Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 69 (1971)

Heft: 11

Artikel: Sur les calculs relatifs aux ouvrages d'art et leurs déformations

Autor: Ansermet, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-224342

DK 528.482

Sur les calculs relatifs aux ouvrages d'art et leurs déformations

A. Ansermet

Zusammenfassung

Das hier behandelte Problem ist weit und gab bereits Anlaß zu zahlreichen Veröffentlichungen. Nur einige besondere Gesichtspunkte bilden den Gegenstand der folgenden Zeilen; es werden gewisse Lösungen gezeigt, die noch nicht in die Praxis eingeführt sind.

Résumé

Le problème traité ci-après est vaste et donna lieu déjà à de nombreuses publications. Seuls quelques aspects particuliers font l'objet de ces lignes; certaines solutions seront développées n'appartenant pas encore à la pratique courante.

Généralités

Le problème relatif au tracé d'ouvrages d'art et surtout à leur vérification quant à la stabilité est complexe; le praticien effectue en général des mesures linéaires et angulaires. Mais une première difficulté surgit: les points de stationnement des instruments sont-ils eux-mêmes assez stables? Dans une récente publication (voir [3]) il s'agissait d'un cas spécial portant sur des points contenues dans un même profil. La propriété connue du rapport anharmonique (Doppelverhältnis) fut appliquée. Ce cas n'est pas fréquent.

Emettons l'hypothèse que l'opérateur a trouvé, pour ses mesures, des emplacements assez stables; les divers modes de mesures sont connus. Pour les calculs le problème peut être traité spatialement ou en dissociant l'altimétrie de la planimétrie. Le genre d'ouvrage d'art joue un rôle pour faire un choix.

Application: Considérons un point P, nœud d'une charpente ou sommet d'un clocher. Par suite de l'instabilité du sol ou du manque de rigidité de l'ouvrage il y a un déplacement PP' constaté grâce à des mesures échelonnées dans le temps.

Si PP' est assez petit, on peut considérer un point provisoire P_0 (x_0, y_0, z_0) unique dans le voisinage du milieu de PP'

$$\left.\begin{array}{lll} x_0 + \Delta x, & y_0 + \Delta y, & z_0 + \Delta z \\ x_0 + \Delta x', & y_0 + \Delta y', & z_0 + \Delta z' \end{array}\right\} \text{ 6 inconnues}$$

seront les coordonnées compensées de P et P'

$$\overline{PP'}^2 = (\Delta x - \Delta x')^2 + (\Delta y - \Delta y')^2 + (\Delta z - \Delta z')^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

Les poids des mesures ne sont pas nécessairement les mêmes pour P ($p_1, p_2, p_3 \ldots$) et P' ($p_1', p_2', p_3' \ldots$), tandis que les coefficients de poids des inconnues seront Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz} pour P et $Q_{x'x'}, Q_{y'y'}, Q_{z'z'}$ pour P'.

Entre les erreurs quadratiques moyennes et ces coefficients on a:

$$M_\xi^2 : M_\eta^2 : M_\zeta^2 = (Q_{xx} + Q_{x'x'}) : (Q_{yy} + Q_{y'y'}) : (Q_{zz} + Q_{z'z'}) \quad \text{(voir [2])}.$$

Cette solution ne comporte donc pas la dissociation entre la planimétrie et l'altrimétrie. En statistique l'ellipsoïde d'erreur est dit standard. Son centre est arbitraire, par exemple au milieu de PP'. Cette solution est maintenant très connue. On peut l'appliquer pour un groupe de points et la déviation de la verticale n'est pas toujours négligeable. L'origine des coordonnées est arbitraire, éventuellement une des stations de l'instrument. Pour certains ouvrages des coordonnées polaires sont avantageuses. Encore une fois le problème est complexe, surtout quand au mode de calcul; la transformation d'Helmert, qui est conforme, fut aussi appliquée en combinaison avec une compensation.

Tracé des ouvrages: Le cas le plus simple (voir [3]) est peu fréquent; pour un amphithéâtre, par exemple, la ponctuelle n'est plus rectiligne mais curviligne. Un cas concret, qui fut autrefois traité dans la littérature, fut celui de l'amphithéâtre de Pola (voir [4]; à l'époque le calcul donna lieu à des controverses. La solution Eggert/Baeschlin, comportant des éléments fictifs (poids, observations), est la plus rigoureuse (voir [5]). A Pola la ponctuelle curviligne était elliptique avec 12 points mesurés, ce qui donne

$$\binom{12}{5} = \frac{12, 11 \ldots 8}{5!} = 792 \text{ groupes de 5 points}.$$

Cette façon de combiner les mesures est connue (voir [6]). Gauss lui-même la qualifia de voie détournée, peu naturelle (unnatürlicher Umweg).

Une solution simple et précise consiste à appliquer le théorème connu: Les points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs de rayons engendrent une courbe de 2^e ordre.

Analytiquement la correspondance projective revêt la forme:

$$L_1 + \lambda_1 L_2 = 0; \; L_1 + \lambda_2 L_2 = 0; \; L_1 + \lambda_3 L_2 = 0; \; L_1 + \lambda_4 L_2 = 0 \quad \text{(faisceau } S\text{)}$$

$$L_1' + \lambda_1 L_2' = 0; \; L_1' + \lambda_2 L_2' = 0; \; L_1' + \lambda_3 L_2' = 0; \; L_1' + \lambda_4 L_2' = 0 \quad \text{(faisceau } S'\text{)}$$

L_1 et L_2 ainsi que L_1' et L_2' sont les équations de droites issues de S et S'.

Le double rapport (anharmonique) est

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Pour la pratique la forme trigonométrique présente des avantages:

$$\frac{\sin(ca)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(da)}{\sin(db)} = \frac{\sin(c'a')}{\sin(c'b')} : \frac{\sin(d'a')}{\sin(d'b')}$$

Les a, b, c, d et $a'b'c'd'$ sont respectivement les SA, SB, SC, SD et $S'A$, $S'B$, $S'C$, $S'D$. L'équation ci-dessus peut être convertie en une équation de condition à 8 inconnues $v_1, v_2 \ldots v_8$. Le nombre de conditions augmente avec le nombre de points, comme dans le cas de Pola par exemple; le mode de calcul n'est pas nouveau. Revenons maintenant à la

Solution Eggert/Baeschlin

basée sur des mesures de coordonnées. L'équation initiale, sous forme implicite, est: $F(A, B, C \ldots x_i + v_i', y_i + v_i'') = 0$ $(i = 1, 2 \ldots n)$.

Pour l'ellipse les A, B, C sont les coefficients inconnus des termes quadratiques, D et E ceux des termes linéaires. En fonction des x, y mesurés et de valeurs provisoires pour les coefficients on a:

$$A = A_0 + \Delta A \quad B = B_0 + \Delta B \ldots$$

$$w_i + a_i \Delta A + b_i \Delta B + c_i \Delta C + d_i \Delta D + e_i \Delta E + f_i v_i' + f_i' v_i'' = 0$$

extrémum lié, soit:

$$[p'v'v'] + [p''v''v''] - 2[k_i(w_i + a_i \Delta A + b_i \Delta B \ldots + f_i v_i' + f_i' v_i'')]$$

cette forme est familière, les coefficients corrélatifs étant les k_i.

En formant les dérivées de la fonction on obtient $(5 + 2n)$ équations:

$$[ak] = 0, [bk] = 0 \ldots p_i' v_i' = f_i k_i; \; p_i'' v_i'' = f_i' k_i \; (i = 1, 2 \ldots n)$$

et en posant: $\dfrac{1}{p_i} = \dfrac{f_i^2}{p_i'} + \dfrac{f_i'^2}{p_i''}$, w_i étant toujours le terme absolu

$$-k_i = a_i p_i \Delta A + b_i p_i \Delta B + c_i p_i \Delta C + \ldots + w_i p_i \quad (p_i = \text{poids fictif})$$

d'où le système $\quad \lambda_i = a_i \Delta A + b_i \Delta B + \ldots + w_i \quad$ (poids p_i)

où $-\lambda_i = f_i v_i' + f_i' v_i''$ et, sous forme implicite:

$$[pa\lambda] = [pb\lambda] = [pc\lambda] = [pd\lambda] = [pe\lambda] = 0$$

pour calculer les 5 coefficients.

De plus: $-\lambda_i = \dfrac{1}{p_i} k_i$ d'où: $[p\lambda\lambda] = [p'v'v'] + [p''v''v'']$

Interprétation géométrique des éléments fictifs λ_i

Désignons par ϱ_i la plus courte distance du point (x_i, y_i) à la courbe soumise à compensation. On trouve (voir [5]):

$$\lambda_i^2 = \varrho_i^2 (f_i^2 + f_i^2) \text{ et } [p\lambda\lambda] = [q\varrho\varrho] = \text{minimum}$$

où
$$q_i = p_i (f_i^2 + f_i'^2) = \frac{1}{\frac{f_i^2}{p_i'} + \frac{f_i'^2}{p_i''}} (f_i^2 + f_i'^2)$$

$$\text{Pour} \quad p_i' = p_i'' = 1 \ (i = 1, 2, \dots n)$$

$$[p\lambda\lambda] = [\varrho\varrho]$$

Pour mémoire rappelons qu'une solution plus simple fut appliquée pour le cas de Pola (voir [4]):

$$Ay_i^2 + Bx_i y_i + Cx_i^2 + Dy_i + Ex_i + 1 = v_i \text{ d'où, pour le poids 1:}$$

$$[y^2 v] = [xyv] = [x^2 v] = [yv] = [xv] = 0$$

Ce ne sont pas les seules solutions (voir [7], p. 428). C'est le Service topographique autrichien qui eut recours à ce dernier mode de calcul, mais d'éminents géodésiens, notamment le professeur Baeschlin, ne se contentèrent pas de cette solution.

Dans la pratique on s'efforcera de dissocier l'altimétrie de la planimétrie, ce qui présente des avantages.

Planimétriquement le cas le plus simple est celui est celui d'une ponctuelle rectiligne, par exemple les mâts d'un téléphérique; on forme des rapports anharmoniques ou birapports, éléments indépendants du lieu de stationnement de l'instrument.

Le cas d'une ponctuelle curviligne pour l'ouvrage d'art est moins simple; des coordonnées rectangulaires ou mêmes polaires sont mesurées et pour une conique (ellipse, etc.) on aura recours à une paire de faisceaux projectifs en appliquant des équations exprimant l'égalité de birapports. Dans certains cas on fera usage de la transformation affine ou de celle d'Helmert (voir [3]).

Littérature

[1] *Kobold F.:* Bestimmung von Deformationen an Bauwerken (Schweiz. Bauzeitung, 1958).

[2] *Wolf H.:* Anwendung der mathemat. Statistik (Zeitschr. Vermessungswesen, 1964).

[3] *Ansermet A.:* Sur la déformation d'ouvrages d'art (Publication EPUL N° 98).

[4] *Ansermet A.:* La forme de l'amphithéâtre de Pola (Publication EPUL, N° 18).

[5] *Baeschlin C.F.:* Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, 1919 (p. 241–248).

[6] *Czuber E.:* Theorie der Beobachtungsfehler.

[7] *Wolf H.:* Ausgleichungsrechnung ... (Dümmler-Verlag).