Sur le calcul des déviations de la verticale

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 10 • LXIX. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Oktober 1971

DK 528.241

Sur le calcul des déviations de la verticale

A. Ansermet

Résumé

Le problème faisant l'objet de ces lignes donna lieu à une abondante littérature; d'une part certains éléments ne sont pas exempts d'arbitraire, notamment le choix d'une surface de référence et, d'autre part, certaines hypothèses sont plus ou moins fragiles. Enfin, suivant les cas, le choix des paramètres suscite des divergences. C'est donc un problème-fleuve, ce qui lui confère de l'intérêt.

Zusammenfassung

Zum Thema der nachstehenden Ausführungen gibt es eine reichhaltige Literatur; einerseits sind gewisse Elemente nicht ganz eindeutig, besonders die Wahl einer Referenzfläche, andererseits sind manche Hypothesen mehr oder weniger unsicher. Schließlich entstehen, je nach dem Fall, Divergenzen bei der Wahl der Parameter.

Rappel de notions usuelles

Le calcul des déviations de la verticale est rendu assez complexe pour diverses raisons; le but poursuivi joue ici un rôle. Pour déterminer l'axe d'un long tunnel, par exemple, il faut tenir compte de ces déviations, mais le résultat cherché n'est pas là. En géodésie-physique par contre, c'est leur détermination aussi précise que possible qui est en jeu. La complexité du problème se manifeste sous diverses formes; certains auteurs font intervenir jusqu'à six surfaces différentes, en comptant le pseudogéoïde, notion assez nouvelle (voir [5]). Le caractère plus ou moins arbitraire de la surface dite de référence apporte une complication. Une surface à double-courbure n'est pas toujours nécessaire, quelle que soit l'étendue de la zone considérée.

Ce sera le cas en outre dans les régions polaires, où la courbure du sphéroïde varie peu, d'où le renoncement éventuel à la double courbure. Un cas concret sera traité ci-après.

Les calculs deviennent plus simples puisque les normales à la surface passent par un même centre. Quant aux composantes des déviations de la verticale, elles recevront une orientation arbitraire. Si on trace l'axe d'un long tunnel, cet axe sera de préférence parallèle à une composante.

Le calcul de l'influence des «masses visibles» donne lieu en général au tracé d'un quadrillage orienté d'après les axes x, y. Un compartimentage radial avec cylindres concentriques fut aussi appliqué (voir [5]).

Considérons deux cas concrets, mais de caractère un peu didactique. En premier lieu, une calotte sphéroïdique est comprise entre les latitudes $\pm 1^\circ$ soit ± 111 km par rapport à l'équateur. Pour les dimensions, ce ± 111 km correspond à peu près à la Suisse. L'origine sera au centre de gravité du système de points φ_i, λ_i ($i = 1, 2, 3 \ldots$) et, par hypothèse, sur l'équateur ($[\varphi_i] = [\lambda_i] = 0$). Soient ξ_i, η_i les composantes ($i = 1, 2, 3 \ldots$).

Admettons en outre que deux opérateurs ont opéré, l'un par voie astronomique et l'autre gravimétriquement, pour déterminer ces inconnues; car le but de ces lignes est surtout de confronter ces résultats. Sous forme générale on a: $\xi_{\mathrm{astr}} - \xi_{\mathrm{grav}} = \Delta\xi \qquad \eta_{\mathrm{astr}} - \eta_{\mathrm{grav}} = \Delta\eta$. Pour la pratique courante, on peut se contenter des relations:

$$\text{pour chaque point} \begin{cases} a + b.\varphi + c.\lambda + \Delta\xi = v & \text{(poids 1)} \\ a' + b'\varphi + c'\lambda + \Delta\eta = v' & \text{(poids 1)} \end{cases} \quad \text{[5] p. 410} \qquad (1)$$

où les six inconnues a, b, c, a', b', c' sont à déterminer.

Sous forme implicite on a, à cet effet:

$$[v] = 0,\ [\varphi v] = 0,\ [\lambda v] = 0,\ [v'] = 0,\ [\varphi v'] = 0,\ [\lambda v'] = 0$$

Ces calculs sont trop connus pour donner lieu à des commentaires. On peut former des équations réduites et éliminer les a, a'.

L'origine étant toujours 0 tandis que les P_i ($\varphi_i \lambda_i$) où $i = 1, 2, 3 \ldots$ sont les points dont on possède les éléments astro-gravimétriques, on pourra concevoir des coordonnées non géographiques mais polaires, soit S_i, A_i ($S_i = 0P_i$), l'azimut de ce S_i étant A_i.

Il faut que les termes absolus soient suffisamment précis; par contre il suffit que les coefficients des inconnues soient précis à $^1/_{2000}$e près environ. Parfois, on les obtient graphiquement.

Si on veut renoncer à la double courbure, il faut considérer la formule connue $R = \sqrt{MN}$ et étudier sa variation

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} \text{ où } W^2 = 1 - e^2 \sin^2\varphi,$$

ce φ étant l'élément variable. C'est donc surtout dans le voisinage des pôles qu'on envisagera une sphère de référence, puisque $\sin\varphi$ y varie peu. Au pôle Sud surtout il y a d'assez importantes «masses visibles»; le calcul de leur influence se fera plus volontiers à l'aide de coordonnées polaires.

Origine au pôle. Ici encore on pose, en fonction des ξ, η connus

$\Delta\xi = \xi_{\mathrm{astr}} - \xi_{\mathrm{grav}}$ et $\Delta\eta = \eta_{\mathrm{astr}} - \eta_{\mathrm{grav}}$.

Certains auteurs préfèrent, au lieu de composantes ξ, η, la résultante $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ et l'azimut de celle-ci.

Il y aura deux groupes d'équations ou relations d'observations:

$$\begin{cases} (a) + (b)\ S.\sin A + (c)\ S.\cos A + \Delta\xi = v & \text{(poids 1)} \\ (a') + (b')\ S.\sin A + (c')\ S.\cos A + \Delta\eta = v' & \text{(poids 1)} \end{cases} \qquad (2)$$

On peut concevoir d'autres poids; pour distinguer du cas précédent on a les inconnues (a), (b), (c), (a'), (b'), (c').

Au lieu de $[\varphi] = [\lambda] = 0$ on a: $[S.\sin A] = [S.\cos A] = 0$

De plus: $[v] = [v'] = 0$ par suite: $8\,(a) + [\Delta\xi] = 0$; $8\,(a') + [\Delta\eta] = 0$

pour un groupe de 8 stations soumises à des observations et mesures. Considérons des valeurs simples:

Stations	*Azimuts*	S	$S.\sin A$	$S.\cos A$	
1	0	S_1	0	$+S_1$	Il faut connaître les $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ en trois points au moins
2	45°	S_2	$+0{,}707\ S_2$	$+0{,}707\ S_2$	
3	90°	S_1	$+S_1$	0	
4	135°	S_2	$+0{,}707\ S_2$	$-0{,}707\ S_2$	
5	180°	S_1	0	$-S_1$	
6	225°	S_2	$-0{,}707\ S_2$	$-0{,}707\ S_2$	
7	270°	S_1	$-S_1$	0	
8	315°	S_2	$-0{,}707\ S_2$	$+0{,}707\ S_2$	

$[(S.\sin A)^2] = [(S.\cos A)^2] = 2\,(S_1^2 + S_2^2)$ $\qquad$ $[(S.\sin A)\,(S.\cos A)] = 0$

ce que l'on pouvait présumer, vu la symétrie. Les composantes de déviations de la verticale seront orientées, de préférence, suivant les méridiens et parallèles respectifs. Le calcul des coefficients de poids des inconnues est ici particulièrement facile; la somme $(S_1^2 + S_2^2)$ joue un rôle. Il faut s'efforcer d'augmenter cette somme.

Si une surface de référence est sphérique, on pourra ensuite la transformer, par rayons vecteurs réciproques ou inversion, en un plan à partir d'un centre de transformation situé sur la sphère. On sait que cette transformation est conforme. Certains auteurs ayant étudié ce problème distinguent cinq paramètres, notamment l'aplatissement du sphéroïde, qui est un paramètre dit de forme; dans certains cas, aucun élément linéaire ne joue de rôle, mais seulement des valeurs angulaires. L'échelle n'est plus un paramètre, tout au moins pour de faibles variations.

Ce sont moins les déviations de la verticale par voie astronomique que par voie gravimétrique qui donnent lieu encore à quelques difficultés. L'influence des «masses visibles» est un problème encore complexe; il y eut de nombreuses recherches. C'est ainsi que Rudzki préconise la translation de masses de part et d'autre du géoïde, lequel est assimilé à une sphère. On applique aussi la transformation par rayons vecteurs réciproques, mais le centre de transformation n'est pas sur la sphère. L'intérêt de la théorie de Rudzki réside dans le fait que, sur le géoïde, le potentiel de chaque élément de masse demeure inchangé malgré cette translation.

Le mode d'interpolation développé ci-dessus fut appliqué (voir [5]) pour confronter des éléments astro-gravimétriques; ce n'est pas le seul, mais le but poursuivi ici est limité à des calculs de pratique courante.

Quand il n'y a pas d'éléments surabondants pour les relations d'observation, (1) et (2), le calcul est plus simple, car les v et v' sont nuls; en revanche, si on a suffisamment de tels éléments, on peut ajouter des termes quadratiques et ne pas se contenter de formes linéaires. Le résultat est meilleur, en général.

Le mode de détermination des ξ et η est un problème complexe qui donna lieu à de nombreuses recherches, notamment par la Commission géodésique suisse. Les lignes qui précèdent sont consacrées à un aspect particulier du problème. La surface de référence (Bezugsfläche), dont le rôle est capital, n'est pas nécessairement et toujours une surface à double courbure, comme certains croyent. Quant au rôle des «masses invisibles», il fut traité à fond dans la littérature (voir [7]).

Littérature

[1] *Baeschlin C.F.:* Lehrbuch der Geodäsie.
[2] *Ledersteger:* Handbuch der Vermessungskunde, Band 5.
[3] *Kobold:* Publication Commission géodésique suisse.
[4] *Hopfner F.:* Grundlagen der höheren Geodäsie (Springer Verlag).
[5] *Levallois:* Géodésie III.
[6] *Heiskannen Moritz:* Publications diverses.
[7] *Elmiger A.:* Berechnung von Lotabweichungen (Dissertation Zürich).
[8] *Wunderlin N.:* Berechnungen im Höhennetz Heerbrugg (1970).