

# Betrachtungen zur Poincaréschen Schranke für die Rotationsgeschwindigkeit

Autor(en): **Ledersteger, K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **63 (1965)**

Heft 9

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-220009>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 9 · LXIII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. September 1965

## Betrachtungen zur Poincaréschen Schranke für die Rotationsgeschwindigkeit

*K. Ledersteger, Wien*

Für das Problem der Gestalt der Himmelskörper einschließlich der Erde ist die Theorie der hydrostatischen Gleichgewichtsfiguren von fundamentaler Bedeutung. Eine Flüssigkeit befindet sich im sogenannten relativen Gleichgewicht, wenn sie wie ein fester Körper um eine durch den Schwerpunkt gehende feste Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert. Die Gleichgewichtsbedingung fordert, daß die Flächen gleichen Druckes mit den Niveaulächen zusammenfallen. Sie sind dann auch mit den Flächen gleicher Dichte identisch, und die freie Oberfläche ist als *die* oder *eine* der Flächen geringster Dichte selbst eine Niveauläche, wobei lediglich noch aus Gründen der Stabilität vorausgesetzt ist, daß die Dichte nach innen, also bei zunehmendem Druck, niemals abnehmen darf. Für unser Problem kommen nur langsam rotierende und daher schwach abgeplattete sphäroidische Figuren in Frage, die dann notwendigerweise Rotations-symmetrie aufweisen. Überdies ist ganz allgemein nach dem berühmten Theorem von *Lichtenstein* [1] die durch den Schwerpunkt senkrecht zur Rotationsachse gelegte Äquatorebene eine Symmetrieebene des Körpers. Ferner ist es fast selbstverständlich, daß bei dem nur der Eigengravitation und Fliehkraft unterworfenen Körper die Schwerkraft stets nach innen gerichtet ist. Nur im Extremfall kann sie in den Punkten des Äquators verschwinden, wenn sich dort Attraktion und Fliehkraft gerade gegenseitig aufheben. Die Oberfläche ist nur dann streng frei, wenn kein Außendruck vorhanden ist. Sie kann aber auch unter einem konstanten Außendruck stehen.

Wir setzen den Außendruck Null voraus und beweisen zunächst die Poincarésche obere Schranke für die Rotationsgeschwindigkeit unabhängig vom Gleichgewicht für einen rotierenden Körper der Masse  $M$ , des Volumens  $T$  und der Oberfläche  $S$ . Aus der Poissonschen Gleichung

$$\Delta W_i = -4\pi k^2 \rho + 2\omega^2 \quad (1)$$

folgt durch Integration über  $T$  leicht:

$$\int_T \Delta W d\tau = -4\pi k^2 \int_T \rho d\tau + 2\omega^2 \int_T d\tau = -4\pi k^2 M + 2\omega^2 T \quad (2)$$

Zusammen mit dem Theorem von Gauß und weil die Schwerkraft  $g$  auf der Oberfläche  $S$  niemals negativ sein kann:

$$\int_T \Delta W d\tau = \int_S \frac{\partial W}{\partial n_a} d\sigma = - \int_S g d\sigma < 0, \quad (3)$$

ergibt sich bereits die Poincarésche Ungleichung

$$\omega^2 < 2\pi k^2 \frac{M}{T} = 2\pi k^2 \rho_m, \quad (4)$$

unter  $\rho_m$  die mittlere Dichte verstanden.

Nunmehr seien einige Sätze Lichtensteins, die für homogene Gleichgewichtsfiguren entwickelt wurden, sofort für heterogene Gleichgewichtsfiguren bewiesen.

1. Angenommen, es gelte anstelle von (4) die strengere Ungleichung

$$\omega^2 < 2\pi k^2 \rho_{\min}. \quad (5)$$

Dann muß im ganzen Innenraum  $T$  überall  $W > W_0$  sein, wenn  $W_0$  den Potentialwert der Oberfläche bezeichnet. Denn anderenfalls müßte das Potential  $W$  in einem Punkte  $Q$  von  $T$  ein Minimum haben, und es wäre in allen Punkten einer hinreichend kleinen Kugel um  $Q$  die Ableitung  $\partial W / \partial n_a$  positiv. Gemäß dem Theorem von Gauß wäre dann aber im Punkte  $Q$  sicherlich  $\Delta W \geq 0$ , was der Voraussetzung (5) widerspricht. Ist wieder der Außendruck Null, so folgt aus der Integration der Gleichgewichtsbedingung  $dp = \rho dW$ :

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, z) = [W(x, y, z) - W_0] > 0, \quad (6)$$

was besagt, daß im ganzen Innenraum  $T$  der Flüssigkeit Druck vorherrscht. Ferner ist wegen  $W > W_0$  in allen Punkten von  $S$  die Schwerkraft nach innen gerichtet, wenn man von dem Extremfall  $g = 0$  in den Äquatorpunkten absieht.

2. Setzen wir umgekehrt voraus, daß

$$\omega^2 > 2\pi k^2 \rho_{\max}, \quad (7)$$

dann folgt analog, daß in  $T$  überall  $W < W_0$  sein muß. Denn sonst würde in einem Punkte  $Q$  ein Maximum von  $W$  auftreten, und es müßte dort  $\Delta W \leq 0$  sein, im Widerspruch zur Annahme (7). Die rechte Seite der Gleichung (6) wäre jetzt stets negativ, und es müßten im ganzen Innern der Flüssigkeit Zugspannungen herrschen.

Nebenbei sei bemerkt, daß *Crudeli* [2] die Poincarésche Schranke für eine konvexe Oberfläche  $S$  mit nirgends verschwindender Schwerkraft durch die Grenze

$$\omega^2 \leq \pi k^2 \rho_{\max} \quad (8)$$

ersetzen konnte. Im Falle der Homogenität bedeutet dies eine Herabsetzung der Schranke auf die Hälfte, während das genaue Studium der MacLaurinschen Ellipsoide lehrt, daß in Wirklichkeit sogar

$$\omega^2 \leq 0,4493314 \pi k^2 \rho \quad (9)$$

gilt.

3. Ist die freie Oberfläche eine Niveauläche, so herrscht in der ganzen Flüssigkeit Druck. Wir wählen ein Koordinatensystem, dessen  $xy$ -Ebene mit der Äquatorebene zusammenfällt, während die Rotationsachse die  $z$ -Achse darstellt. In der oberen Hälfte der Gleichgewichtsfigur legen wir parallel zur Äquatorebene die Ebene  $z = z' < z_{\max}$ . Der Teil  $\theta$  der Figur oberhalb dieser Ebene ist mit seinem Spiegelbild  $\theta'$  bezüglich dieser Ebene sicher im Innenraum  $T$  enthalten. Eine Parallele zur  $z$ -Achse möge die Oberfläche  $S$  im Punkte  $A$  ( $z > z'$ ) schneiden; sein Spiegelbild  $B$  liegt dann ebenfalls in  $T$ . Wäre die Flüssigkeit homogen, so würde die Teilmasse des Raumes  $(\theta + \theta')$  in den beiden Punkten  $A$  und  $B$  dasselbe Attraktionspotential  $V$  erzeugen. Da wir aber eine heterogene Flüssigkeit voraussetzen, bei der die Dichte nach innen zunimmt, ist das von  $(\theta + \theta')$  erzeugte Attraktionspotential in  $B$  größer. Überdies wird der Restkörper  $(T - \theta - \theta')$  gleichfalls in  $B$  ein größeres Potential erzeugen als in  $A$ . Somit ist sicherlich  $V_B > V_A$ , und da in beiden Punkten wegen des gleichen Abstandes von der Rotationsachse die Fliehkraft dieselbe ist, gilt auch:  $W_B > W_A$ . Das Potential in  $A$  hat aber den Wert  $W_0$  der freien Oberfläche, und es folgt aus (6) die Ungleichung  $p \geq 0$ , womit unser Satz bewiesen ist.

Soweit die Ergebnisse der klassischen Theorie. Ziehen wir jetzt das Prinzip der Entblätterung heran, so kann die letzte Argumentation jeweils für die Restfigur wiederholt werden, und man erkennt, daß mit abnehmendem Äquatorradius der inneren Niveaulächen der Potentialwert  $W$  monoton wächst. Gleichzeitig kann wegen des Verhaltens der Dichte der Operator  $\Delta W$  nach innen nur abnehmen:  $\Delta W_A \geq \Delta W_B \geq \Delta W_C \dots$  Wäre an der Oberfläche  $S$  sein Wert positiv:  $\Delta W_A > 0$ , also  $\omega^2 > 2 \pi k^2 \rho_{\min}$ , so müßte an einer bestimmten Niveauläche der Wert  $\Delta W = 0$  erreicht werden und unterhalb stets  $\Delta W < 0$  sein.

Nunmehr knüpfen wir an die Überlegungen von *H. Bruns* [3] an. Wir legen im Oberflächenpunkt  $A$  ein Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse senkrecht nach innen weist ( $W_3 = g$ ), während in der Tangentialebene an  $S$  die  $x$ - und  $y$ -Achse mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammenfallen. Dann gilt bekanntlich für die mittlere Krümmung  $H$ :

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); \quad 2 gH = - (W_{11} + W_{22}) \quad (10)$$

Schreibt man noch  $W_{33} = dg/dn_i$ , so folgt mit (1) die Brunssche Formel in der Gestalt:

$$\frac{dg}{dn_i} - 2 g H = \Delta W_A = - 4 \pi k^2 \varrho_{\min} + 2 \omega^2 \quad (11)$$

Setzen wir, wie es für die sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren fast selbstverständlich ist, eine konvexe Oberfläche  $S$  voraus, so ist  $H > 0$ , und wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

a) Liegt das Schweremaximum an der Oberfläche  $S$ , was bekanntlich der Fall ist, solange die Oberflächendichte größer ist als  $2/3$  der mittleren Dichte:  $\varrho_{\min} > \frac{2}{3} \varrho_m$ , so ist an  $S$  sicher  $dg/dn_i$  negativ und daher  $\Delta W_A$  und in weiterer Folge in der ganzen Figur  $\Delta W$  negativ. Mithin gilt:

$$\omega^2 < 2 \pi k^2 \varrho_{\min} \quad (12)$$

Dies wird auch durch den Satz von Gauß bestätigt. Legt man um einen Innenpunkt  $B$  eine kleine Kugel, so wird diese durch die konvexe Niveaufläche von  $B$  annähernd halbiert. Im oberen, größeren Teil der Kugel sind die Ableitungen  $\partial W/\partial n_a$  negativ, im unteren, kleineren Teil positiv. Da ferner die Absolutbeträge dieser Ableitungen oberhalb der Niveaufläche von  $B$  größer sind als unterhalb, ist das über die Kugel erstreckte Integral von  $\partial W/\partial n_a$  negativ und somit  $\Delta W_B \leq 0$ .

b) Sobald  $\varrho_{\min}$  unter  $2 \varrho_m/3$  sinkt, rückt das Schweremaximum in immer größere Tiefen, und es ist an der Oberfläche  $dg/dn_i$  positiv. Dennoch wird  $\Delta W_A$  negativ bleiben, solange  $\varrho_{\min} > \omega^2/2 \pi k^2 = \omega^2/419 \cdot 10^{-9}$ . Für die Rotationsgeschwindigkeit der Erde  $\omega^2 = 5,3175 \cdot 10^{-9}$  müßte also  $\varrho_{\min} > 0,0127$ . Dies entspricht aber bereits der Größenordnung der Oberflächendichten der schwach abgeplatteten einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration. Das stetige Dichtegesetz der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren lautet [4]:

$$\varrho = \varrho_{\max} \left[ 1 - \nu \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (13)$$

Bezeichnet  $n$  das Verhältnis  $\varrho_{\max} : \varrho_m$ , so gilt:

$$\varrho_{\min} = n(1 - \nu)^2 \varrho_m \quad (14)$$

Für die schwach abgeplatteten einparametrischen Sphäroide der größten Massenkonzentration ist das Produkt  $n(1 - \nu)^2$  fast konstant 0,0035, und die Ungleichung (12) geht bei Multiplikation mit  $a^3/k^2 M$  und unter Beachtung von (14) leicht über in:

$$\bar{\varepsilon} = (1,4583 e + 1,4085 e^2) < \frac{3}{2} \frac{1}{1 - e} n(1 - \nu)^2 = \frac{0,0053}{1 - e}, \quad (12a)$$

woraus sich hinreichend genau als obere Grenze für die Abplattung

$$e < 0,0036 \sim 1 : 278 \quad (15)$$

ergibt. Obwohl also das Schweremaximum in eine maximale Tiefe gerückt ist, ist auch für alle Punkte  $B$  oberhalb des Schweremaximums wegen  $0 < dg/dn_i < 2 g H$  der Operator  $\Delta W_B < 0$ . Es widerspricht dies nicht dem Satz von Gauß. Denn das Integral der Ableitungen  $\partial W/\partial n_a$  über eine kleine, um  $B$  geschlagene Kugel kann ja wegen der größeren Fläche des oberen Teiles der Kugel negativ sein, trotzdem die Absolutbeträge der negativen Ableitungen in diesem Teil jetzt größer sind als die positiven Ableitungen im unteren, kleineren Teil der Kugel.

c) Größere Abplattungen sind bei gleicher Masse und Achse mit einer größeren Rotationsgeschwindigkeit und mit einer größeren Minimaldichte verknüpft. In den Bestimmungsgleichungen für die beiden spezifischen Konstanten des Dichtegesetzes:

$$\frac{1 - e}{1 - \bar{e}_2} = n \left[ 1 - \frac{6}{5} \nu + \frac{3}{7} \nu^2 \right] \quad (16)$$

$$\left( \frac{a_h}{a} \right)^2 \frac{1 - e}{1 - e_h} = n \left[ 1 - \frac{10}{7} \nu + \frac{5}{9} \nu^2 \right]$$

dürfen die Abplattungsfaktoren nicht mehr vernachlässigt werden, und das Produkt  $n(1 - \nu)^2$  ist nicht mehr konstant. Die Durchrechnung von etwas stärker abgeplatteten einparametrischen Sphäroiden der größten Massenkonzentration lehrt aber, daß die Zunahme von  $n(1 - \nu)^2$  und damit von  $\varrho_{\min}$  langsamer erfolgt als die Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit, so daß sehr bald

$$\varrho_{\min} < \omega^2/419 \cdot 10^{-9} \quad (17)$$

und damit an der Oberfläche  $S$  und im oberen Teil des Innenraumes  $\Delta W$  positiv wird.

Die Ungleichung (5) ist mithin im Gleichgewichtsfalle eine hinreichende, aber keineswegs notwendige Bedingung dafür, daß in der ganzen Figur Druck herrscht. Hierfür genügt jedoch bereits die Tatsache, daß die Oberfläche eine Niveauläche ist, und zwar gänzlich unabhängig von der Existenz eines etwaigen Außendruckes, wie bereits Lichtenstein betont hat. Dies ist auch der Grund dafür, daß als einzige Gleichgewichtsbedingung das Zusammenfallen der Niveaulächen mit den Flächen gleicher Dichte auftritt oder daß jede Gleichgewichtsfigur durch ihre Schichtung im Sinne *Wavres* [5] bestimmt ist. Läßt man jedoch das Gleichgewicht fallen, indem man im Inneren der Figur Massenverschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen oder in homogenen konzentrischen Kugelschalen durchführt, so bleibt wohl die Oberfläche nach wie vor eine Niveauläche. Hingegen kann jetzt durch einen mehr oder minder großen Außendruck das Auftreten von Zugspannungen in der Flüssigkeit vermieden werden.

Es zeigt sich also, daß die Poincarésche Schranke für die Rotationsgeschwindigkeit nicht nur bei den MacLaurinschen Ellipsoiden – hier so-



gar gänzlich unabhängig von der Abplattung –, sondern auch bei den sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren weit unterboten wird, wenn nur die Abplattung hinreichend klein ist.

Vorstehende Betrachtungen lassen sich noch etwas verallgemeinern. Wir schreiben die Poincarésche Schranke in der Form:

$$\Omega = \omega^2 / 2 \pi k^2 \varrho_m < 1 \quad (4a)$$

und transformieren sie mit  $M = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 - e) \varrho_m$  und  $\bar{e} = \omega^2 a^3 / k^2 M$  in

$$\Omega = \frac{2}{3} \bar{e} (1 - e) < 1. \quad (4b)$$

Für die sogenannten einparametrischen Gleichgewichtsfiguren, das heißt für die Gleichgewichtsfiguren mit dem stetigen Dichtegesetz (13), liegt  $\bar{e}$  zwischen den Grenzen:  $0,8 e \leq \bar{e} \leq 1,4583 e$ , und es folgt in wesentlicher Verschärfung

$$\Omega < e \quad (18)$$

und zusammen mit (14)

$$\omega^2 < 2 \pi k^2 \varrho_{\min} \frac{e}{n (1 - e)^2} \quad (18a)$$

Für die höheren Gleichgewichtsfiguren mit unstetigem Dichtegesetz gilt aber (18) nicht mehr allgemein, da  $\bar{e}$  bis auf  $2 e$  anwachsen kann. So ist zum Beispiel für den Massenpunkt, übrigens vollkommen streng,

$$\bar{e} (1 - e) = 2 e \quad (19)$$

und (4b) geht in eine Schranke für die Abplattung der Niveauflächen des Massenpunktes über

$$\Omega = \frac{4}{3} e < 1 \text{ oder: } e < \frac{3}{4}, \quad (20)$$

welche allerdings bereits wieder weit unterboten wird, da die wahre Grenzabplattung

$$e_{\max} = \frac{1}{3} \quad (20a)$$

ist. Denn im Äquator der Grenzniveaufläche sind Attraktion  $k^2 M/a^2$  und Fliehkraft  $\omega^2 a$  entgegengesetzt gleich, das heißt  $\bar{e} = 1$ , also  $(1 - e) = 2 e$ , und es verschwindet dort die Schwere.

- [1] *L. Lichtenstein*: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin 1933.
- [2] *U. Crudeli*: Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti, limitati da figura di equilibrio. Atti della Accademia dei Lincei 19, 1910, 2, S. 41–43.
- [3] *H. Bruns*: Die Figur der Erde. Berlin 1878.
- [4] *K. Ledersteger*: Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1960, Nr. 4.
- [5] *R. Wavre*: Figures planétaires et géodésie. Paris 1932.

## **Détermination par voie de nivellement trigonométrique de déviations de la verticale**

*par A. Ansermet\**

### *Résumé*

Le problème abordé ici fut déjà traité magistralement notamment par la Commission géodésique (voir [1]). Certaines simplifications sont envisagées quant à la compensation; si le massif montagneux est fort éloigné de l'équateur, le praticien pourra se borner à effectuer le calcul sur une sphère en choisissant un équateur fictif. Les déviations  $\xi$ ,  $\eta$  étant déjà de petites quantités, il n'est pas nécessaire de déterminer des valeurs provisoires comme le font certains auteurs; quant aux altitudes provisoires, elles sont arbitraires entre certaines limites. Il est inutile de pousser la précision notamment pour le calcul des coefficients des équations initiales; pour ces éléments le rôle de la surface de référence (sphère, ellipsoïde, géoïde) importe peu car la présente publication porte surtout sur la détermination de poids. Des groupes d'inconnues peuvent être éliminés. A certains égards des visées réciproques et simultanées sont désirables (voir [3]). Quant à la réfraction, c'est toujours un élément un peu critique; comme le fait remarquer P. Engi, ce problème fut déjà abondamment traité.

Le problème traité ici, surtout en vue d'applications, suscita déjà des publications importantes; citons celles, magistrales, de la Commission géodésique suisse (voir [1]). Si le réseau est peu étendu, des simplifications sont à envisager; les lignes qui suivent portent sur la compensation proprement dite, le réseau comprenant six points nouveaux, 18 ou 19 inconnues, 12 côtés, 24 visées, donc 24 équations initiales. Il n'y a pas de visées réciproques et simultanées, ce qui causerait des complications.

Les éléments connus sont l'altitude  $H_0$  du centre  $O$ , laquelle est arbitraire pour la compensation, puis les composantes mutuellement rectangulaires  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  de la déviation de la verticale en  $O$ ; théoriquement leur

---

\* Rédigé en hommage à notre Rédacteur en chef, M. le Prof. Dr F. Kobold, à l'occasion de son 60<sup>e</sup> anniversaire.