

<b>Zeitschrift:</b>	Mensuration, photogrammétrie, génie rural
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)
<b>Band:</b>	70-F (1972)
<b>Heft:</b>	3
<b>Artikel:</b>	Zur Bildung der Kofaktorenmatrix der Unbekannten einer durch Vereinigung von Teilausgleichungen entstandenen Gesamtausgleichung
<b>Autor:</b>	Wunderlin, N.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-225002">https://doi.org/10.5169/seals-225002</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zur Bildung der Kofaktorenmatrix der Unbekannten einer durch Vereinigung von Teilausgleichungen entstandenen Gesamtausgleichung

N. Wunderlin

## Zusammenfassung

Für den Zusammenschluß von Teilausgleichungen zu einer Gesamtausgleichung nach Helmert/Pranis-Praniewitsch werden die Formeln zur Berechnung der Kofaktorenmatrix der Unbekannten zusammengestellt. Ein Beispiel zeigt die Anwendung auf einen Spezialfall.

## Résumé

On rappelle les formules pour le calcul de la matrice des cofacteurs des inconnues d'une compensation qui résulte d'une combinaison d'après Helmert/Pranis-Praniewitsch de compensations partielles. Un exemple montre l'application au problème d'un cas spécial.

## 1. Einleitung

Wenn ein System von Normalgleichungen – zum Beispiel bei einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate – nicht als Ganzes gelöst werden kann, sei es, daß die dazu zur Verfügung stehende Rechenanlage dies nicht erlaubt, sei es, daß nicht alle Teile des Gesamtsystems zu gleicher Zeit bereit stehen, so lassen sich nach bekannten Verfahren die für sich gelösten Teilsysteme nachträglich «vereinigen», das heißt, es lassen sich die Resultate ableiten, die bei einer Lösung des Gesamtsystems gefunden worden wären. Zum Beispiel erfolgt ein solches Aufspalten in Teilsysteme oder «Blöcke» bei der Neuausgleichung der europäischen Triangulationen (RETrig), indem die einzelnen Länder ihre Landesnetze vorerst für sich ausgleichen und der Zusammenschluß stufenweise später erfolgen soll. Aber auch die Ausgleichung eines Landesnetzes muß oft gezwungenerweise wegen zu geringer Kapazität der zur Verfügung stehenden Rechenanlage stückweise vorgenommen werden mit nachträglicher Vereinigung der Teilausgleichungen.

Während das Vorgehen zur Berechnung der *Unbekannten* bei solchen Zusammenschlüssen von Normalgleichungsböcken zu einem Gesamtsystem gut bekannt ist ([2], [4], [5], [7] und andere), scheint die Bestimmung der *Inversen* des Gesamtsystems, das heißt seiner Kofaktoren oder reziproken Gewichtskoeffizienten, heute wenig Aufmerksamkeit zu finden. Dies mag hauptsächlich zwei Gründe haben: Erstens ist bei einer bestimmten Größe des Gesamtsystems der Aufwand an Computerkapazität, Rechenzeit, Papier usw. beträchtlich (man denke etwa an die Inverse der Normalgleichungsmatrix des RETrig), oder aber es besteht gar kein Interesse an diesen Koeffizienten (auch hier sei das RETrig erwähnt, wo wohl nur ausnahmsweise die reziproken Gewichtskoeffizienten von Punktkoordinaten etwa zwischen dem schweizerischen und dem holländischen Netz benötigt werden).

Aber gerade am Beispiel des RETrig läßt sich auch die Wünschbarkeit, teilweise sogar die Notwendigkeit der Aufstellung der Inversen des Gesamtsystems oder wenigstens

einzelner Teile davon zeigen. – Zur Wünschbarkeit: Auch die Kofaktoren der «inneren» Unbekannten der selbständigen Ausgleichungen der einzelnen Blöcke erfahren natürlich beim Übergang zu der Gesamtausgleichung Änderungen, wobei diese in den zentralen Gebieten der Blöcke zwar gering sein mögen, aber um so mehr anwachsen, je näher man den Nahtlinien zu anstoßenden Ausgleichungsblöcken kommt. Und die Bestimmung des Einflusses der Verknüpfungen mit den Nachbarnetzen – nicht nur auf die Werte der Punktkoordinaten selbst, sondern auch auf ihre mittleren Fehler und Korrelationen – ist ja eines der Ziele des RETrig. – Zur Notwendigkeit: Gerade die Schweiz, deren Teil des Landesnetzes westlich der Linie Faux d'Enson-Ruinettes dem Ausgleichungsblock Frankreich zugewiesen wurde, hätte ohne Aufstellung des interessierenden Teiles der *Gesamtinversen* des RETrig nicht einmal alle reziproken Gewichtskoeffizienten in ihrem eigenen Lande zur Verfügung.

Obwohl die Theorie der Berechnung der Inversen der Normalgleichungsmatrix eines aus Teilen zusammengesetzten Gesamtsystems schon seit Helmert und Boltz im wesentlichen bekannt ist und in [1] auch eine elegante Darstellung in Matrizenbeschreibung vorliegt, sind dennoch Hinweise in den Lehrbüchern nicht oder nur explizit und versteckt zu finden, und auch Publikationen über durchgeführte praktische Beispiele sind mir nicht bekannt. Es scheint daher nicht unnütz, die Formeln nochmals zusammenzustellen und soweit möglich an Beispielen ihre Anwendung zu zeigen. Zur Vereinfachung wird dabei nur der Fall eines aus *zwei* Teilsystemen zusammengesetzten Gesamtsystems dargestellt, weil bei mehr als zwei Teilen das Problem zwar nicht gedanklich, aber doch darstellungsmäßig komplizierter wird und ja auch bei einem mehrteiligen System praktisch immer ein Vorgehen in aufeinanderfolgenden Schritten von je zwei Zusammenschlüssen sich aufdrängen wird.

## 2. Formeln

Die Normalgleichungen des Gesamtsystems in Matrizen-darstellung seien:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{T}_1 & & \mathbf{U}_1 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{w}_1 & \\ \hline & \mathbf{T}_2 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{x}_2 & + & \mathbf{w}_2 \\ \hline \mathbf{U}_1' & \mathbf{U}_2' & \mathbf{V} & \mathbf{y} & & \mathbf{f} \\ \hline \end{array} = 0 \quad (1)$$

Diese Matrix sei entstanden aus der «Zusammensetzung», das heißt der Addition der beiden Teilsysteme:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & & \mathbf{U}_1 & & \mathbf{x}_1 & & \mathbf{w}_1 \\ & & & & & & \\ & & & & & + & \\ & & & & & & \\ \mathbf{U}_1' & & \mathbf{V}_1 & & \mathbf{y} & & \mathbf{f}_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2a)$$

und

$$\begin{vmatrix} & & \mathbf{T}_2 & & \mathbf{U}_2 & & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{w}_2 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & + & & \\ & & & & & & & & \\ \mathbf{U}_2' & & \mathbf{V}_2 & & \mathbf{y} & & \mathbf{f}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2b)$$

Es ist also  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$  und  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ .

In einem Computer müssen natürlich die Matrizen der Teilsysteme nicht unbedingt wie hier getrennt zusammengestellt sein; eine Markierung der Koeffizienten, ob zu einer Unbekannten  $x$  gehörend, die nur in *einem* der Teilsysteme vorkommt, oder zu einer in *beiden* Blöcken auftretenden «Verbindungsunbekannten»  $y$ , genügt.

Um zu zeigen, wie sich – zunächst rein formal – die Inverse des Gesamtsystems (1) ausdrücken lässt durch Größen der Teilsysteme (2a) und (2b), muß auf eine in der Matrizenrechnung allgemein gültige Beziehung – zum Beispiel [5] – zurückgegriffen werden:

Formel 3 siehe unten

Diese Gleichung, die durch Multiplikation der Ausgangsmatrix mit ihrer Inversen leicht nachgeprüft werden kann, führt bei Anwendung auf unser Problem:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & \mathbf{U}_1 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1' & \mathbf{U}_2' & \mathbf{V} \end{vmatrix}^{-1} = ?$$

wegen der Vereinfachungen

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{U}_1' & \mathbf{U}_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{vmatrix} = \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2$$

zu dem folgenden Ausdruck für die Inverse des Gesamtsystems:

Formel 4a und 4b siehe unten

mit  $(\ )^{-1} = (\mathbf{V} - \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2)^{-1}$  (4c)

und  $\mathbf{E}$  = Einheitsmatrix

Auch dieser Ausdruck lässt sich leicht verifizieren durch Ausführung der Multiplikation

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & \mathbf{U}_1 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1' & \mathbf{U}_2' & \mathbf{V} \end{vmatrix} \quad (4) \quad = \mathbf{E}$$

Beim praktischen Vorgehen bestehen verschiedene Möglichkeiten zur Bildung der einzelnen Elemente der Matrix (4):

Fall I:

Die Ausgangs-Normalgleichungen (2a) und (2b) der beiden Teilsysteme sind gegeben, das heißt, bei der Bearbeitung der Teilsysteme ist bekannt, daß nachträglich die Inverse des Gesamtsystems zu bilden ist, und ebenfalls bekannt sind die «innern» (im andern System nicht auftretenden) Unbekannten und die «Verbindungsunbekannten» (in beiden Systemen auftretend).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{C} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C} - \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} & - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C} - \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \\ - (\mathbf{C} - \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} & (\mathbf{C} - \mathbf{B}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & \mathbf{U}_1 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_1' & \mathbf{U}_2' & \mathbf{V} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} + \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 (\ )^{-1} \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} & \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 (\ )^{-1} \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} & - \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 (\ )^{-1} \\ \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 (\ )^{-1} \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} & \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 (\ )^{-1} \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} & - \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 (\ )^{-1} \\ - (\ )^{-1} \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} & - (\ )^{-1} \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} & (\ )^{-1} \end{vmatrix} \quad (4a)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 \\ - \mathbf{E} \end{vmatrix} (\ )^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} & \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} & - \mathbf{E} \end{vmatrix} \quad (4b)$$

a) Nach der Invertierung der Untermatrizen  $T_1$  und  $T_2$  aus den Normalgleichungssystemen (2a) und (2b) – enthaltend nur je die «innern» Unbekannten des betreffenden Teilsystems – können alle in den Ausdrücken (4a) oder (4b) und (4c) auftretenden Glieder durch Matrizenmultiplikation gebildet werden.

b) Werden wie üblich nach Helmert oder Pranis-Praniewitsch (zum Beispiel [2], [5], [7]) in den Normalgleichungssystemen

$$\left| \begin{array}{c|c} T_1 & U_1 \\ \hline U_1' & V_1 \end{array} \right| \quad (2a) \quad \text{bzw.} \quad \left| \begin{array}{c|c} T_2 & U_2 \\ \hline U_2' & V_2 \end{array} \right| \quad (2b)$$

die «innern» Unbekannten schrittweise «von oben nach unten» eliminiert – etwa durch eines der üblichen Reduktions- oder Austauschverfahren [6] – so enthalten die verbleibenden «teilreduzierten» Normalgleichungen die Ausdrücke

$$\left| \begin{array}{c|c} T_1^{-1} & -T_1^{-1} U_1 \\ \hline U_1' T_1^{-1} & V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1 \end{array} \right| \quad (5)$$

und analog für das System 2

also gerade die für die Bildung der Gesamtinversen (4) benötigten Elemente.

Fall II:

Die beiden Teil-Normalgleichungssysteme (2a) und (2b) sind unabhängig voneinander *vollständig* invertiert worden (und nicht mehr erhalten), das heißt es wurden gebildet (und sind noch vorhanden) die Matrizen

$$\left| \begin{array}{c|c} T_1 & U_1 \\ \hline U_1' & V_1 \end{array} \right|^{-1} \quad \text{und} \quad \left| \begin{array}{c|c} T_2 & U_2 \\ \hline U_2' & V_2 \end{array} \right|^{-1}$$

was rein formal nach der Beziehung (3) geschrieben werden kann als

$$\left| \begin{array}{c|c} T_1 & U_1 \\ \hline U_1' & V_1 \end{array} \right|^{-1} = \left| \begin{array}{c|c} T_1^{-1} + T_1^{-1} U_1 \{ \}^{-1} U_1' T_1^{-1} & -T_1^{-1} U_1 \{ \}^{-1} \\ -\{ \}^{-1} U_1' T_1^{-1} & \{ \}^{-1} \end{array} \right| \quad (6)$$

mit  $\{ \}^{-1} = (V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1)^{-1}$

und analog für das zweite Teilsystem.

Um aus der vorhandenen Matrix rechts in der Gleichung (6) die im Ausdruck (4) für die Gesamtinverse benötigte Matrix  $-T_1^{-1} U_1$  zu erhalten, das heißt um die zu weit getriebene, auch die Verbindungsunbekannten erfassende Inversion des Teilsystems rückgängig zu machen, muß der Matrixteil  $\{ \}^{-1}$  wieder invertiert werden zu

$$\{ \} = V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1$$

worauf durch die Multiplikation

$$(-T_1^{-1} U_1 \{ \}^{-1}) \{ \}$$

aus (6)

die gesuchte Matrix  $-T_1^{-1} U_1$  gefunden ist.

Ferner steht in  $\{ \} = V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1$  auch gerade der Beitrag des Teilsystems 1 zu den «teilreduzierten» Normalgleichungen der Verbindungsunbekannten im Gesamtsystem

$$V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1 + V_2 - U_2' T_2^{-1} U_2$$

zur Verfügung.

Dasselbe Vorgehen ist auch auf das Teilsystem 2 anzuwenden und liefert  $-T_2^{-1} U_2$  sowie den Beitrag  $V_2 - U_2' T_2^{-1} U_2$  des Systems 2 zu den Verbindungsnormalgleichungen.

Es wird, wenn eine leistungsfähige Rechenanlage zur Verfügung steht, im allgemeinen natürlich einfacher sein, die ursprünglichen, ohne Berücksichtigung von Verbindungsunbekannten ausgeführten Ausgleichungen aufzugeben und die Teilsysteme nach einem der Verfahren Ia oder Ib neu zu bearbeiten (wenn sie sich nicht ohnehin als Gesamtsystem berechnen lassen). Immerhin sind Fälle denkbar, wo das Verfahren II mit bedeutend geringerem Rechenaufwand zum Ziele führt, nämlich dann, wenn die beiden vorausgeglichenen Teilsysteme nur sehr wenige gemeinsame (Verbindungs-) Unbekannte besitzen, wie etwa die RETrige-Teilblöcke Skandinavien und Deutschland oder Großbritannien und Frankreich, oder ein nachträglich einzuschaltender Einzelpunkt in einem umfangreichen Triangulationsnetz. Auch die Verknüpfung zweier im übrigen völlig getrennter Höhenwinkelnetze durch einen beiden Netzen gemeinsamen Refraktionskoeffizienten als einzige Verbindungsunbekannte, oder der analoge Fall bei Lagenetzen (Verknüpfung durch eine einzige verbindende Unbekannte in Form eines gemeinsamen Maßstabfaktors der Distanzmessungen beider Netze) sind denkbare Gebrauchsfälle für dieses Vorgehen. Eine weitere mögliche Anwendung ist als durchgerechnetes Beispiel unten gezeigt.

### 3. ALGOL-Programm

Am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich ist von A. Carrasch ein Ausgleichungsprogramm für geodätische Netze geschaffen worden, das auch die Behandlung korrelierter Beobachtungen gestattet und die reziproken Gewichtskoeffizienten  $Q_{vv}$  der Verbesserungen  $v$  bildet. Mit diesem anspruchsvollen Programm war es anfänglich nicht möglich (die Kapazität des Programms ist unterdessen wesentlich gesteigert worden durch Ausnutzung der Symmetrie der Matrizen bei Speicherung in Bandform) das schweizerische Netz 1. Ordnung auf der Rechenanlage des Rechenzentrums der ETH-Z auszugleichen, da der zur Verfügung stehende Speicherplatz nicht genügte. Hauptsächlich um diese Ausgleichung zu ermöglichen, wurde das Programm umgearbeitet, so daß in *einem* Computerdurchlauf zwei Teillnetze nach dem Verfahren Ib «teilreduziert» und anschließend «vereinigt» werden können, wobei auch die Inverse des Gesamtsystems nach den Formeln (4) gebildet und ausgedruckt wird. Die oben erwähnten wertvollen Möglichkeiten des ursprünglichen Programms (korrelierte Beobachtungen und  $Q_{vv}$ -Matrix) bleiben gewahrt.

Da der Speicherplatzbedarf bei Aufspaltung einer Ausgleichung sinkt von rund  $\frac{1}{2} (n_1 + n_2 + n_v)^2$  auf rund  $\frac{1}{2} (n_1 + n_v)^2$  bzw.  $\frac{1}{2} (n_2 + n_v)^2$ ,

$n_1$	$n_2$	$n_v$	$n_1$	$n_v$	$n_2$	$n_v$
$T_1$	$U_1$		$T_1$	$U_1$	$T_2$	$U_2$
$T_2$	$U_2$		$V_1$		$V_2$	
		$V_1 + V_2$				

Gesamtsystem

Teilsysteme

bzw.

so ist also zur besten Ausnützung des Speicherplatzgewinns bei der Zerlegung darauf zu achten, daß die beiden Teilsysteme je etwa gleich viele innere Unbekannte enthalten, und daß die Zahl der Verbindungsunbekannten klein ist. – Auf diese Weise lassen sich mit dem abgeänderten Programm Systeme von rund 200 Unbekannten/400 Beobachtungen ausgleichen. Bei Einführung der Bandspeicherung der Matrizen und Ausnützung ihrer Symmetrien ließe sich die Kapazität weiter steigern.

#### 4. Beispiele

Das praktische Vorgehen bei Zusammenschlüssen von Teilsystemen mit Bildung der Normalgleichungsinversen nach Gleichung (4) läßt sich an tatsächlich durchgeföhrten Beispielen schlecht zeigen: Die Berechnungen erfolgen auf einer elektronischen Rechenanlage, wobei die *Resultate*, die umfangreichen Zahlentabellen der Kofaktoren, sich hier nicht darstellen lassen und auch wenig interessieren, und die eigentliche «*Technik*» des Zusammenschließens in der Formulierung des Computerprogrammes liegt, auf die hier nicht eingetreten werden kann. Es wird deshalb nur kurz auf die im Abschnitt 3 erwähnte Ausgleichung des Triangulationsnetzes 1. Ordnung der schweizerischen Landesvermessung eingetreten, welche nach diesem Verfahren erfolgte, und dann an einem «künstlichen» Beispiel versucht, einen Einblick in das Vorgehen zu gewähren. Es handelt sich dabei um ein Problem zu Fall II – nachträglicher Zusammenschluß zweier bereits ausgeglichener Systeme –, bei dem alle Operationen noch auf einer Tischrechenmaschine durchgeföhr werden können und das praktische Vorgehen gezeigt werden kann.

##### a) *Triangulationsnetz 1. Ordnung der schweizerischen Landesvermessung*

Mit dem erwähnten ALGOL-Programm wurden die Richtungsbeobachtungen (ohne Distanzmessungen) des schweizerischen Landesnetzes ausgeglichen. Die Nahtlinie zwischen den beiden Teilnetzen (Abb. Seite 77) wurde dabei nicht durch die Triangulationspunkte gelegt, sondern zwischen ihnen geführt, um auf keiner Station die Richtungssätze auf die Teilnetze aufzuspalten zu müssen, das heißt überall die Beobachtungen vollständig dem einen oder dem andern Netzteil zuweisen zu können. Damit wurde erreicht, daß die aus den vorangegangenen Stationsausgleichungen entstandenen Kofaktoren zwischen den Richtungen einer Station ohne Schwierigkeit in die Netzausgleichung eingeführt werden konnten. Es traten so keine Orientierungsunbekannten mehr als Verbindungsunbekannte auf wie beim Legen der Naht durch die Stationspunkte selbst, jedoch wurde die Zahl der Koordinaten-Verbindungs-Unbekannten ungefähr verdoppelt, was zur Wahl einer möglichst kurzen Nahtlinie zwang, da ja eine größere Zahl von Verbindungsunbekannten den Platzbedarf im Computer ent-

sprechend erhöht. Auch für die Wahl der *Lage* der Naht blieb nicht mehr viel Spielraum, weil die beiden Teilnetze, ebenfalls um den Speicherplatz gut auszunützen, möglichst gleich viele Unbekannte enthalten sollten. – Als Festpunkte wurden, ziemlich willkürlich, Dent-du-Midi und Hoher Freschen gewählt.

Es wurden zwei Ausgleichungen durchgeföhr, einmal mit den Gewichten  $p = 1$  für alle Beobachtungen, einmal mit Berücksichtigung der aus den Stationsausgleichungen entstandenen Kofaktorenmatrizen, genauer mit denjenigen Inversen  $P$  dieser  $Q$ -Matrizen, welche die kleinste Quadratsumme der Glieder außerhalb der Diagonalen aufweisen (Helmertsche Gewichtsmatrizen<sup>1</sup>). Im übrigen besteht zwischen den beiden Ausgleichungen kein Unterschied.

Der zum Thema dieses Artikels – Bildung der Gesamtinversen bei Ausgleichung in Teilen – gehörende Teil der Resultate, die Kofaktorenmatrix der Unbekannten (Punktkoordinaten und Orientierungen der Richtungssätze), kann hier natürlich wegen ihres Umfangs nicht reproduziert werden. Eine Darstellung der mittleren Fehlerellipsen der Punktkoordinaten (bezogen auf die beiden willkürlich gewählten Festpunkte Dent-du-Midi und Hoher Freschen) ist in der Abbildung Seite 78 gegeben. Die Fehlerellipsen der Ausgleichung mit  $p = 1$  für sämtliche Richtungen sind im Durchschnitt etwa 10% kleiner.

Zu den übrigen Ergebnissen soll hier nur erwähnt werden, daß die Unterschiede zwischen den ausgeglichenen Koordinaten der beiden Ausgleichungen (unkorrelierte Beobachtungen mit  $p = 1$  und korrelierte Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten) im Verhältnis zu ihren mittleren Fehlern (im Durchschnitt  $\pm 16$  cm) klein sind:

$$\begin{array}{ll} |\Delta Y|_{\text{mittel}} = 4,5 \text{ cm} & |\Delta X|_{\text{mittel}} = 6,9 \text{ cm} \\ |\Delta Y|_{\text{max}} = 16 \text{ cm} & |\Delta X|_{\text{max}} = 19 \text{ cm} \end{array}$$

obwohl die Gewichte bei den korrelierten Beobachtungen entsprechend der sehr unterschiedlichen Zahl der Messungen stark variieren:  $p_{\min} = 0,2$ ,  $p_{\max} = 9$ . Dieses Ergebnis war wegen der «Stärke» des Netzes zu erwarten und ist übrigens für den RETrig-Anteil der Schweiz schon früher gezeigt worden [3].

##### b) *Nachträglicher Anschluß eines bereits ausgeglichenen Polygonzuges an einen Festpunkt*

Aus Gründen der Darstellungsmöglichkeit mußte ein sehr kleines Beispiel mit wenigen Unbekannten gewählt werden, das praktisch natürlich nicht auf diese Weise behandelt, sondern einfach als Ganzes neu ausgeglichen würde, im Prinzip aber auch in der Praxis in ähnlicher Form auftreten könnte.

In einem bereits ausgeglichenen Polygonzug A-1-2-3-B (ohne Anschlußrichtung in B) werde nachträglich der Punkt 2 von einem nahegelegenen Festpunkt C aus mit Richtung und Distanz angeschlossen. Welche Änderungen erfährt dadurch die Matrix  $Q$  der reziproken Gewichtskoeffizienten der Koordinaten der Polygonpunkte?

<sup>1</sup> Vgl. etwa: W. Höpcke. Einige Ergänzungen zur Theorie der Richtungsmessungen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1969, Heft 3.

Teilnetz 1

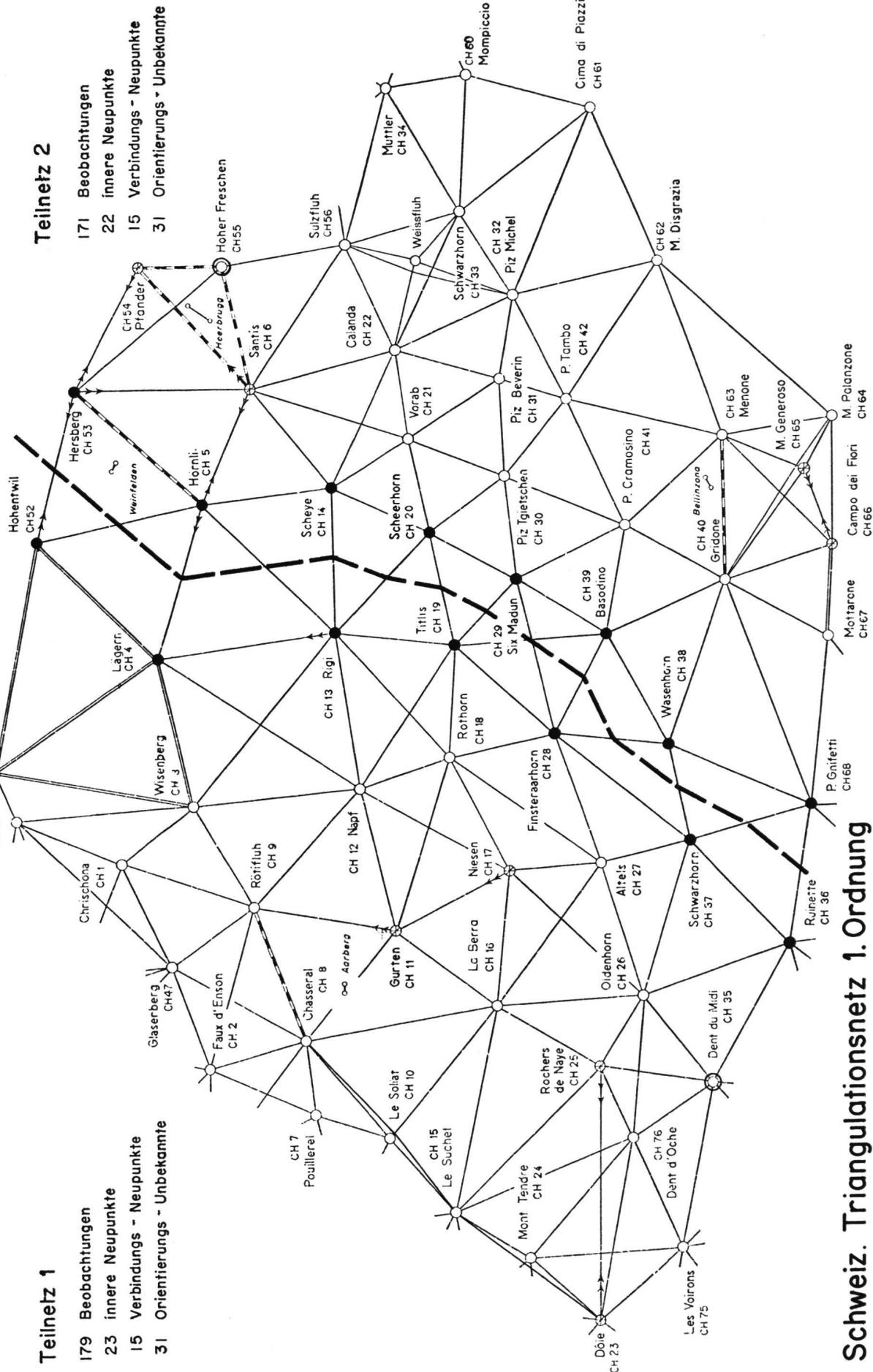
- 179 Beobachtungen
- 23 innere Neupunkte
- 15 Verbindungs - Neupunkte
- 31 Orientierungs - Unbekannte

Feldberg

Belchen

Teilnetz 2

- 171 Beobachtungen
- 22 innere Neupunkte
- 15 Verbindungs - Neupunkte
- 31 Orientierungs - Unbekannte



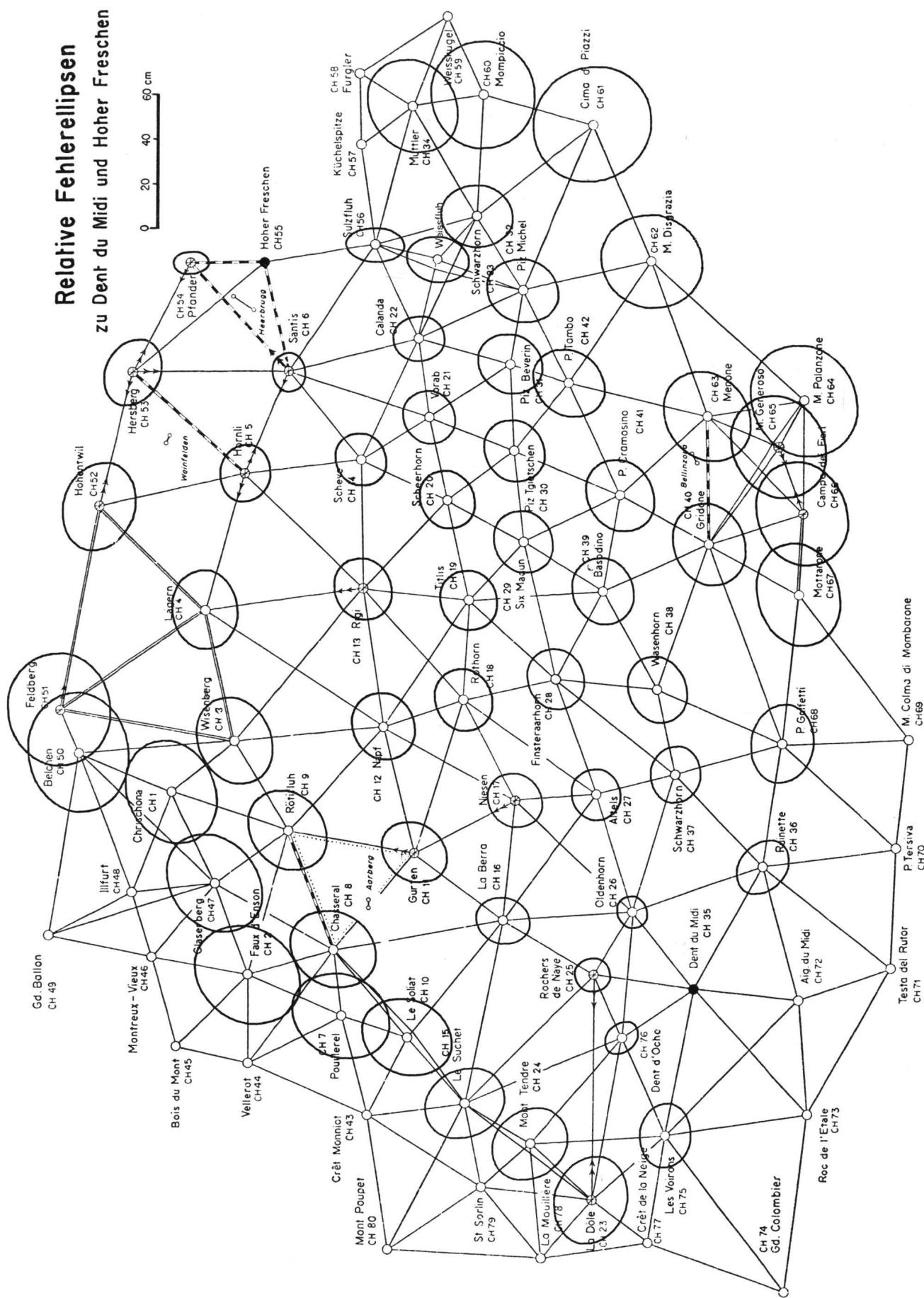
Schweiz. Triangulationsnetz 1. Ordnung

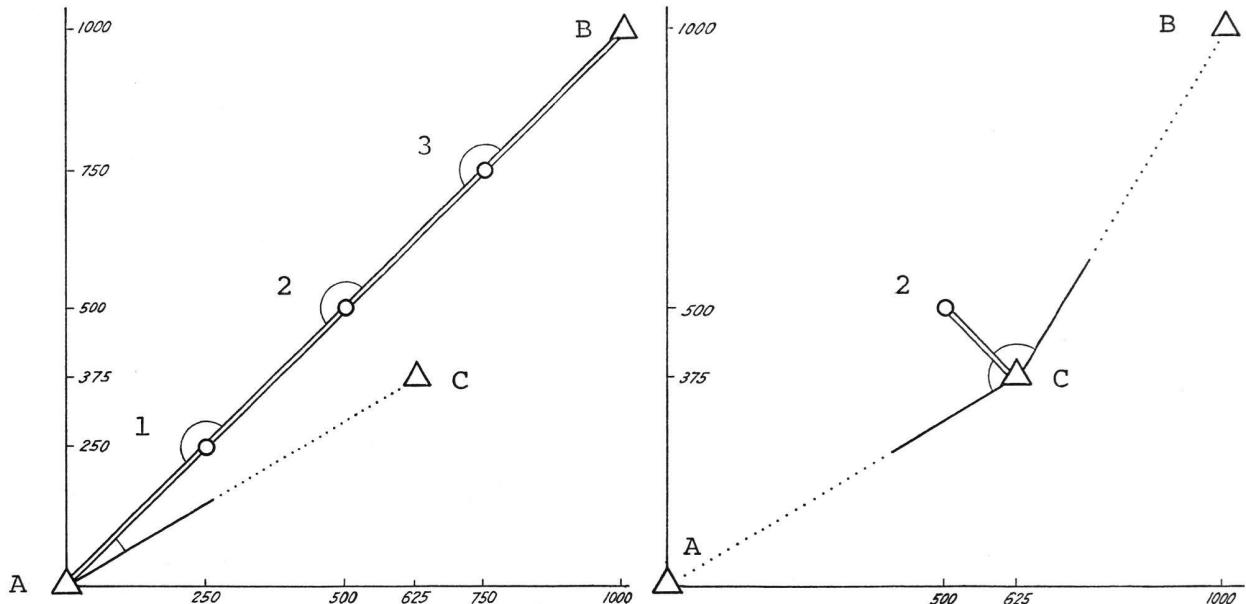
350 Beobachtungen

182 Unbekannte

# Relative Fehlerellipsen

zu Dent du Midi und Hoher Freschen





### System I

Beobachtungen:

$$\begin{array}{rcl} \text{Richtungen} & 8 \text{ (4 Winkel)} \\ \text{Distanzen} & 4 \\ \hline & 12 \end{array}$$

Unbekannte:

$$\begin{array}{rcl} \text{Koordinaten} & 6 \text{ (3 · 2)} \\ \text{Orientierung} & 4 \\ \hline & 10 \end{array}$$

2 gemeinsame (Verbindungs-)Unbekannte:  
Koordinaten von  $PP_2$

### System II

Beobachtungen:

$$\begin{array}{rcl} \text{Richtungen} & 3 \text{ (2 Winkel)} \\ \text{Distanzen} & 1 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Unbekannte:

$$\begin{array}{rcl} \text{Koordinaten} & 2 \text{ (1 · 2)} \\ \text{Orientierung} & 1 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Für die Inversen der Normalgleichungsmatrizen der beiden Systeme I und II erhielt man:

Die Verbindungsunbekannten – die in beiden Systemen vorkommenden Unbekannten – sind die beiden Koordinaten ( $Y, X$ ) des Punktes 2, das heißt die Unbekannten Nr. 7 und Nr. 8 im Teilsystem I und die Unbekannten Nr. 2 und Nr. 3 im System II. Die zugehörigen Zeilen und Spalten sind in den Matrizen umrandet; trotzdem sie im System I nicht am «richtigen» Ort stehen, entsprechen sie in der Gleichung (6) der Kolonne zuerst rechts und stellen die Matrizen  $-\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 \{ \}^{-1}$  bzw.  $-\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 \{ \}^{-1}$  dar. Die doppelt umrandeten Felder bilden die Matrizen  $\{ \}^{-1}$  der Gleichung (6), das heißt  $(\mathbf{V}_1 - \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1)^{-1}$  bzw.  $(\mathbf{V}_2 - \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2)^{-1}$ .

1 Die Inversion der beiden doppelt umrandeten Matrizen ergibt die Matrizen  $\{ \}$  für die beiden Systeme:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Orientierungen				Koordinaten							
Punkt A	Punkt 1	Punkt 2	Punkt 3	Punkt 1			Punkt 2			Punkt 3	
0.7333	0.2667	-0.0667	-0.2667	0.1833	-0.1833	0.2094	-0.2094	0.1309	-0.1309	0.5806	0.1694
0.9833	0.0667	-0.4833	0.2094	-0.2094	0.3796	-0.3796	0.2618	-0.2618	0.5806	0.5806	
0.7333	-0.0667	-0.0524	0.0524	0.0524	0.0524	-0.0524	0.1309	-0.1309	0.0222	0.0222	
		0.9833	-0.2094	0.2094	-0.3796	0.3796	-0.2618	0.2618	0.0222	0.0222	
			0.5189	0.2311	0.4145	0.0855	0.2278	0.4556	0.0444	0.4556	
				0.5189	0.0855	0.4145	0.0444	0.4556			
System I											
1	2	3	Orientierung	Punkt C	1	2	3	Koordinaten	Punkt 2	Punkt C	
0.5000				0.5000	0.0982	0.0982		0.5578	-0.4422	0.5578	
System II											

$$\{I\} = V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1$$

$$\begin{array}{rr} 1.3385 & -0.3385 \\ & 1.3385 \end{array}$$

$$\{II\} = V_2 - U_2' T_2^{-1} U_2$$

$$\begin{array}{rr} 4.8230 & 3.8230 \\ & 4.8230 \end{array}$$

- 2 Die Multiplikation der einfach umrandeten Matrizen mit den Matrizen  $\{\}$  in beiden Teilsystemen ergibt  $-T_1^{-1} U_1$  bzw.  $-T_2^{-1} U_2$ :

System I

$$\boxed{-T_1^{-1} U_1 \{ \}^{-1}} \{ \}$$

$$= -T_1^{-1} U_1$$

$$\begin{array}{rr} 0.3512 & -0.3512 \\ 0.6366 & -0.6366 \\ 0.0878 & -0.0878 \\ -0.6366 & 0.6366 \\ 0.5259 & -0.0259 \\ -0.0259 & 0.5259 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 0.5948 & -0.0948 \\ -0.0948 & 0.5948 \end{array}$$

System II

$$\boxed{-T_2^{-1} U_2 \{ \}^{-1}} \{ \}$$

$$= -T_2^{-1} U_2$$

$$\begin{array}{rr} 0.8448 & 0.8448 \end{array}$$

- 3 Die Addition der beiden Matrizen  $\{I\}$  und  $\{II\}$  ergibt die «Verbindungsnormalgleichungen»  $(\cdot)$ , das heißt die Normalgleichungen der Verbindungsunbekannten im *Gesamtsystem*:

$$(\cdot) = V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1 + V_2 - U_2' T_2^{-1} U_2$$

$$\begin{array}{rr} 6.1615 & 3.4845 \\ & 6.1615 \end{array}$$

- 4 Die Inversion der Verbindungsnormalgleichungen  $(\cdot)$  ergibt die definitiven, das heißt zum Gesamtsystem gehörenden Kofaktoren der Verbindungsunbekannten (Koordinaten des Punktes 2), im Ausdruck (4) für die Inverse des Gesamtsystems also das mit  $(\cdot)^{-1}$  bezeichnete Feld.

$$(\cdot)^{-1} = (V_1 - U_1' T_1^{-1} U_1 + V_2 - U_2' T_2^{-1} U_2)^{-1}$$

$$\begin{array}{rr} 0.2386 & -0.1349 \\ & 0.2386 \end{array}$$

Um auch die übrigen Teile der Kofaktorenmatrix (4) des vereinigten Systems zu erhalten, berechnet man am einfachsten, weil so die nicht bekannten Matrizen  $T_1^{-1}$  und  $T_2^{-1}$  im Ausdruck (4) nicht berechnet werden müssen, die additiven Korrekturen zu den Ausgangswerten, den Kofaktoren der Teilsysteme.

- 5 Dies geschieht durch Bildung der Differenzmatrizen  $D = (\cdot)^{-1} - \{\}$  für beide Teilsysteme:

$$D_1 = (\cdot)^{-1} - \{I\}^{-1} \quad D_2 = (\cdot)^{-1} - \{II\}^{-1}$$

$$\begin{array}{rrrr} -0.5595 & -0.3368 & -0.3192 & 0.3072 \\ & -0.5595 & & -0.3192 \end{array}$$

- 6 Die Multiplikationen  $-T_1^{-1} U_1 \cdot D_1$  in beiden Systemen ergibt nun die additiven Korrekturen an den einfach umrandeten Feldern der Ausgangskofaktorenmatrizen, welche diese in die definitiven Werte des Gesamtsystems überführen:

$$-T_1^{-1} U_1 \cdot D_1 \quad -T_2^{-1} U_2 \cdot D_2$$

$$\begin{array}{rrrr} -0.0782 & 0.0782 & -0.0102 & -0.0102 \\ -0.1418 & 0.1418 & & \\ -0.0196 & 0.0196 & & \\ 0.1418 & -0.1418 & & \\ -0.2855 & -0.1626 & & \\ -0.1626 & -0.2855 & & \\ & & -0.3009 & -0.1473 \\ & & -0.1473 & -0.3009 \end{array}$$

- 7 Endlich ergibt die weitere Multiplikation der soeben gebildeten Größen  $-T_1^{-1} U D$  mit  $U' T^{-1}$  die additiven Korrekturen an den ursprünglichen Kofaktoren der «inneren» Unbekannten der beiden Teilsysteme (Zahlen außerhalb der Umrandungen in den Ausgangsmatrizen):

Tabelle 7 siehe Seite 81

- 8 Auch die Kofaktoren zwischen den inneren Unbekannten des einen Systems und den inneren Unbekannten des andern (die in den Ausgangs-Kofaktorenmatrizen der Teilausgleichungen natürlich nicht auftreten) lassen sich nach (4) berechnen durch die Multiplikationen

$$\begin{array}{l} (-T_1^{-1} U_1) (\cdot)^{-1} (-T_2^{-1} U_2)' \\ \text{oder} \\ (-T_2^{-1} U_2) (\cdot)^{-1} (-T_1^{-1} U_1)' \end{array}$$

		System I							
		1	2	3	4	5	6	9	10
System II	1	.000	.000	.000	.000	.044	.044	.044	.044

Gegenüber den Resultaten einer zur Kontrolle durchgeführten Ausgleichung des Gesamtsystems in *einem* Schritt zeigen die aus den oben gegebenen Korrekturen folgenden Werte der definitiven Kofaktoren an einigen wenigen Stellen Abweichungen von 0.0001, welche von der Rechenunschärfe – alle Inversionen und Matrizenmultiplikationen sind nur mit 5 Kommastellen gerechnet worden – stammen.

Das Beispiel zeigt den selbst bei sehr wenig Unbekannten und nur zwei Verbindungsunbekannten beträchtlichen Rechenaufwand, wobei allerdings auf einen Vorteil dieses Verfahrens noch hingewiesen sei: es bietet sich hier die Möglichkeit, nur diejenigen Kofaktoren zu berechnen, für welche ein Interesse besteht, während bei der Lösung der Normalgleichungen des vereinigten Systems normalerweise die ganze Inverse gebildet werden muß.

Das Vorgehen kommt wohl praktisch nur in Frage, wenn – immer bei einer kleinen Zahl von Verbindungsunbekann-

$-\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{U}_1' \mathbf{T}_1^{-1}$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0.0550	-0.0996	-0.0137	0.0996	-0.0432	0.0432			-0.0540	0.0540
	-0.1806	-0.0249	0.1806	-0.0782	0.0782			-0.0978	0.0978
		-0.0034	0.0249	-0.0108	0.0108			-0.0135	0.0135
			-0.1806	0.0782	-0.0782			0.0978	-0.0978
				-0.1459	-0.0781			-0.1544	-0.0697
					-0.1459			-0.0697	-0.1544
System I									
						unter 6 berechnet			
							unter 5 berechnet		
								unter 6 berechnet	
									-0.1650 -0.0591
									-0.1650
$-\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{U}_2 \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{U}_2' \mathbf{T}_2^{-1}$									
1	2	3							
-0.0173						unter 6 berechnet			
System II									
						unter 5 berechnet			

Tabelle 7

ten! – von den Teil-Normalgleichungssystemen nur noch die Inversen vorhanden sind, oder wenn das Gesamtsystem wegen seiner Größe gar nicht direkt lösbar wäre. Und auch dann schließlich nur, wenn ein Interesse an den korrekten

reziproken Gewichtskoeffizienten des Gesamtsystems wirklich besteht oder wenn eventuell die Unterschiede zwischen den aus den Teilsystemen abgeleiteten Werten und denen der Gesamtausgleichung interessieren.

#### Literatur

- [1] Gotthard, E., Der Matrizenalgorithmus. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 10<sup>II</sup>, München 1955.
- [2] Jordan/Eggert/Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde, Band I, Stuttgart 1961.
- [3] Keller, W., Geometrische Netzausgleichung des schweizerischen Anteils am europäischen Triangulationsnetz. Bericht an die schweizerische geodätische Kommission 1969.
- [4] Linkwitz, K., Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen 1960, Hefte 5, 6, 7, Stuttgart 1960.
- [5] Marchant, R., La compensation des mesures surabondantes. Bruxelles 1956.
- [6] Stiefel, E., Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart 1961.
- [7] Wolf, H., Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968.