Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 69 (1971)

Heft: 2

Artikel: Zur Gewichtsansetzung bei der Ausgleichung kombinierter Netze

Autor: Gleinsvik, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-224307

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 2 · LXIX. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Februar 1971

DK 528.118:528.14:528.35

Zur Gewichtsansetzung bei der Ausgleichung kombinierter Netze [1]

P. Gleinsvik, Ås

Résumé

La stipulation des poids lors d'une compensation selon la méthode des moindres carrés constitue généralement un problème assez difficile. Dans l'étude présente, ce problème, en relation avec la compensation des réseaux mixtes de triangulation et trilatération, fait l'objet d'un examen, en premier lieu à l'égard de l'influence des poids relatifs donnés aux mesures linéaires et angulaires, sur la précision des points nouveaux.

La technique du procédé utilisé est la suivante: Les mesures, des angles aussi bien que des côtés, sur lesquelles les compensations sont fondées, sont engendrées artificiellement de deux univers à paramètres connus. Ceci signifie que l'erreur quadratique moyenne des angles et des côtés est donnée. De plus, on a utilisé comme base des compensations un problème construit (deux réseaux comprenant 12 et 13 points nouveaux respectivement), dont la solution exacte est connue. Les positions correctes des points jouant le rôle de points inconnus ainsi que les valeurs correctes des poids des deux modes de mesure sont par conséquent connues d'avance.

Sur la base de 25 séries d'observations indépendantes, un assez grand nombre de compensations (au total 250) furent effectuées; pour chaque série avec des proportions correctes et incorrectes entre les poids des angles et ceux des côtés. Les résultats furent ensuite comparés avec les données initiales.

Les résultats d'investigations présent peuvent être résumés ainsi:

La stipulation de la proportion des poids entre les angles et les côtés n'exerce, dans des limites relativement amples, qu'une influence assez faible sur la précision des points inconnus.

[1] Nach zwei an den technischen Universitäten in Berlin und Braunschweig gehaltenen Gastvorlesungen.

1. *Einleitung*

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß der Fixierung des Gewichtsverhältnisses zwischen den Winkeln und Seiten bei der Ausgleichung kombinierter Triangulations- und Trilaterationsnetze (kurzerhand kombinierte Netze genannt) der Gegenstand einer quantitativen Untersuchung sein.

Ganz allgemein stellt die Gewichtsbemessung einen der größten Unsicherheitsfaktoren der ganzen Ausgleichungsprozedur dar, da sie die Kenntnis der mittleren Fehler der auszugleichenden Meßgrößen als Voraussetzung hat. In dieser Hinsicht liegen die Verhältnisse vielleicht noch ungünstiger bei der Ausgleichung verschiedenartiger Beobachtungsgrößen, wie es bei kombinierten Netzen der Fall ist, als wenn es sich um homogene Beobachtungsgrößen handelt.

Glücklicherweise scheint die Erfahrung darauf hinzudeuten, daß die Gewichtsbemessung trotz ihrer prinzipiellen Bedeutung nicht so wichtig ist wie anfänglich angenommen. Es hat sich nämlich herausgestellt, daß die Gewichtsansetzung innerhalb vernünftiger Grenzen normalerweise eine recht geringfügige quantitative Auswirkung auf das Ausgleichungsergebnis ausübt. Diese Erfahrung bezieht sich vor allem auf die Ausgleichung gleichartiger Meßgrößen. Eine vom Autor angestellte Untersuchung betreffs der Ausgleichung polygonaler Netze scheint freilich die Vermutung zu rechtfertigen, daß sich, jedenfalls in den Hauptzügen, dieselbe Tendenz auch bei der gemeinsamen Ausgleichung von Winkeln und Strecken geltend macht (siehe [3]). Nun sind aber polygonale und kombinierte Netze ihrem Wesen nach zu verschieden, als daß Feststellungen auf dem einen Gebiet ohne weiteres auf das andere übertragen werden können. Eine separate Untersuchung über die Gewichtsverhältnisse bei kombinierten Netzen dürfte daher angebracht sein, nicht zuletzt in Anbetracht der zunehmenden Bedeutung dieser Art der Fixpunktbestimmung in der Praxis.

2. *Generelle Betrachtungen zur Ausgleichung verschiedenartiger Beobachtungsgrößen*

Bekanntlich lautet das der Methode der kleinsten Quadrate zugrunde liegende Ausgleichungsprinzip:

$$[pv^2] = \text{min., mit } p_i = \frac{1}{m_i^2} \text{ bzw. } p_i = \frac{c}{m_i^2}, \tag{1}$$

wobei c eine frei wählbare Konstante ist. Diese Relationen haben generell Gültigkeit ohne Rücksicht auf die Art der auszugleichenden Größen, *nur muß man für eine konsequente Verwendung von Maßeinheiten bei sämtlichen in der Ausgleichung vorkommenden Rechenoperationen [einschließlich der Gewichtsbemessung nach (1)] sorgen.*

Es stellt sich die Frage nach der Interpretation des aus der Ausgleichung resultierenden mittleren Fehlers der Gewichtseinheit (m_0), wenn es sich um dimensionsverschiedene Meßgrößen handelt. Die Antwort hierauf

ergibt sich aus der generellen Regel, daß sich der Gewichtseinheitsfehler auf eine fiktive Beobachtung bezieht, die dadurch charakterisiert ist, daß für sie das Gewicht den Wert eins annimmt. In dem Fall, wo die Gewichte gleich $\frac{1}{m^2}$ beziehungsweise $\frac{c}{m^2}$ festgesetzt sind, wird $p = 1$ für $m = 1$ beziehungsweise $m = \sqrt{c}$. Hieraus folgt, daß m_0 sich auf eine fiktive Beobachtung bezieht, deren mittlerer Fehler gleich eins beziehungsweise $\sqrt{c}$ ist; das heißt, *der Erwartungswert für m_0 ist gleich eins beziehungsweise $\sqrt{c}$.*

Durch diese Feststellung eröffnet sich eine wertvolle Kontrollmöglichkeit der A-priori-Schätzung der mittleren Fehler der auszugleichenden Meßgrößen und folglich auch der Gewichtsfixierung. Wir werden später (siehe 4.1) auf diese Möglichkeit zurückkommen.

3. *Die ausgeführte numerische Untersuchung*

3.1. *Prüfanordnung*

Die verwendete Prüftechnik ist die gleiche wie die, welche in [4] benutzt wurde. Für nähere Einzelheiten wird auf [4] verwiesen, so daß wir uns hier auf eine Zusammenfassung beschränken können. Kurz gesagt besteht die Technik darin, daß die Ausgleichung auf bekannten Daten basiert wird, sowohl in bezug auf das Beobachtungsmaterial als auch auf den durch die Ausgleichung zu bestimmenden Größenkomplex. Das Beobachtungsmaterial wird anhand einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekanntem mittleren Fehler erzeugt, und die wahren Werte der Elemente des Größenkomplexes werden im voraus gewählt. Damit ist das Ausgleichungsfazit bekannt und die Grundlage zum exakten Test des Ausgleichungsergebnisses geschaffen.

In der vorliegenden Arbeit wurde diese Technik in der Weise ausgenutzt, daß von gegebenen Werten der m_r und m_s (mittlerer Fehler der Richtungen beziehungsweise Seiten) ausgegangen wurde, wodurch der korrekte Wert des Gewichtsverhältnisses zwischen Richtungen und Seiten festgelegt wurde. Um Anhaltspunkte zur Beurteilung der Auswirkung einer fehlerhaften Fixierung dieses Gewichtsverhältnisses zu bekommen, wurde eine Serie von Ausgleichungen mit sowohl korrekten als auch fehlerhaften Werten von $p_r : p_s$ durchgeführt.

3.1.1. *Die konstruierte Ausgleichungsaufgabe*

Als Prüfnetz wurde das in Abbildung 1 wiedergegebene Netz gewählt, und zwar in folgenden zwei Alternativen.

Alternative GN (gezwängtes Netz). Hier besteht das Prüfnetz aus den drei Fixpunkten *A, B* und *C* und 12 Neupunkten. Die Probefigur setzt sich aus lauter gleichseitigen und gleich großen Einzeldreiecken zusammen, bei denen die Seitenlänge 5000 m beträgt. Das Netz wird durch Kombination von Triangulierung (Richtungsmessungen) und Trilateration bestimmt. Außer den zwei Anschlußrichtungen in jedem der Fix-

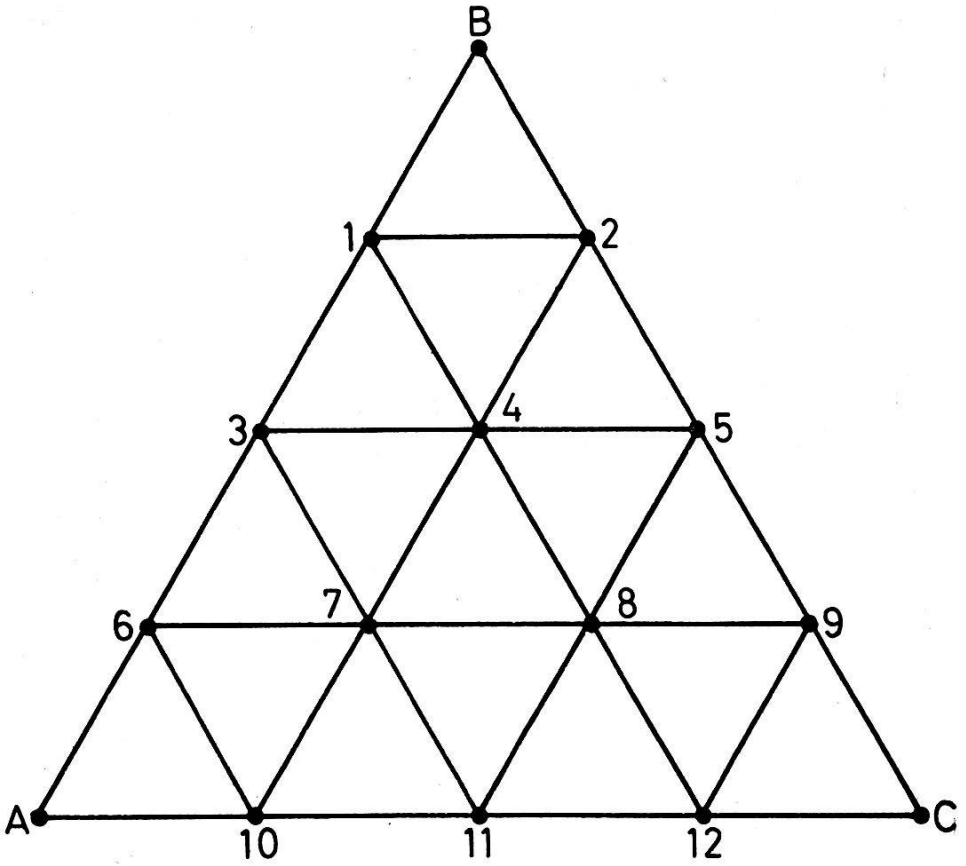

Abb. 1

punkte sind sämtliche in der Abbildung angegebenen Richtungen gemessen; das heißt, es wurden nur die Richtungen zwischen Nachbarpunkten gemessen, also keine «übergreifenden» Visuren – es werden im ganzen 66 Richtungsmessungen. Bei der Trilateration sind ebenfalls nur Nachbarseiten gemessen – im ganzen 30 Seiten. Das Netz enthält somit $66 + 30 - 24 - 15 = 57$ Überbestimmungen (Freiheitsgrade).

Alternative FN (freies Netz). Die Alternative GN dürfte repräsentativ für gezwängte Netze sein, indem hier das Neupunktsystem in ein Fixpunktdreieck eingezwängt wird. Um die Möglichkeit zu berücksichtigen, daß sich die Auswirkung fehlerhafter Gewichtsansetzungen in freien Netzen anders (und wahrscheinlich kritischer) gestaltet als in gezwängten Netzen, wurde zusätzlich die Alternative FN, charakterisiert dadurch, daß hier *B* als Neupunkt auftritt, untersucht. Außerdem unterscheidet sich die Alternative FN von GN dadurch, daß bei FN als Anschlußrichtung nur die gegenseitige Richtung *A–C* beobachtet ist (das heißt keine Visuren zwischen *A* und *B* beziehungsweise *B* und *C*). Die Alternative FN enthält im ganzen 62 Richtungs- und 30 Seitenmessungen, das heißt $62 + 30 - 26 - 15 = 51$ Freiheitsgrade.

3.1.2. Das Beobachtungsmaterial

Im vorliegenden Fall muß man über zwei Grundgesamtheiten verfügen, und zwar eine für die Richtungen und eine für die Seiten. Den be-

nutzten zwei normalverteilten Grundgesamtheiten wurden die Parameterwerte

$$m_r = 3^{cc} \text{ und } m_s = 2 \text{ cm}$$

zugrunde gelegt. Die gewählten Werte bedeuten ungefähr die gleiche lineare Genauigkeit der Richtungen und Seiten (die zum $m_r = 3^{cc}$ entsprechende lineare Genauigkeit für eine Seitenlänge gleich 5000 m beträgt 2,36 cm). Als Maßeinheiten wurden cc und cm gewählt. Bei der Fixierung der Gewichte auf Grund von

$$p = \frac{c}{m^2}$$

wurde c gleich m_r^2 gewählt, was

$$p_r = 1 \text{ und } p_s = \frac{m_r^2}{m_s^2} = 2{,}25$$

bedingt.

Auf Grund der zwei konstruierten, normalverteilten Grundgesamtheiten, die dadurch gekennzeichnet sind, daß ihren einzelnen Gliedern die gleiche mathematische Wahrscheinlichkeit zukommt, wurde das Beobachtungsmaterial erzeugt. Dies wurde durch eine Zufallsauswahl unter den zwei, jede aus 200 Elementen bestehenden, Grundgesamtheiten bewerkstelligt. Sämtliche Operationen, die in der verwendeten Prüfungsanordnung enthalten sind (das «Komponieren» des Beobachtungsmaterials, die Ausgleichung des Netzes sowie die Ermittlung der verschiedenen Größen, die in der nachfolgenden Genauigkeitsanalyse gebraucht werden), wurden zu einem vollautomatischen Rechenvorgang programmiert und mittels einer elektronischen Rechenanlage durchgeführt.

Für jede der zwei Alternativen wurde das Netz in der skizzierten künstlichen Weise insgesamt 25mal «beobachtet».

Auf Grund jeder einzelnen der 25 separaten und unabhängigen Beobachtungsserien, jede Serie bestehend aus 66 Richtungen und 30 Seiten (Alternative GN) beziehungsweise 62 Richtungen und 30 Seiten (Alternative FN), wurde das Netz 5mal ausgeglichen (vermittelnde Ausgleichung). Dies geschah jeweils auf Basis derselben Beobachtungen, jedoch unter Zugrundelegung verschiedener Gewichte, und zwar wurden folgende 5 Gewichtsalternativen gewählt (p_r überall gleich eins)

$$p_s = \frac{m_r^2}{m_s^2} = 0{,}5 = 1{,}0 = 2{,}25 = 4{,}0 = 9{,}0,$$

das heißt mit einem ziemlich weiten «Gewichtsspektrum» beiderseits des unterstrichenen korrekten Wertes.

3.2. Die Auswirkung der Gewichtsfixierung auf die Lagegenauigkeit

Das Testnetz wurde also für jede der Alternativen GN und FN insgesamt 125mal separat ausgeglichen. Hierbei wurden jedesmal außer dem Gewichtseinheitsfehler m_0 ebenfalls die wahren Lagefehler der Neupunkte

ermittelt (als provisorische Werte der Koordinatenunbekannten wurden die wahren Werte derselben gewählt, so daß die durch die Ausgleichung erhaltenen Werte der Unbekannten mit den wahren Koordinatenfehlern der Neupunkte identisch sind), auf Grund welcher sich der quadratische Mittelwert der Lagegenauigkeit sämtlicher Neupunkte ergab (n = Anzahl der Neupunkte):

$$m_p = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_s^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)}{n}}.$$

Dabei sind ε_x und ε_y die wahren Koordinatenfehler und ε_s der entsprechende Lagefehler. Der quadratische Mittelwert der empirischen ε_s dürfte das am meisten adäquate kollektive Maß der tatsächlichen Genauigkeit bei Punktbestimmungen sein.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Die hier angegebenen Werte sind quadratische Mittelwerte 25 separater Ausgleichungen.

Tabelle 1: Die Punktlagegenauigkeit u. a. m.

Netz-alter-native	Gewichtsalternative $p_r : p_s$				
	1 : 0,5	1 : 1	1 : 2,25	1 : 4	1 : 9
m_p	2,16 cm (18,7%)	1,90 cm (4,4%)	1,82 cm	1,92 cm (5,5%)	2,25 cm (23,6%)
GN M_p	2,11 cm	2,03 cm	1,90 cm	1,79 cm	1,01 cm
m_o	2,44cc	2,65cc	2,99cc	3,28cc	3,79cc
m_p	3,12 cm (22,2%)	2,74 cm (7,2%)	2,55 cm	2,61 cm (2,4%)	2,91 cm (14,0%)
FN M_p	3,26 cm	3,04 cm	2,74 cm	2,56 cm	2,23 cm
m_o	2,45cc	2,68cc	3,04cc	3,35cc	3,87cc

Zunächst werden wir die Aufmerksamkeit auf die festgestellte tatsächliche Lagegenauigkeit m_p, welche anhand von 25 × 12 = 300 (Alternative GN) beziehungsweise 25 × 13 = 325 (Alternative FN) Einzelwerten ermittelt wurde, richten. Was hier vor allem auffällt, ist die Tatsache, daß *die quantitative Auswirkung der Fixierung des Verhältnisses zwischen Richtungs- und Streckengewichten auf die Lagegenauigkeit der Neupunkte so geringfügig ist.* Sie ist gewiß viel geringer, als die meisten sich im voraus haben vorstellen können. Freilich ist die größte Genauigkeit (m_p = 1,82 cm beziehungsweise 2,55 cm) bei der Verwendung des korrekten Wertes dieses Verhältnisses zu verzeichnen. Recht massive Abweichungen vom korrekten Wert (1 ← 2, 25 → 4) haben jedoch nur geringfügige Genauigkeitsverluste zur Folge (die prozentualen Ausschläge der aus den falschen Gewichtsalternativen resultierenden m_p im Vergleich zur korrekten Gewichtsalternative sind in Klammern angegeben). Erst bei so großen Abweichungen vom korrekten Gewichtsverhältnis, wie sie in der Praxis normalerweise nicht zu befürchten sind, nimmt der Genauigkeitsverlust eine Größenordnung an, die bedenklich erscheint.

Weiter ist ersichtlich, daß die Vermutung, daß in freien Netzen die Gewichtsfixierung sich kritischer gestaltet als in gezwängten Netzen, keineswegs durch das Ergebnis der numerischen Untersuchung bestätigt wird.

3.3. Die Auswirkung der Gewichtsfixierung auf die empirischen Werte des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit

Die aus den Ausgleichungen resultierenden Werte des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit m_0 sind der Tabelle 1 zu entnehmen. (Die angegebenen Werte sind quadratische Mittelwerte der m_0 aus den 25 Ausgleichungen. Die Einzelwerte der m_0 sind der späteren Tabelle 3 zu entnehmen.)

Für die korrekte Gewichtsansetzung ist eine überzeugende Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung festzustellen ($m_0 = 2{,}99^{cc}$ beziehungsweise $3{,}04^{cc}$ statt des wahren Wertes $\bar{m} = 3{,}00^{cc}$).

Weiter ist aus den empirischen Werten der m_0 ersichtlich, daß fehlerhafte Gewichtsansetzungen auch fehlerhafte Werte des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit zur Folge haben, und zwar in der Weise, daß für $p_r : p_s > \bar{p}_r : \bar{p}_s$ die Beobachtungsgenauigkeit über- und für $p_r : p_s < \bar{p}_r : \bar{p}_s$ unterschätzt wird (hier und im nachfolgenden werden wahre Werte durch Überstreichen gekennzeichnet).

3.4. Die Auswirkung der Gewichtsansetzung auf die Schätzwerte der Punktgenauigkeit

Einerseits interessiert hier, wie sich die tatsächliche Lagegenauigkeit zu den durch die Ausgleichung ermittelten Schätzwerten derselben und andererseits zu der theoretisch zu erwartenden Genauigkeit verhält.

Die Übereinstimmung zwischen tatsächlicher und geschätzter Genauigkeit kommt durch den Vergleich der empirischen m_p mit den entsprechenden theoretischen Werten der mittleren Punktfehler zum Ausdruck. Letzterer drückt nämlich die Lageunsicherheit der Neupunkte explizit aus, und zwar in der Bedeutung vom Abstand zwischen korrekter und tatsächlicher Punktlage.

Die erforderlichen Daten zur Ermittlung der mittleren Punktfehler, gegeben durch

$$M_p = m_0 \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}} \text{ (bzw. } \bar{M}_p = \bar{m}_0 \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}}) \qquad (2)$$

sind der Tabelle 2 zu entnehmen. In (2) bedeutet M_p der sich aus der Ausgleichung ergebende Schätzwert des mittleren Punktfehlers, während $\bar{M}_p$ der entsprechende Erwartungswert ist.

Die in der Tabelle angegebenen Mittelwerte sind Mittelwerte der Gewichtskoeffizienten der mittleren Punktfehler sämtlicher Netzpunkte. $M_p = m_0 \sqrt{Q_{PP_{\text{mittel}}}}$ stellt somit das repräsentativste Genauigkeitsmaß des Netzes als Ganzes dar und sollte demnach unmittelbar mit den empirischen Werten der m_p vergleichbar sein.

Tabelle 2: Die Gewichtskoeffizienten der mittleren Punktfehler
($Q_{pp} = Q_{xx} + Q_{yy}$)

Netz-alter-native	Punkt	Gewichtsalternative				
		1 : 0,5	1 : 1	1 : 2,25	1 : 4	1 : 9
GN	1, 2, 6, 9, 10, 12	0,7100	0,5500	0,3802	0,2801	0,1699
	3, 5, 11	0,9050	0,7063	0,4872	0,3550	0,2093
	4, 7, 8	0,6760	0,5352	0,3783	0,2818	0,1713
	Mittel der Q_{pp}	0,7503	0,5854	0,4065	0,2993	0,1801
FN	*B*	5,2275	3,7331	2,3711	1,6315	0,8881
	1, 2	2,9063	2,0562	1,2854	0,8782	0,4779
	3, 5	1,7755	1,2829	0,8235	0,5747	0,3221
	4	1,5967	1,1477	0,7337	0,5120	0,2876
	6, 9	0,9567	0,7120	0,4761	0,3442	0,2041
	7, 8	1,0520	0,7826	0,5289	0,3857	0,2296
	10, 12	0,8463	0,6438	0,4461	0,3315	0,2035
	11	1,1273	0,8572	0,5905	0,4337	0,2585
	Mittel der Q_{pp}	1,7712	1,2841	0,8320	0,5861	0,3314

Der Vergleich der m_p und M_p in Tabelle 1 läßt auf eine recht befriedigende Übereinstimmung zwischen tatsächlicher und geschätzter Genauigkeit (abgesehen von der Gewichtsalternative $p_r : p_s = 1 : 9$) schließen. Daß dies auch in den Fällen mit fehlerhaften Gewichtsbemessungen zutrifft, hängt damit zusammen, daß die durch die fehlerhafte Gewichtsfixierung entstandene Verfälschung von m_0 und diejenige von Q_{pp} jeweils in die entgegengesetzte Richtung zielt, so daß der Effekt auf $M_p = m_0 \sqrt{Q_{pp}}$ teilweise ausgeschaltet wird.

Die nächste Frage betrifft die Übereinstimmung zwischen der tatsächlichen und der theoretisch zu erwartenden Genauigkeit der Neupunkte. Es liegt in der Natur der Sache, daß diese Frage nur für die korrekte Gewichtsalternative sinnvoll ist. Im vorliegenden Fall, wo der wahre Wert von m_0 bekannt ist, läßt sich der mit dem empirischen m_p korrespondierende wahre Wert mittels (2) ermitteln.

$$\text{Alt. GN: } \overline{M}_p = \overline{m}_0 \sqrt{0{,}4065} = 1{,}9 \text{ cm (empirischer Wert} = 1{,}8 \text{ cm)}$$

$$\text{Alt. FN: } \overline{M}_p = \overline{m}_0 \sqrt{0{,}8320} = 2{,}7 \text{ cm (empirischer Wert} = 2{,}6 \text{ cm)}$$

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung muß als recht zufriedenstellend bezeichnet werden.

Hierdurch wird indirekt die Tatsache, daß das Genauigkeitsmaß, *der mittlere Punktfehler,* die Lagegenauigkeit bei einer Punktbestimmung explizit ausdrückt, bestätigt, und zwar als Abstand zwischen der wahren und der aktuellen Punktlage in der Bedeutung vom mittleren Fehler.

4. *Nachträglicher Nachweis fehlerhafter Gewichtsfixierungen*

Jede in Frage kommende Methode zur nachträglichen Prüfung der Richtigkeit der Gewichtsansetzung läuft auf irgendeine Untersuchung hinaus, *ob die A-priori-Schätzung der mittleren Fehler, auf welcher die Gewichtsfixierung basiert, durch die Ausgleichung bestätigt wird.*

4.1. *Vergleich des empirischen Wertes des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit mit dem Erwartungswert desselben*

Durch die anfänglich festgestellte Tatsache, daß der mittlere Fehler der Gewichtseinheit einen gegebenen Erwartungswert besitzt, nämlich den Wert eins (für $p = 1 : m^2$) beziehungsweise $\sqrt{c}$ (für $p = c : m^2$) eröffnet sich unmittelbar eine Testmöglichkeit, die sich sehr bequem gestaltet, nicht zuletzt deshalb, daß die hier zu prüfende Größe ohnehin berechnet und vorhanden sein wird.

Nach diesem Kriterium *führen Abweichungen des aus der Ausgleichung resultierenden Wertes des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit vom theoretischen Erwartungswert desselben, die sich mit der Konfidenz des ersteren nicht vereinen lassen, zur Ablehnung der A-priori-Schätzung der mittleren Fehler der auszugleichenden Meßgrößen und demnach zur Ablehnung der der Ausgleichung zugrunde liegenden Gewichtsbemessung.*

Betrachten wir zunächst die mathematische Seite dieses Testes. Mit Ausgangspunkt in der fundamentalen Beziehung zwischen χ^2 einerseits und dem empirischen Wert des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit (m_0), dem wahren Wert desselben ($\bar{m}$) und der Anzahl der Überbestimmungen ($\ddot{u}$) andererseits

$$\chi^2 = \ddot{u} \frac{m_0{}^2}{\bar{m}^2}$$

findet sich

$$m_0 = \bar{m} \sqrt{\frac{\chi^2}{\ddot{u}}} \tag{3}$$

Die hier zu prüfende Hypothese lautet

$$\bar{m}_0 = 1 \text{ bzw. } \sqrt{c}.$$

Auf Grund von (3) lassen sich nun mittels der χ^2-Verteilung «Akzeptierungsbereiche» für den empirischen Wert von m_0 errechnen, so daß die Hypothese abzulehnen ist, falls m_0 außerhalb fällt.

Um Anhaltspunkte zur Beurteilung der Effektivität dieses Testes zu bekommen, werden wir ihn auf das vorliegende Material anwenden; wir sind ja in der einmaligen Lage, daß uns das «Fazit» im voraus bekannt ist. Zu diesem Zweck sind die unter Zugrundelegung verschiedener Irrtumswahrscheinlichkeiten (Signifikanzniveaus) mathematischen Kriterien für die Akzeptierung der empirischen Werte der m_0, falls die Hypothese zutrifft, in Tabelle 3 aufgeführt (zweiseitige Fragestellung).

Tabelle 3: Akzeptierungsbereiche des empirischen Wertes des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit

Signifikanzniveau	Netzalternative	
	GN	FN
0,27%	$2{,}18 < m_0 < 3{,}86$	$2{,}14 < m_0 < 3{,}91$
1%	$2{,}29 < m_0 < 3{,}73$	$2{,}25 < m_0 < 3{,}77$
5%	$2{,}45 < m_0 < 3{,}55$	$2{,}42 < m_0 < 3{,}58$
10%	$2{,}53 < m_0 < 3{,}45$	$2{,}51 < m_0 < 3{,}48$

Weiter sind der Tabelle 4 die für jede Gewichtsalternative aus den insgesamt 250 Ausgleichungen resultierenden Einzelwerten der m_0 zu entnehmen.

Tabelle 4: Die Einzelwerte der mittleren Fehler der Gewichtseinheit

Nr. der Ausgl.	GN				
	1 : 0,5	1 : 1	1 : 2,25	1 : 4	1 : 9
1	2,38 (c)	2,64	3,07	3,49 (d)	4,22 (a)
2	2,75	2,98	3,31	3,58 (c)	4,17 (a)
3	2,60	2,82	3,15	3,43	3,93 (a)
4	2,45 (c)	2,66	3,03	3,38	3,98 (a)
5	2,21 (b)	2,42 (c)	2,71	2,95	3,30
6	2,43 (c)	2,60	2,87	3,13	3,60 (c)
7	2,67	2,87	3,16	3,41	3,86 (a)
8	2,73	2,97	3,39	3,77 (b)	4,44 (a)
9	2,20 (b)	2,37 (c)	2,64	2,90	3,45
10	2,33 (c)	2,47 (d)	2,67	2,84	3,11
11	2,10 (a)	2,40 (c)	2,85	3,22	3,80 (b)
12	2,35 (c)	2,61	3,03	3,44	4,17 (a)
13	2,47 (d)	2,72	3,06	3,32	3,71 (c)
14	2,24 (b)	2,47 (d)	2,84	3,16	3,68 (c)
15	2,44 (c)	2,61	2,91	3,20	3,75 (b)
16	2,45 (c)	2,67	3,00	3,26	3,66 (c)
17	1,94 (a)	2,07 (a)	2,27 (b)	2,44 (c)	2,72
18	2,13 (a)	2,39 (c)	2,81	3,19	3,82 (b)
19	2,37 (c)	2,53 (d)	2,77	2,98	3,35
20	2,54	2,82	3,22	3,54 (d)	4,06 (a)
21	3,17	3,39	3,75 (b)	4,10 (a)	4,74 (a)
22	3,01	3,24	3,60 (c)	3,91 (a)	4,47 (a)
23	2,63	2,81	3,12	3,37	3,77 (b)
24	1,99 (a)	2,18 (a)	2,48 (d)	2,77	3,29
25	1,91 (a)	2,12 (a)	2,44 (c)	2,73	3,26

Nr. der Ausgl.	FN				
	1 : 0,5	1 : 1	1 : 2,25	1 : 4	1 : 9
1	2,22 (b)	2,40 (c)	2,71	2,99	3,48
2	2,87	3,07	3,38	3,67 (c)	4,18 (a)
3	2,74	2,89	3,13	3,33	3,67 (c)
4	2,53	2,73	3,00	3,21	3,53 (d)
5	2,24 (b)	2,57	3,13	3,62 (c)	4,43 (a)
6	2,32 (c)	2,56	2,97	3,34	3,96 (a)
7	2,46 (d)	2,66	2,97	3,23	3,71 (c)
8	2,79	3,04	3,42	3,72 (c)	4,19 (a)
9	2,27 (c)	2,54	2,91	3,22	3,72 (c)
10	2,07 (a)	2,31 (c)	2,66	2,95	3,40
11	2,03 (a)	2,33 (c)	2,77	3,15	3,85 (b)
12	1,88 (a)	2,03 (a)	2,27 (c)	2,49	2,90
13	2,77	3,05	3,44	3,74 (c)	4,19 (a)
14	2,40 (c)	2,65	3,10	3,54 (d)	4,40 (a)
15	2,17 (b)	2,45 (d)	2,87	3,22	3,78 (b)
16	2,45 (d)	2,72	3,16	3,58 (c)	4,39 (a)
17	2,49 (d)	2,72	3,10	3,46	4,05 (a)
18	1,99 (a)	2,20 (b)	2,53	2,82	3,32
19	2,17 (b)	2,39 (c)	2,75	3,05	3,51 (d)
20	2,51 (d)	2,71	3,06	3,37	3,90 (b)
21	2,53	2,73	2,99	3,19	3,46
22	3,32	3,50 (d)	3,80 (b)	4,06 (a)	4,47 (a)
23	2,92	3,22	3,63 (c)	3,96 (a)	4,43 (a)
24	2,64	2,82	3,10	3,34	3,68 (c)
25	1,97 (a)	2,20 (b)	2,57	2,92	3,51 (d)

In der Tabelle sind diejenigen Werte, die schon auf dem 0,27%-Niveau unakzeptabel sind, mit einem *a* gekennzeichnet. Die zusätzlichen unakzeptablen Fälle, bedingt durch den Übergang vom 0,27%- zum 1%-Niveau, sind mit einem *b* versehen. In der gleichen Weise zeigen *c* und *d* die zusätzlichen unakzeptablen Fälle beim Übergang vom 1%- zum 5%-Niveau beziehungsweise vom 5%- zum 10%-Niveau.

Die Ergebnisse des Testes des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit für beide Netzalternativen zugleich sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

Tabelle 5: Status des Nachweises fehlerhafter Gewichtsbemessungen

Signifikanz-niveau	Anzahl korrekt abgelehnter Fälle				Zu Unrecht abgelehnte 1 : 2,25-Fälle
	1 : 0,5	1 : 1	1 : 4	1 : 9	
0,27%	10	4	4	20	0
1%	17	6	5	27	3
5%	28	14	12	35	7
10%	33	19	15	38	8

Der Tabelle 5 ist zu entnehmen, daß bei vergrößerter Irrtumswahrscheinlichkeit eine entsprechende Vergrößerung der Anzahl aufgedeckter, gewichtsfalscher Fälle zu verzeichnen ist. Die Medaille hat aber leider eine Rückseite, die darin besteht, daß das vergrößerte Aufdeckungsvermögen nur auf Kosten eines entsprechend größeren Risikos für das Verwerfen korrekter Gewichtsfälle zu gewinnen ist.

Die übliche «geodätische» Sicherheit (0,27 %) zeichnet sich insofern vorteilhaft aus, daß bei ihr überhaupt kein Fehler erster Art auftritt, dafür mehrere Fehler zweiter Art als bei den größeren Signifikanzniveaus.

Weiterhin ist ersichtlich, daß ohne Rücksicht auf die Größe des zugrunde gelegten Signifikanzniveaus das Aufdeckungsvermögen fehlerhafter Gewichtsansetzungen mit der Größe der letzteren zunimmt.

Im ganzen gesehen muß die Bilanz des ausgeführten Kontrolltestes eher als wenig ermutigend bezeichnet werden und dürfte die Schlußfolgerung rechtfertigen, daß in der Praxis mit der Möglichkeit des Nachweises fehlerhafter Gewichtsbemessungen wohl kaum zu rechnen ist. Auf jeden Fall dann nicht, wenn sich die begangenen Fehler der Gewichtsansetzung innerhalb vernünftiger Grenzen halten, und dies ist ja in der geodätischen Praxis gerade der interessante Fall (für die mäßigen fehlerhaften Alternativen 1:1 und 1:4 sind ja zusammen nur 8 (bei 0,27 %), 11 (bei 1 %), 26 (bei 5 %) und 34 (bei 10 %) Fälle aus den insgesamt 100 Fehlerfällen nachgewiesen worden, während der Rest zu den extremen Alternativen 1:0,5 und 1:9 gehört).

Das hier festgestellte Versagen des Nachweises fehlerhafter Gewichtsfixierungen und der früher konstatierte geringfügige Einfluß der Gewichtsstipulierung auf das Ausgleichungsergebnis hängen natürlich eng zusammen (hat folglich etwa nichts mit Unzulänglichkeiten des verwendeten Testverfahrens zu tun). Es handelt sich in Wirklichkeit um zwei Seiten desselben mathematischen Sachverhalts.

5. *Schlußfolgerungen*

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung bestätigen, daß auf dem Gebiet der trigonometrischen Punktbestimmung durch Kombination von Triangulierung und Trilateration die Gewichtsfestsetzung innerhalb ziemlich weiter Grenzen ganz geringfügige genauigkeitsmäßige Auswirkungen zur Folge hat. Diese Feststellung bezieht sich vor allem auf die Fixierung des Gewichtsverhältnisses zwischen den als gleich genau beobachteten Richtungen einerseits und den ebenfalls gleich genau gemessenen Strecken andererseits. Es besteht jedoch wenig Grund anzunehmen, daß sich interne fehlerhafte Gewichtsbemessungen quantitativ anders auswirken würden.

Für die Praxis ist hieraus die Lehre zu ziehen, daß eine allzu spitzfindige Gewichtsansetzung der Mühe nicht wert ist. Bei der Ausgleichung kombinierter Netze sowie polygonaler Züge und Netze dürfte es in vielen Fällen erlaubt sein, nach zweckmäßiger Abstimmung der Berechnungseinheiten, sämtliche Gewichte gleichzusetzen. Die Voraussetzung für

diese Vereinfachung, die wesentliche Erleichterungen hinsichtlich der Rechenprozedur mit sich führt, ist, daß die Maßeinheiten der Richtungen (beziehungsweise Winkel) und Strecken in der Weise gewählt werden, daß ausgedrückt in diesen Einheiten

$$\frac{1}{m_r^2} \approx \frac{1}{m_s^2}, \text{ das heißt } m_r \approx m_s \text{ wird.}$$

Beispiel der Ausgleichung kombinierter Netze: $m_r = 4^{cc}$ und $m_s = 30$ mm. Abgestimmte Berechnungseinheiten sind hier cc und cm. In Anbetracht der in der vorliegenden Untersuchung festgestellten ziemlich weitgehenden Unbeeinflußbarkeit der Punktgenauigkeit der Gewichtsfixierung gegenüber dürfte hier der korrekte Wert $p_r : p_s = 9:16$ ohne Bedenken durch den Näherungswert $p_r : p_s = 1$ ersetzt werden.

Beispiel der Ausgleichung polygonaler Netze: $m_\alpha = 30^{cc}$ und $m_s = 20$ mm. Abgestimmte Berechnungseinheiten sind hier cc und mm beziehungsweise 10^{cc} und cm.

Weiterhin hat sich herausgestellt, daß der Nachweis eines fehlerhaften Ansatzes des Gewichtsverhältnisses $p_r : p_s$ auf Grund des Ausgleichungsergebnisses dermaßen unsicher ist, daß man in der Praxis davon absehen kann. Erst wenn die Fehler der Gewichtsansetzung so große Werte annehmen, daß sie als praktisch unrealistisch gelten können, manifestieren diese sich an dem Ausgleichungsergebnis derart, daß statistische Prüfverfahren mit ziemlicher Sicherheit angewandt werden können.

Die Schlußfolgerung, daß das Gewichtsverhältnis zwischen Richtung und Distanz relativ wenig Einfluß auf das Resultat ausübt, hat sich an einem vollkommen symmetrischen Beispiel ergeben. Die Frage ist daher naheliegend, ob nicht bei stark unsymmetrischer geometrischer Netzform oder bei unsymmetrischer Verteilung von Distanzen und Winkeln die Sache anders aussieht. Es ist anzunehmen, daß bei ungünstigem Zusammenwirken der genannten Faktoren die Schlußfolgerungen ein wenig modifiziert werden müssen, grundsätzlich ändern werden sie sich aber nicht. In einer vom Verfasser noch nicht publizierten Studie wird sich nämlich zeigen, daß die in der vorliegenden Arbeit festgestellte Tendenz sich in eine weit umfassendere Gesetzmäßigkeit einfügt, die darauf hinausläuft, daß ganz allgemein die Gewichtsbemessung das Ergebnis einer Ausgleichung recht wenig beeinflußt.

Schrifttum

[1] *Aeschlimann, H.:* ALGOL-Programme zur vermittelnden Netzausgleichung. Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, 1968, Nr. 2.

[2] *Fischer, W.:* Strecken- und Richtungsgewichte. Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, 1969, Nr. 5.

[3] *Gleinsvik, P.:* Strenge Ausgleichung kontra Näherungsverfahren bei der Berechnung polygonaler Züge und Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1968, Heft 1.

[4] *Gleinsvik, P.:* Experimentelle Prüfung von Auswertemethoden in der Meßtechnik durch Simulation. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1970, Heft 10.

[5] *Grossmann, W.:* Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, 3. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York 1969.

[6] *Lilly, J. E.:* Least squares adjustments of dissimilar quantities. Empire Survey Review, Vol. XVI, No. 121, 1961.

[7] *Linkwitz, Klaus:* Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1961, Heft 6, 7 und 9.

[8] *Rainsford, H. F.:* Combined adjustments of angles and distances. Survey Review, Vol. XIX, No. 150, 1968.

[9] *Rinner, K.:* Entfernungsmessungen mit lichtelektrischen und elektrischen Geräten im Testnetz Graz. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 123, V. Internationaler Kurs für geodätische Streckenmessung 1965 in Zürich, München 1966.

[10] *Wolf, H.:* Die Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1958, Heft 10.

DK 528.35.063:531,2

Sur l'analogie entre les calculs de réseaux télémétriques et les systèmes hyperstatiques

par A. Ansermet

Zusammenfassung

Es kann die Berechnung eines «unbestimmten» Fachwerksystems mit der Ausgleichung eines Streckennetzes verglichen werden. In den Verbesserungsgleichungen sind Absolutglieder. In einer neuen Lösung, welche eine bedeutende Rolle spielt, sind keine Absolutglieder in den Gleichungen, welche die elastischen Stablängenänderungen ausdrücken. Eine Wahl zwischen den beiden Lösungen ist nicht leicht.

Résumé

Une comparaison peut être établie entre le calcul de réseaux télémétriques et de systèmes articulés hyperstatiques. Les équations amélioratrices contiennent des termes absolus. Il n'y a pas de termes absolus dans les équations exprimant les variations de longueurs des barres; une telle solution est nouvelle et joue un rôle important. Un choix n'est pas facile à faire entre ces deux solutions.

Généralités

Dans le numéro de février dernier de la présente Revue quelques lignes furent consacrées à la matrice dite de rigidité (Steifigkeitsmatrix); les ingénieurs-géomètres et du génie rural sont familiarisés avec ces calculs