieder für die Struktur der neu entstehenden Matrix N_R . Sie setzt sich aus lauter 6×6 -Untermatrizen zusammen, die überall dort entstehen, wo die einzelnen Luftbilder durch gemeinsame Punkte miteinander verknüpft sind.

Die Reduktion der Normalgleichungsmatrix N auf die unbekanntes Orientierungselemente der Luftbilder bietet zwei Vorteile:

- Die Zahl der Unbekannten wird beträchtlich vermindert. Bei dem schon erwähnten Block mit 10 Streifen zu je 20 Bildern beispielsweise von 6000 auf 1200 (200×6) und im Beispiel der Figuren 3 und 4 von 195 auf 72!
- Die reduzierte Normalgleichungsmatrix N_R hat eine besonders günstige Struktur: Sie ist bandförmig, und der Rechenaufwand zur Lösung wird dadurch günstig beeinflusst.

Die Bandbreite ist – das sei nur nebenbei bemerkt – abhängig von der Numerierung der Bilder im Block. Im allgemeinen ergibt eine Numerierung quer zur Flugrichtung die kleinste Bandbreite.

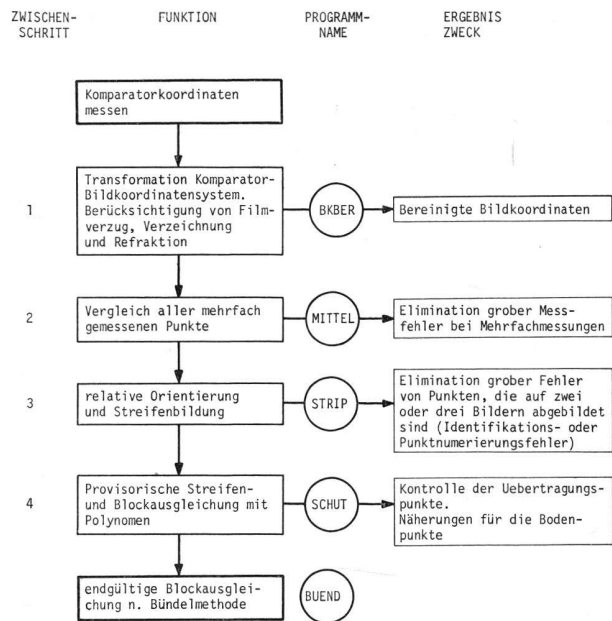
Abschließend sei noch erwähnt, daß man auch bei der Methode der unabhängigen Modelle nach einer ähnlichen Reduktion auf Matrizen mit Bandgestalt stößt. Man war bis heute allgemein der Ansicht, so den kleinsten Rechenaufwand gefunden zu haben. Wie in [3] gezeigt, ist dem nicht so: Durch ein völlig anderes Numerierungsprinzip und vor allem durch die Ausnützung *aller* in der reduzierten Matrix N_R enthaltenen Nullen kommt man nämlich zu einem bedeutend geringeren Rechenaufwand.

III. Arbeitsablauf der Blockausgleichung nach der Bündel-methode

Als Eingangsdaten in die Bündelausgleichung gehen die Bildkoordinaten und die genäherten Koordinaten der Bodenpunkte ein. Die Bildkoordinaten sind im Bildkoordinatensystem definiert; gemessen werden sie aber im Komparatorkoordinatensystem. Daraus geht hervor, daß die ursprünglich gemessenen Bildpunkte nicht direkt der Ausgleichung zugeführt werden können, sie müssen vielmehr zuerst in das Bildkoordinatensystem transformiert und gleichzeitig um den Einfluß der Objektivverzerrung, des Filmverzuges und der Refraktion korrigiert werden.

Es erweist sich nun aus organisatorischen Gründen als zweckmäßig, darüber hinaus noch weitere Zwischenschritte

einzuschalten, die theoretisch das Endergebnis der Ausgleichung in keiner Art und Weise beeinflussen, die aber für die praktische Durchführung überaus nützlich sind. Wenn nämlich einige tausend Messungen vorliegen, so muß mit einer gewissen Anzahl grober Fehler gerechnet werden (falsche Punktidentifikation, Punktnumerierungsfehler usw.). Man hat alles Interesse daran, möglichst viele grobe Fehler bereits vor der Ausgleichung zu eliminieren und die Ausgleichung gewissermaßen vom Kleinen ins Große vorzubereiten. Tafel 2 orientiert über die Zwischenschritte, wie sie sich am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z zur Durchführung einer Bündelausgleichung als zweckmäßig erwiesen haben.



Tafel 2

1. Komparatormessungen

Auf die den Messungen vorausgehenden Arbeiten, wie Punktauswahl, Punktidentifikation, Numerierung und Punktübertragung wird hier nicht eingegangen, es sei nur erwähnt, daß weitere Untersuchungen über die als besonders problematisch anzusehende Punktübertragung geplant sind.

Die Messungen der Bildpunkte werden am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie am Wild-Stereokomparator STK-2704 durchgeführt. Der Komparator ist ausgerüstet mit einem EK 6, einem Lochstreifenstanzer SL15 und einer Schreibmaschine IBM.

Die Punkte werden im allgemeinen zweimal unabhängig registriert, die Rahmenmarken jedoch zwei- bis viermal. Sind die Rahmenmarken als Kreuz abgebildet (vgl. Abb. 5), so wird auf den vier Strichen, die das Kreuz andeuten, je ein Punkt willkürlich ausgewählt und registriert. Daraus wird der Schnittpunkt gerechnet; er hat die gleiche Genauigkeit wie ein direkt gemessener Punkt.

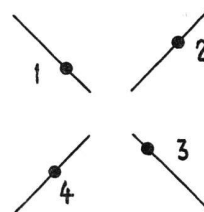


Abb. 5

Der Operateur ist vollkommen frei bei der Ausmessung der Bilder, insbesondere spielt die Reihenfolge keine Rolle. Das hat den Vorteil, daß vor den Messungen eine von Bild zu Bild verschiedene Reihenfolge so festgelegt werden kann, daß die Anfahrwege am Komparator möglichst klein werden. Erwähnt werden soll noch, daß bei größeren Operaten die Lochstreifen nicht mehr in Karten umgestanzt werden, das umfangreiche Datenmaterial wird vielmehr in ein sogenanntes Update-File umgewandelt, das auf einem Magnetband aufbewahrt wird. Für den genauen Vorgang sowie die Lochstreifenumwandlung wird auf [7] verwiesen.

2. Transformation Komparator/Bildkoordinatensystem

Wie schon mehrfach ausgeführt, werden die Bildpunkte im Komparatorkoordinatensystem ausgemessen; die Achsen dieses Systems sind definiert durch die x - und y -Tragschienen des Komparators.

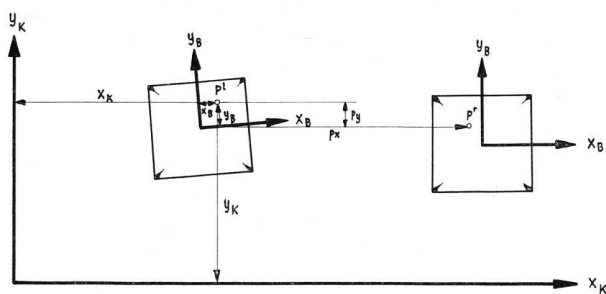


Abb. 6

Die Transformation wird auf Grund der beiden Systemen gemeinsamen Punkte – den Rahmenmarken – vollzogen (vgl. Abb. 6). Man setzt meistens einen affinen Ansatz an und hat damit den Vorteil, bis zu einem gewissen Grad systematische Filmschrumpfungen und systematische Komparatorfehler, wie nicht Senkrechtstehen der Tragschienen (Koordinatenachsen) und Maßstabsfehler berücksichtigen zu können.

Es kann hier im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auf die Probleme des Filmverzuges, der Schrumpfung der Emulsion und auf die Frage Platten oder Film eingegangen werden, es muß allerdings festgehalten werden – und Diskussionen in jüngster Zeit bestätigen es –, daß eine weitere Genauigkeitssteigerung der analytischen Aerotriangulation weniger von der Methode selbst, als vielmehr von der weiteren Abklärung gerade der oben angeschnittenen Fragen zu erwarten ist. *Unter anderem ist festzustellen, daß man mit nur vier Rahmenmarken – von denen nicht einmal mit Sicherheit bekannt ist, wie gut sie ausgebildet, abgebildet und kalibriert sind –, den Filmverzug und die Schrumpfung der Emulsion zu wenig gut in den Griff bekommt. Daraus ergibt sich der Wunsch an die Instrumentenfirmen, die Aufnahmekammern mit acht Rahmenmarken von genügender Präzision zu versehen.*

Anschließend an die Transformation Komparator/Bildkoordinatensystem werden im selben Programm (BKBER: Bildkoordinatenbereinigung) die Bildkoordinaten um die Einflüsse der optischen Verzeichnung, der Refraktion und eventuell um Fehler der inneren Orientierung der Meßkammer korrigiert. In diesem Zusammenhang wird auf die detaillierte Programmbeschreibung [8] verwiesen.

3. Vergleich und Mittelung aller mehrfach gemessenen Punkte

Beim Stereokomparator wird im allgemeinen modellweise gemessen. Wenn etwa die Bilder 72 bis 78 der Reihe nach ausgemessen werden sollen, so erhalten wir folgende Reihenfolge:

Linker Bildträger	Rechter Bildträger
72	73
74	73
74	75
76	75
76	77

Bei dieser Meßanordnung – ähnlich dem Prinzip Basis außen/Basis innen – kommen alle Bilder eines Streifens zweimal vor, mit Ausnahme des ersten und des letzten.

Die Aufgabe dieses Zwischenschrittes liegt darin, die gleichen Bildnummern zu vereinigen sowie alle mehrfach gemessenen Punkte zu vergleichen und zu mitteln.

4. Streifenbildung

In diesem Zwischenschritt werden die einzelnen Bilder eines Streifens sukzessive zueinander orientiert. Dadurch erhält man von jedem Bodenpunkt Koordinaten im Streifen-system, welches seinen Ursprung im Projektionszentrum des ersten Luftbildes hat und dessen Achsen parallel zu denjenigen des ersten Luftbildes liegen (vgl. Abb. 2).

Der Prozeß der Streifenbildung zerfällt bekanntlich in die beiden Teilschritte relative Orientierung und Maßstabsübertragung.

Die relative Orientierung erfolgt nach der Methode von Schut; die detaillierte Programmbeschreibung ist in [9] enthalten. Erwähnt sei hier nur noch, daß sich das Programm zuerst fünf günstig verteilte Punkte aussucht und mit diesen Näherungswerte für die relative Orientierung bestimmt. Hierauf werden die y -Parallaxen aller übrigen Punkte gerechnet und mit einer frei wählbaren Toleranz verglichen. Punkte, deren y -Parallaxe die Toleranz übersteigt, werden mit einer entsprechenden Fehlermeldung ausgedruckt. Schließlich wird die definitive Orientierung mit allen übrigen Punkten durchgeführt.

Bei der Maßstabsübertragung werden alle den beiden Modellen gemeinsamen Punkte verwendet. Der Maßstab wird als arithmetisches Mittel aus den Verhältnissen, gebildet zwischen den Strecken Projektionszentrum–Modellpunkt, bestimmt.

5. Provisorische Streifen- und Blockausgleichung mit Polynomen

Da die Fehlergleichungen aus einer Taylor-Entwicklung der Beobachtungsgleichungen (1) entstanden sind, müssen Näherungen für alle Unbekannten bestimmt werden. Um nicht unnötige Iterationen durchführen zu müssen, ist man an möglichst guten Näherungswerten interessiert. Der vorliegende Zwischenschritt wird dieser Forderung gerecht: man erhält durch eine provisorische Ausgleichung mit Polynomen sehr gute Näherungen für die unbekannt Bodenpunkte.

Bei dem hier benutzten Programm handelt es sich um das bekannte Polynomausgleichungsprogramm von Schut [4], das vom National Research Council of Canada freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurde.

IV. Das Bündelausgleichungsprogramm BUEND

Wir wollen uns im Rahmen dieser Arbeit auf einige wenige Aspekte des Programmes beschränken; eine detaillierte Programmbeschreibung wird demnächst vom Institut für Geodäsie und Photogrammetrie veröffentlicht.

Das Bündelprogramm BUEND wurde auf der CDC 6400/6500 Rechenanlage der ETH-Z entwickelt und ausgetestet. Es ist in Fortran IV geschrieben und verwendet, abgesehen vom Datentransfer Kern-externe Speicher, keine Systemroutinen. Eine Übernahme auf eine andere Rechenanlage dürfte somit mit keinen nennenswerten Schwierigkeiten verbunden sein. Es muß aber immerhin darauf hingewiesen werden, daß mit einem solchen Programm nur auf Großcomputern, die mit sehr schnellem Datentransfer Kern-externe Speicher ausgerüstet sind, vernünftig gerechnet werden kann.

Wie in Abschnitt III. bereits erwähnt, verlangt das Bündelprogramm als Eingangsdaten genäherte Werte für die unbekanntenen Bodenpunkte sowie die bereinigten Bildkoordinaten von jedem Luftbild. Bei einem Block mit 200 Bildern und 20 Punkten pro Bild ergeben sich etwa 1600 Bodenpunkte und 3200 Bildkoordinaten. Es liegt auf der Hand, die Ausgangsdaten solcher oder größerer Blöcke nicht in Kartenform, sondern auf einem Magnetband bereitzuhalten. Gegen dieses Konzept sprach früher der Umstand, daß es sehr schwierig war, einzelne Punkte zu korrigieren oder zu eliminieren; mit der heutigen modernen Software ist das aber ohne weiteres möglich (Updating).

Neben den Eingangsdaten fallen im Verlaufe der Berechnung weitere große Datenmengen an (zum Beispiel die Normalgleichungen). Eines der Hauptprobleme von BUEND war deshalb die zweckmäßige Abspeicherung und Verwaltung der Daten (es werden einige 100000 Speicherplätze benötigt). Das Problem wurde so gelöst, daß alle größeren «arrays» in Blöcken von 256 Zeilen unterteilt und auf Disk abgespeichert werden. Diese Technik hat den großen Vorteil, daß im Kernspeicher wenig Platz gebraucht wird, denn dort wird gleichzeitig immer nur ein Block benötigt. Aus diesem Grund ist es möglich, praktisch unbegrenzt große Blocktriangulationen bei einem Kernspeicherbedarf von nur 65000 Oktal durchzuführen zu können. Dabei könnte man durch eine Segmentierung des Programmes noch weitere Speicherplätze einsparen.

Im Programmablauf von BUEND – das übrigens etwa 2500 Fortran-Statements umfaßt – können 5 Phasen unterschieden werden, die wir der Reihe nach kurz besprechen wollen.

Die erste Phase dient vor allem der Organisation, umfassend die Dateneingabe, die formale Datenkontrolle und die Feststellung der Verknüpfungen. Die Datenkontrolle besteht aus verschiedenen Tests, die die Eingabedaten vor allem auf Vollständigkeit und Plausibilität prüfen. Wird ein Fehler festgestellt, so führt das – mit einer entsprechenden Fehlermeldung – nach dem vollständigen Einlesen zum Abbruch der Berechnungen.

Die Struktur der reduzierten Normalgleichungen ergibt sich, wie in Abschnitt 2 festgestellt, auf Grund der Verknüpfungen der Luftbilder. Jedes Bild ist durch gemeinsame Punkte mit einer gewissen Anzahl benachbarter Bilder verbunden, und dies festzustellen ist ebenfalls Aufgabe der Organisationsphase.

Die in diesem Programmteil auftretenden umfangreichen Such- und Sortierprozesse erfolgen exponentiell beziehungsweise logarithmisch.

Die zweite Phase umfaßt die Bildung der vollständigen Normalgleichungen. Bemerkenswert ist hier, daß die Fehlergleichungsmatrix nicht explizit in Erscheinung tritt: aus den Fehlergleichungen eines Bildpunktes wird sofort der Anteil an die Normalgleichungen gerechnet. Dabei kann der radiale Abstand in Form eines Gewichtes berücksichtigt werden. Man hat so die Möglichkeit, die Punkte am Bildrand oder in den Bildecken mit einem kleineren Gewicht zu versehen.

In der nächsten Phase wird die vollständige Normalgleichungsmatrix nach den Formeln (6) bis (11) reduziert und hernach in der 4. Phase aufgelöst. Der Auflösungsalgorithmus wird etwas kompliziert, da N_R stückweise auf Disk abgespeichert ist und sicher nie vollständig im Kernspeicher Platz finden wird. Die vom Institut für Baustatik und Massivbau freundlicherweise zur Verfügung gestellte Subroutine Bandmat (Anderheggen) bildet aus N_R die obere Dreiecksmatrix (Gaußsche Zerlegung), wobei als Pivotelemente der Reihe nach die Diagonalelemente genommen werden. Zwei weitere Schritte (Vorwärts- und Rückwärtselimination) ergeben schließlich die gesuchte Lösung, also die Transformationsparameter (Orientierungselemente) der Luftbilder. Da man jedoch in erster Linie an den ausgeglichenen (und in Phase 3 eliminierten) Bodenpunkten interessiert ist, müssen diese in einem nachfolgenden Schritt berechnet werden. In der letzten Phase schließlich wird auf Grund der absolut größten Verbesserung an einem der Drehwinkel ω , φ oder κ festgestellt, ob die Ausgleichung zu wiederholen ist. Ist dies der Fall, so sind die Programmschritte 2 bis 4 zu wiederholen, andernfalls werden die Verbesserungen an den Bildkoordinaten gerechnet und daraus der mittlere Fehler der Gewichtseinheit. Dazu folgt eine Resultatliste, die nebst den Orientierungselementen vor allem die ausgeglichenen Koordinaten der Bodenpunkte enthält. Diese Liste kann auf irgendein Ausgabemedium (Papier, Diskfile, Karten, Film) ausgegeben werden.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem kurzen Hinweis auf die Rechenzeiten, beziehungsweise auf die Rechenkosten, abschließen. Die in Figur 7 angegebenen Kosten beziehen sich auf

- die Preisverhältnisse, wie sie am 1. Januar 1972 am Rechenzentrum der ETH-Z gültig waren (1 CP-Sekunde kostet ungefähr Fr. 1.– und eine PP-Sekunde etwa Fr. 0.10),
- 9 Punkte pro Bild und einen Durchgang mit einer Iteration,
- regelmäßig geflogene Blöcke.

Die obere Kurve in Abbildung 7 zeigt die totalen Rechenkosten in Abhängigkeit der Blockgröße. Die untere Kurve stellt den Anteil, verursacht durch die Auflösung der Normalgleichungen, dar. Werden mehr als 9 Punkte auf einem Bild gemessen, so können die entstehenden Mehrkosten mit guter Annäherung so abgeschätzt werden, daß die Differenz zwischen den beiden Kurven in der Abbildung 7 proportional vergrößert wird.

Im Zusammenhang mit den mitgeteilten Rechenkosten muß auf das Preis-Leistungs-Verhältnis von Rechenanlagen verschiedener Größe aufmerksam gemacht werden: Ein Com-

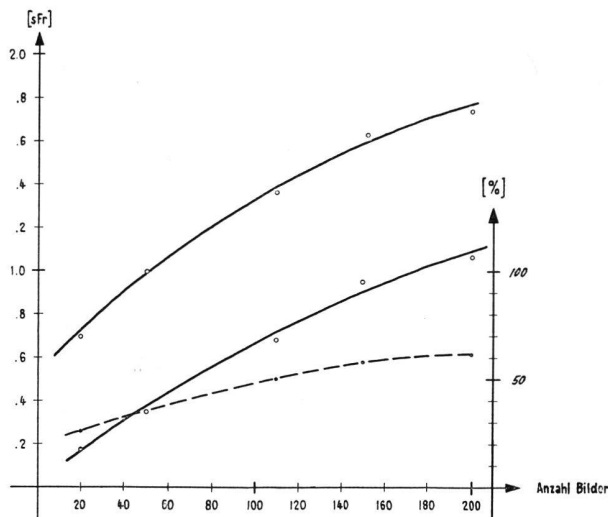


Abb. 7

puter mit doppelten Anschaffungskosten wird eine viermal größere Leistungsfähigkeit aufweisen; das heißt, daß dasselbe Problem nur noch rund die Hälfte kosten wird. Diese Tatsache ist einer der Gründe, Blocktriangulationen auf den größten zur Verfügung stehenden Computern zu rechnen. So sind auch die Preisangaben der Abbildung 7 zu betrachten: auf einer nächst höheren Anlage (zum Beispiel CDC 6600) wären die Preise nur noch halb so groß.

Abschließend darf festgestellt werden, daß sich die Rechenkosten im Vergleich zu den übrigen Kosten, wie Bildflug, Ausmessung der Bilder usw. recht bescheiden ausnehmen.

V. Schlußbemerkungen

Die vorliegende Arbeit soll mit einem Hinweis auf die zu erwartenden Genauigkeiten und auf zwei Anwendungsmöglichkeiten der vorgestellten Programmkonzeption abgeschlossen werden.

Angesichts der großen Anzahl von Unbekannten in der Normalgleichungsmatrix kann vorläufig an ihre Inversion nicht gedacht werden. Damit schließt man die Möglichkeit aus, mittlere Fehler oder gar Fehlerellipsen von Unbekannten zu berechnen. Als einziges Kriterium, die erreichte Genauigkeit einer Blocktriangulation zu beurteilen, steht der mittlere Fehler der Gewichtseinheit zur Verfügung, also der mittlere Fehler an den Bildpunktkoordinaten. Multipliziert man ihn mit dem Bildmaßstab, so läßt sich dadurch der mittlere Punktlagefehler der Bodenkoordinaten abschätzen. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit lag für alle bis jetzt am Institut durchgeführten Blocktriangulationen zwischen $\pm 5 \mu\text{m}$ und $\pm 8 \mu\text{m}$. Dieses Ergebnis stimmt gut mit den Erfahrungen anderer Stellen, welche die Bündelmethode anwenden, überein.

Die Hauptanwendungsmöglichkeit besteht in der klassischen Aufgabe der Aerotriangulation, also in der Bestimmung von Paßpunkten für die absolute Orientierung der Modelle am Autographen. Die Orientierungselemente der Bilder, die ja durch die Ausgleichung ebenfalls bestimmt werden, können am Auswertegerät eingestellt werden. *Damit beschränkt sich die relative und absolute Orientierung eines Modelles auf ein Minimum.* Dies ist, zusammen mit der Tatsache, daß die Messungen am Komparator schneller und von weniger geübtem Personal durchgeführt werden

können, der Hauptvorteil der Bündelmethode. Dazu sei nochmals erwähnt, daß die Methode allen anderen Verfahren in fehlertheoretischer Hinsicht überlegen ist.

Eine zweite Anwendungsmöglichkeit besteht darin, nicht nur die Punkte zu bestimmen, die zur absoluten Orientierung am Auswertegerät gebraucht werden, sondern *alle* gewünschten Bodenpunkte des betreffenden Operates. Der Verfasser denkt dabei insbesondere an die Grundbuchvermessung: Es ist ohne weiteres möglich, alle Punkte, von denen Koordinaten gewünscht werden (also insbesondere alle Grenzpunkte), am Komparator auszumessen und durch die Bündelausgleichung zu bestimmen. Man kann sich dabei das überlegene Meßmittel (Komparator gegenüber Autograph) und das fehlertheoretisch strengste Ausgleichungsverfahren zunutze machen.

Welches sind die dabei zu erwartenden Genauigkeiten? Nach den Ausführungen zu Beginn dieses Abschnittes kann die Punktgenauigkeit so abgeschätzt werden, daß der mittlere Gewichtseinheitsfehler mit dem Bildmaßstab multipliziert wird. Nimmt man einen Bildmaßstab von 1:5000 und einen Gewichtseinheitsfehler von $\pm 6 \mu\text{m}$ an – also beides realistische Werte –, so wird die Genauigkeit eines Punktes ungefähr $\pm 3 \text{ cm}$. Voraussetzung dazu ist allerdings eine genügende Paßpunktdichte. Versuche haben gezeigt, daß die Triangulationspunkte, eventuell ergänzt mit Einschaltpunkten, für eine Bündelausgleichung ausreichen.

Der bewährte geodätische Grundsatz, daß *eine* Messung keine Messung ist, läßt sich ohne weiteres auch hier realisieren, indem der ganze Block zweimal geflogen und ausgewertet wird. Dadurch werden nicht nur die groben Fehler eliminiert, sondern auch die Blockstabilität erhöht, vorausgesetzt, daß der zweite Flug genau über die seitliche Überlappung des ersten erfolgt.

Wir können hier im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auf weitere Details eingehen. Ziel war es, über die neue Programmkonzeption und insbesondere über das Bündelausgleichungsprogramm BUEND zu informieren. Der Verfasser hofft, damit den Diskussionen um den Einsatz der (analytischen) Photogrammetrie einige neue Impulse zu geben.

Literatur

- [1] Schmid H.H., Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie. BuL. 1958, 103–113, und BuL. 1959, 1–12.
- [2] Kubik K. und Kure J., ISP investigation into the accuracy of photogrammetric triangulation. Intermediate report 1971.
- [3] Schenk T., Numerische Untersuchungen zur photogrammetrischen Blocktriangulation nach der Bündelmethode. Diss. Nr. 4861 der ETH-Z.
- [4] Schut G.H., A Fortran Program for the adjustment of strips and of blocks by polynomial transformations. NRCC-9265, Febr. 1968.
- [5] Klein H., Rechenprogramme und Rechenanlagen für die Ausgleichung großer Blöcke. Vortrag an den photogrammetrischen Wochen 1971, Karlsruhe.
- [6] King C.W.B., Programming considerations for adjustment of aerial triangulation. Phia 23, S. 5–18, 1968.
- [7] Schenk T., Programmbeschreibung STK: Umwandlung von Lochstreifen. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z.
- [8] Schenk T., Programmbeschreibung BKBER: Bildkoordinatenbereinigung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z.
- [9] Schenk T., Programmbeschreibung STRIP: analytischer Folgebildanschluß. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH-Z.