

Zeitschrift:	Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie
Herausgeber:	Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural
Band:	69 (1971)
Heft:	2
Artikel:	Sur l'analogie entre les calculs de réseaux télémétriques et les systèmes hyperstatiques
Autor:	Ansermet, A.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-224308

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- [4] *Gleinsvik, P.*: Experimentelle Prüfung von Auswertemethoden in der Meßtechnik durch Simulation. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1970, Heft 10.
- [5] *Grossmann, W.*: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 3. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York 1969.
- [6] *Lilly, J. E.*: Least squares adjustments of dissimilar quantities. Empire Survey Review, Vol. XVI, No. 121, 1961.
- [7] *Linkwitz, Klaus*: Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1961, Heft 6, 7 und 9.
- [8] *Rainsford, H. F.*: Combined adjustments of angles and distances. Survey Review, Vol. XIX, No. 150, 1968.
- [9] *Rinner, K.*: Entfernungsmessungen mit lichtelektrischen und elektrischen Geräten im Testnetz Graz. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 123, V. Internationaler Kurs für geodätische Streckenmessung 1965 in Zürich, München 1966.
- [10] *Wolf, H.*: Die Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1958, Heft 10.

DK 528.35.063:531,2

Sur l'analogie entre les calculs de réseaux télémétriques et les systèmes hyperstatiques

par A. Ansermet

Zusammenfassung

Es kann die Berechnung eines «unbestimmten» Fachwerksystems mit der Ausgleichung eines Streckennetzes verglichen werden. In den Verbesserungsgleichungen sind Absolutglieder. In einer neuen Lösung, welche eine bedeutende Rolle spielt, sind keine Absolutglieder in den Gleichungen, welche die elastischen Stablängenänderungen ausdrücken. Eine Wahl zwischen den beiden Lösungen ist nicht leicht.

Résumé

Une comparaison peut être établie entre le calcul de réseaux télémétriques et de systèmes articulés hyperstatiques. Les équations amélioratrices contiennent des termes absous. Il n'y a pas de termes absous dans les équations exprimant les variations de longueurs des barres; une telle solution est nouvelle et joue un rôle important. Un choix n'est pas facile à faire entre ces deux solutions.

Généralités

Dans le numéro de février dernier de la présente Revue quelques lignes furent consacrées à la matrice dite de rigidité (Steifigkeitsmatrix); les ingénieurs-géomètres et du génie rural sont familiarisés avec ces calculs

et pourraient apporter une collaboration utile lors du calcul de systèmes hyperstatiques. La notion d'ellipsoïde d'erreur subsiste mais avec l'appellation: «ellipsoïde de déformation des nœuds». Dans la littérature statique de langue allemande on dit tantôt «Verschiebungsellipsoid» ([3], p. 536), tantôt «Formänderungsellipsoid».

En ce qui concerne les deux solutions mentionnées ci-dessus, la première donne lieu à la formation d'un système dit fondamental (Grundsystem, voir [2]). C'est ce système qui fournit les termes absous des équations amélioratrices ou aux déformations (Verknüpfungsgleichungen, voir [3]).

Dans la solution sans termes absous on ne forme pas de système fondamental ni de dérivées de l'énergie.

Avant de poursuivre énumérons quelques notations (indices laissés du côté):

En coupant les barres surabondantes on obtient le système fondamental

l, S	Longueurs et sections transversales des barres
E	Coefficients d'élasticité
Dx, Dy, Dz	Variations coordonnées des nœuds (sans coupures)
dx, dy, dz	Variations coordonnées des nœuds (après coupures)
$a, b, c \dots$	Coefficients de ces variations inconnues
f	Termes absous équations aux déformations
p	Poids des barres (proportionnels à ES/l et $1/m$)
P	Poids des barres à posteriori
v	Variations longueurs des barres ($[p_{vv}]$ minimum)
m	Modules des barres (proportionnels à $1/p$)
T	Efforts axiaux dans les barres (Stabkräfte) $v = mT$
$M^2 \cong [p_{vv}]$	
nombre barres surabondantes	M = déformation moyenne quadratique relative à l'unité de poids

Il y a donc deux formes d'équations aux déformations:

Pour la barre reliant les nœuds libres (x, y, z) et (x', y', z')

$$1) \quad v = a (dx - dx') + b (dy - dy') + c (dz - dz') + f$$

$$2) \text{ et } v = a (Dx - Dx') + b (Dy - Dy') + c (Dz - Dz') = mT$$

Théoriquement les coefficients a, b, c ne sont pas rigoureusement les mêmes pour 1) et 2) mais bien pratiquement ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$). C'est la chaire de statique de Lausanne (voir [1]) qui eut la priorité pour la solution 2); celle-ci, qui est à la base du mode de calcul STRESS, présente certains avantages, mais la solution avec coupures est aussi actuelle. Le mieux est d'appliquer les deux méthodes à une même structure avant de porter un jugement.

On verra que les équations dont les coefficients constituent les éléments de la matrice de rigidité pouvaient être obtenues à partir des conditions d'équilibre des nœuds ou à partir du minimum de l'énergie potentielle (voir [5]). Traitons un cas concret, à certains égards de caractère didactique.

Calcul d'une coupole

L'exemple choisi porte sur une coupole à 4 nœuds libres, 4 nœuds fixes; 22 barres dont 10 surabondantes, 12 variations inconnues des coordonnées.

Un caractère spécial sera conféré à cet exemple: successivement ou simultanément deux systèmes d'axes de coordonnées sont choisis x, y, z et x', y', z' , ce qui permet des contrôles et surtout la propriété connue d'invariance relative aux ellipsoïdes de déformation des nœuds sera vérifiée: La somme $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$ est un invariant pour ces trois coefficients de poids des inconnues (quadratiques), les non-quadratiques étant Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz} . Cette propriété d'invariance traduit une propriété géométrique connue.

La structure choisie est définie par les valeurs suivantes:

Nœuds libres				Nœuds libres				Unité de mesure arbitraire
	x	y	z		x'	y'	z'	
1	+1	0	1	1	+0,707	-0,707	1	
2	0	-1	1	2	-0,707	-0,707	1	
3	-1	0	1	3	-0,707	+0,707	1	
4	0	+1	1	4	+0,707	+0,707	1	

Nœuds fixes				Nœuds fixes			
5	+2	0	0	5	+1,414	-1,414	0
6	0	-2	0	6	-1,414	-1,414	0
7	-2	0	0	7	-1,414	+1,414	0
8	0	+2	0	8	+1,414	+1,414	0

Poids p_i des barres ($i = 1, 2 \dots 22$)								
Nœuds	1	2	3	4	5	6	7	$8 = i$
$i =$								
1		0,80	0,70		1,27	1,00	1,00	1,00
2			0,80	0,70	1,00	1,27	1,00	1,00
3				0,80	1,00	1,00	1,27	1,00
4	0,80				1,00	1,00	1,00	1,27

Coefficients des inconnues

Barres	Coordonnées x, y, z			Barres	Coordonnées $x' y' z'$		
	a	b	c		a	b	c
1-5	-0,707	0,00	+0,707	1-5	-0,5	+0,5	+0,707
1-6	+0,408	+0,815	+0,408	1-6	+0,866	+0,289	+0,408
1-7	+0,949	0,00	+0,316	1-7	+0,671	-0,671	+0,316
1-8	+0,408	-0,815	+0,408	1-8	-0,289	-0,866	+0,408
.
.
.
.

Solution par le calcul du système fondamental (Grundsystem)

Sur les 22 barres il y a lieu d'en couper 10, ce qui laisse subsister un système statiquement déterminé; cette étape des calculs, notamment le

choix des barres coupées, est plutôt de la compétence des staticiens. On obtient alors les termes absolus f , et le rôle de l'ingénieur-géomètre commence. L'analogie avec le calcul de réseaux télémétriques est manifeste. Les éléments de la matrice de rigidité sont fournis par les équations normales.

La formation des matrices de rigidité par rapport aux axes de coordonnées x, y, z puis x', y', z' donne lieu à des constatations intéressantes; dans le premier cas les coefficients de poids non-quadratiques sont mieux éliminés, ce que l'on s'efforce de réaliser pour des raisons faciles à comprendre. La structure symétrique justifie ce changement de coordonnées; dans les réseaux télémétriques c'est exclu.

Matrices de rigidité

Avant rotation des axes x et y

Nœuds 1 et 2

3,37	0	0	—0,40	—0,40	0—
	2,14	0	—0,40	—0,40	0—
		1,07	0	0	0—
			2,14	0	0—
				3,37	0—
					1,07
symétrique					

Après rotation (x', y', z')

Nœuds 1 et 2

2,75	—0,62	0	—0,80	0	0—
	2,75	0		0	0—
		1,07	0	0	0—
			2,75	+ 0,62	0—
				2,75	0—
					1,07
symétrique					

Matrices inverses (Calcul par Centre électronique EPFL)

0,339	0	0	+ 0,079	+ 0,025	0—
	0,535	0	+ 0,102	+ 0,079	0—
		0,935	6	0	0—
			0,535	0	0—
				0,339	0—
					0,935
symétrique					

Matrices inverses (Calcul par Centre électronique EPFL)

0,438	+ 0,099	0	+ 0,143	—0,039	0—
	0,438	0	+ 0,039	+ 0,015	0—
		0,935	0	0	0—
			0,438	—0,099	0—
				0,438	0—
					0,935
symétrique					

Les matrices inverses sont dites aussi de flexibilité (Federungsmatrix).

Propriété d'invariance. Celle-ci est manifeste

$$0,339 + 0,535 + 0,935 = 0,438 + 0,438 + 0,935 = 1,81$$

Cette propriété subsiste si les trois coefficients quadratiques varient. Cela résulte du fait que les trièdres trirectangles tangents aux ellipsoïdes de déformation des nœuds ont leurs sommets sur des sphères dites orthoptiques.

Poids à postériori P . Ils constituent un contrôle bienvenu pour les calculs:

	$p.$	p/P	$p:P$
Arêtes supérieures (1-2, 2-3, 3-4, 4-1)	0,8	$0,472 \times 4$	1,89
Diagonales face supérieure (1-3, 2-4)	0,7	$0,358 \times 2$	0,716
Arêtes (1-5, 2-6, 3-7, 4-8)	1,27	$0,810 \times 4$	3,24
Diagonales faces latérales (1-6, 2-5 ...)	1,0	$0,572 \times 8$	4,576
Autres liaisons (1-7, 2-8, 3-5, 4-6)	1,0	$0,398 \times 4$	1,59
		22	

Ces P sont les poids des binômes ($-f + v$)

somme $p:P =$

12,01

(calcul fait à la règle)

(12 inconnues)

En général les poids p faibles
sont amplifiés dans une plus forte mesure.

Il faudrait encore déterminer la déformation quadratique moyenne M relative à l'unité de poids; cet élément est fonction du nombre de barres surabondantes, ici 10, des poids p , des corrections v . Ces dernières nécessitent la connaissance des termes absolus f . Cette étape des calculs est connue ainsi que les ellipsoïdes de déformation des nœuds dont la forme dépend des matrices inverses ci-dessus. L'analogie avec les réseaux télé-métriques se confirme. A l'échelle près on peut déterminer les ellipsoïdes de déformation des nœuds indépendamment des forces extérieures, car les termes absolus f n'interviennent pas pour la formation des matrices de rigidité. Provisoirement on posera $M = \pm 1$.

Solution sans coupures de barres surabondantes

Elle est actuelle mais sans compensation, sans formation de dérivées de l'énergie.

Les éléments à déterminer sont les 12 variations de coordonnées Dx , Dy , Dz des 4 nœuds libres 1, 2, 3, 4 puis les 22 forces axiales T (Stab-kräfte) dans les 22 barres qui interviennent dans les équations par leurs composantes et enfin les 4 réactions relatives aux nœuds 5, 6, 7, 8.

Vis-à-vis de ces inconnues on aura les équations suivantes: 22 équations aux déformations de la forme 2), sans termes absolus, linéaires en fonction des variations de coordonnées des nœuds libres, les coefficients a , b , c étant pratiquement les mêmes dans les équations 1) et 2). On pose $v = mT$ où m est le module connu de la barre ($m = 1/ES$).

En outre, en formant les composantes des forces: 24 équations d'équilibre pour les 8 nœuds dont 12 pour les nœuds libres, lesquelles fournissent des termes absolus, et 12 pour les nœuds fixes 5, 6, 7, 8.

En tout 46 équations linéaires pour 46 inconnues (voir [1]), soit 12 variations de coordonnées, 22 forces T dans les barres et 12 composantes des réactions. Parfois on se borne à calculer les 12 variations de coordonnées et les 22 forces axiales; on a 34 équations dont 12 d'équilibre et 22 aux déformations.

Cette solution fut longtemps considérée comme ayant un intérêt théorique plus que pratique; grâce aux calculatrices modernes elle devient actuelle.

Certains résultats sont mieux obtenus par l'une ou l'autre des solutions; éventuellement les praticiens confronteront les résultats en opérant des coupures puis pas de coupures.

En *conclusion* on peut dire que les ingénieurs-géomètres ou du génie rural peuvent utilement collaborer lors de tels calculs.

Littérature

- [1] *Mayor, B.*: Statique graphique spatiale (Payot, Lausanne).
- [2] *Stüssi, F.*: Baustatik II (Birkhäuser).
- [3] *Wolf, H.*: Ausgleichsrechnung ...
- [4] *Ansermet, A.*: La matrice de rigidité (Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, N° 2, 1970).
- [5] *Dupuis, G.*: Calculs par voie électronique (Publication EPUL N° 104).

DK 528.44:744.423

FIG-Kommission 6, Prag

F. Pfister

**Prag, 20. Oktober 1970: Tagung der Mitarbeiter und Korrespondenten
der Studiengruppe D, «Leitungskataster»**

Prag, 21.-23. Oktober 1970: Symposium «Die technischen Stadtkarten»

Die Kapazität des unterirdischen Raumes der Städte, der noch baulich erschlossen werden kann, ist nicht unbeschränkt; es muß hier geplant werden. Eine genaue und zuverlässige Dokumentation der unterirdischen Anlagen ist erste Voraussetzung für eine seriöse Planung. In den meisten Städten haben die einzelnen Verwaltungen über ihre unterirdischen Leitungen mehr oder weniger genaue, teilweise unvollständige Pläne, deren Qualität ihrem Ursprung entspricht.

In der Schweiz hat die Stadt Basel einen vorzüglichen zentralen Leitungskataster, in der Stadt Bern ist ein zentraler Leitungskataster im Aufbau. Die Stadt Winterthur hat vor einiger Zeit beschlossen, einen Leitungskataster einzuführen. In der Stadt Luzern ist seit 1908 ein Leitungsbüro mit der Doppelfunktion Leitungskataster und Bauleitung in Betrieb. Die immer größer werdenden Wohnagglomerationen, der immer