Vergleich verschiedener Methoden für die Berechnung von Schwerestörungen im Aussenraum

Autor(en): **Witte, Bertold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **67 (1969)**

Heft 7

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-222998

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 7 · LXVII. Jahrgang **Erscheint monatlich** **15. Juli 1969**

DK 528.24:528.27

Vergleich verschiedener Methoden für die Berechnung von Schwerestörungen im Außenraum

Bertold Witte

Summary

Gravity disturbances computed in three different ways (Poisson's integral, Stokes' formula and a formula derived from Green's function) are compared. It is shown that the results of Poisson's integral are more accurate than the values obtained from the two other methods.

Résumé

La comparaison des valeurs des perturbations de la pesanteur dans l'espace extérieur, calculées par trois méthodes différentes – intégral de Poisson, formule de Stokes et une formule intégrale qui est dérivée de la fonction de Green – montre que les valeurs obtenues à l'aide de l'intégral de Poisson sont plus précises que les valeurs obtenues par les deux autres méthodes.

Zusammenfassung

Die Ergebnisse der Berechnungen von Schwerestörungen im Außenraum nach drei verschiedenen Verfahren – Poissonsches Integral, Formel von Stokes und einer aus der Greenschen Funktion abgeleiteten Integralformel – werden miteinander verglichen. Dabei zeigt es sich, daß die mit Hilfe des Poissonschen Integrals gefundenen Werte für die Schwerestörungen genauer sind als die mit Hilfe der beiden anderen Verfahren ermittelten.

Viele der bisher behandelten Verfahren für die Berechnung von Schwerewerten außerhalb des Erdkörpers – Upward Continuation – gehen von der Poissonschen Integralformel aus [1, 2], für die häufig eine Ebene als

Bezugsfläche genommen wird, womit sich die folgende Darstellung ergibt:

$$T_p = \frac{H}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{T}{l^3}\, dx\, dy \quad \text{bzw.} \quad \Delta g_p = \frac{H}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta g}{l^3}\, dx\, dy$$

T = Störpotential; Δg = Schwereanomalie; $l = \sqrt{x^2 + y^2 + H^2}$

Diese Integraldarstellung eignet sich ausgezeichnet für Höhen bis zu 250 km und kann bei der Auswertung von Fluggravimetermessungen benutzt werden. Da auch Satelliten mit speziellen Gravimetern ausgerüstet werden können, erhalten die «sphärischen» Formeln für die Bestimmung von Schwerestörungen im «fernen» Außenraum eine neue Bedeutung. Es soll daher das Verhalten verschiedener sphärischer Formeln untersucht werden, um an einem Modell den Geltungsbereich dieser Formeln abzugrenzen und eine optimale Größe für die Schrittweite bei der numerischen Integration dieser Formeln zu finden.

Im folgenden soll nun die Berechnung von Schwerestörungen im Außenraum nach drei verschiedenen Verfahren durchgeführt werden.

1. Unter Verwendung der Poissonschen Gleichung [1] gelangt man für die Bestimmung von Schwerestörungen im Außenraum zu:

$$\delta g_{\bar{p}} = \frac{R^2 \cdot (r^2 - R^2)}{4\pi \cdot r} \iint\limits_{\sigma} \frac{\delta g}{l^3}\, d\sigma \tag{1}$$

R = Radius der Erdkugel
H = Höhe des Aufpunktes über dem Kugelrand
σ = Kugeloberfläche
$d\sigma$ = Oberflächenelement
$r = R + H$
$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2\,Rr\cos\psi}$
ψ = sphärischer Abstand

2. Die Ableitung der Stockesschen Formel führt zu folgendem Ausdruck [1]:

$$\delta g_{\bar{p}} = \frac{R}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \Delta g\, \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial r}\, d\sigma; \quad S(r, \psi) = \text{Stokessche Funktion}$$

$$\delta g_{\bar{p}} = -\frac{R}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} \left\{ \frac{R(r^2 - R^2)}{rl^3} + \frac{4R}{rl} + \frac{R}{r^2} - \frac{6\,Rl}{r^3} - \frac{R^2}{r^3} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos\psi \left(13 + 6\,ln\, \frac{r - R\cos\psi + l}{2r} \right) \right\} \cdot \Delta g \cdot d\sigma \tag{2}$$

3. Die Benutzung einer aus dem Greenschen Satz abgeleiteten Formel führt zu folgender Darstellungsform für die Schwerestörung im Außenraum [3]:

$$\delta g_{\bar{P}} = -\frac{1}{2}\int_{\psi=0}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{l^3}\left[\left(1+\frac{H}{R}\right)-\cos\psi\right]\cdot(n+1)+\right.$$

$$+\frac{R^2}{l^5}\left[3\left(1+\frac{H}{R}\right)-2\left(1+\left(1+\frac{H}{R}\right)^2\cdot\cos\psi\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\frac{H}{R}\right)\cdot\cos^2\psi\right]\right\}A_{n0}\cdot P_n(\cos\psi)\cdot R^2\cdot\sin\psi\,d\psi \qquad (3)$$

Die Berechnung von A_{n0} erfolgt nach [4], S. 85, mit

$$A_{n0} = R\frac{2n+1}{4\pi}\int_{\psi=0}^{\pi}\int_{A=0}^{2\pi}\delta g\cdot P_n(\cos\psi)\cdot\sin\psi\cdot d\psi\,dA \qquad (4)$$

Die in den Formeln (2) bis (4) benutzten Symbole entsprechen den in Gleichung (1) benutzten.

Mit diesen drei Formeln [Gleichungen (1) bis (3)] soll nun für ein und dasselbe Modell durch numerische Integration festgestellt werden, welche dieser drei Gleichungen mit einer minimalen Anzahl von Integrationsschritten (das heißt mit möglichst wenig Rechenzeit) zu praktikablen Ergebnissen führt. Dazu sei eine Kugel (siehe Abb. 1) mit einem Radius von $R = 6371$ km, einer Punktmasse m sowie die Gravitationskonstante f vorgegeben, wobei das Produkt $f \cdot m$ den Wert $3 \cdot 10^8$ cm³ sec⁻² habe. Die Punktmasse befinde sich im Abstand $\bar{R} = 4000$ km vom Mittelpunkt O entfernt im Punkt Q. Außerdem sei der sphärische Abstand für den Aufpunkt P mit $\vartheta_A = \pi/6$ vorgegeben (siehe Abb. 1). Das gleiche Modell wurde auch in [3] benutzt.

Für die numerische Quadratur der obigen Formeln wird die Schwere δg als Flächenmittelwert von Teilen konzentrisch um den Aufpunkt verteilter sphärischer Flächenelemente ermittelt. Die Koordinaten der Flächenmittelpunkte lassen sich mit Hilfe des sphärischen Kosinussatzes berechnen. Der sphärische Abstand ψ und das Azimut A werden vorgegeben und sind von der Lage der jeweiligen Flächenelemente abhängig.

Das Potential T läßt sich aus der folgenden Beziehung errechnen:

$$T = \frac{f\cdot m}{r_p}$$

$$r_p = \sqrt{R^2 + \bar{R}^2 - 2R\cdot\bar{R}\cdot\cos\vartheta_p}$$

Für die Schwerestörung δg ergibt sich hiermit:

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{f \cdot m \cdot (R - \overline{R} \cos \vartheta_p)}{\sqrt{(R^2 + \overline{R}^2 - 2\, R \cdot \overline{R} \cos \vartheta_p)^3}} \tag{5}$$

Hiermit lassen sich für jeden Flächenmittelpunkt eines Flächenelementes die zugehörigen Werte für δg berechnen, so daß die numerische Quadratur der Gleichungen (1) bis (3) durchgeführt werden kann. Die Differentiale $d\psi$ und dA werden für die numerische Integration der Gleichungen (1) bis (3) durch kleine Winkel $\Delta\psi$ und ΔA ersetzt. Somit ergibt sich

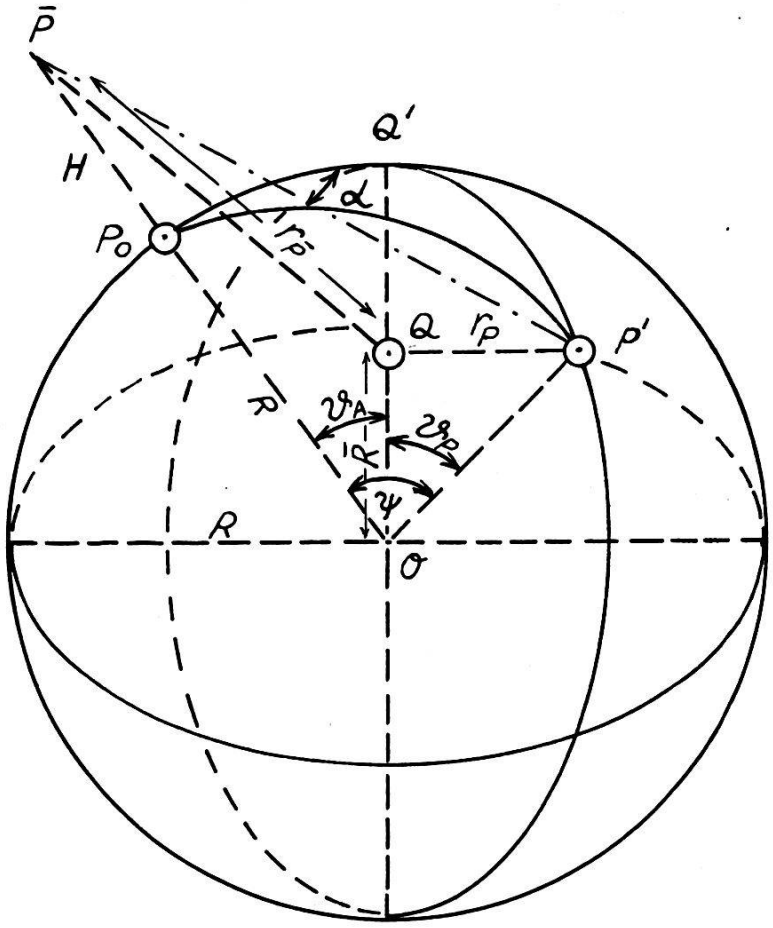

Abb. 1

Benutzte Bezeichnungen:

$\overline{R} = OQ$ = Abstand der Punktmasse m vom Mittelpunkt
$\overline{P}$ = Aufpunkt
P_0 = Projektion des Aufpunktes
P = laufender Punkt
O = Mittelpunkt
α = Azimut

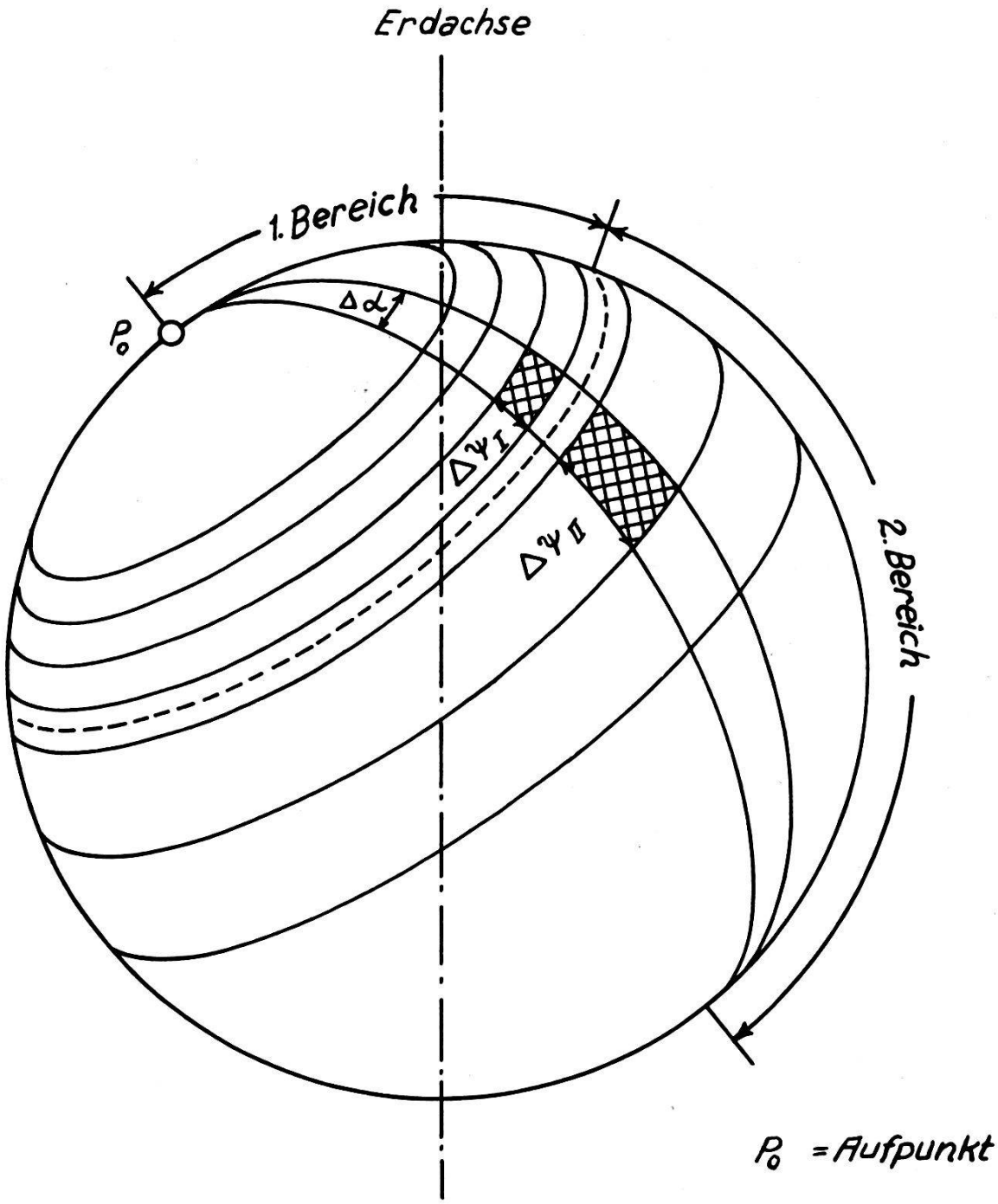

Abb. 2 Integrationsbereiche

für die obigen Gleichungen folgende Darstellung, wenn die Integration (Summation) für ψ in zwei Bereiche aufgeteilt wird, wobei sich der erste Bereich von 0 bis 30° und der zweite Bereich von 30 bis 180° erstreckt.

$$\delta g_{\bar{P}} = \frac{R^2 (r^2 - R^2)}{4\pi \cdot r} \left\{ \sum_{i=0}^{60} \sum_{j=0}^{120} \frac{\delta g(\psi_i, A_j)}{l^3(\psi_i)} \cdot \Delta\psi_{\mathrm{I}} \cdot \sin\psi_i \cdot \Delta A_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=60}^{120} \sum_{j=0}^{120} \frac{\delta g(\psi_i, A_j)}{l^3(\psi_i)} \cdot \Delta\psi_{\mathrm{II}} \cdot \sin\psi_i \cdot \Delta A_j \right\} \tag{6}$$

Mit der Stokesschen Formel [Gleichung (2)]:

$$\delta g_{\bar{p}} = -\frac{R^2}{4\pi}\left\{\sum_{i=0}^{60}\sum_{j=0}^{120}\left[\frac{r^2-R^2}{r\cdot l^3(\psi_i)}+\frac{4}{r\cdot l(\psi_i)}+\frac{1}{r^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{6\cdot l(\psi_i)}{r^3}-\frac{R}{r^3}\cdot\cos\psi_i\left(13+6\cdot ln\frac{r-R\cdot\cos\psi_i+l(\psi_i)}{2r}\right)\right]$$

$$\Delta g(\psi_i, A_j)\cdot\sin\psi_i\cdot\Delta\psi_{\mathrm{I}}\cdot\Delta A_j+$$

$$\sum_{i=60}^{120}\sum_{j=0}^{120}\left[\frac{r^2-R^2}{r\cdot l^3(\psi_i)}+\frac{4}{r\cdot l(\psi_i)}+\frac{1}{r^2}-\frac{6\cdot l(\psi_i)}{r^3}-\frac{R}{r^3}\cdot\cos\psi_i\right.$$

$$\left.\left.\left(13+6\,ln\frac{(r-R\cos\psi_i+l\psi_i)}{2r}\right)\Delta g(\psi_i, A_j)\cdot\sin\psi_i\cdot\Delta\psi_{\mathrm{II}}\cdot\Delta A_j\right]\right\}\ ($$

Für Gleichung (3) ergibt sich analog:

$$\delta g_{\bar{p}} = -\frac{R^2}{2}\sum_{n=1}^{14}\left[\sum_{i=0}^{60}\left\{-\frac{n+1}{l^3(\psi_i)}\left[\left(1+\frac{H}{R}\right)-\cos\psi_i\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{l^5(\psi_i)}\left[3\left(1+\frac{H}{R}\right)-2\left(1+\left(1+\frac{H}{R}\right)^2\cdot\cos\psi_i\right)+\left(1+\frac{H}{R}\right)\cdot\cos^2\psi_i\cdot\right]\right\}$$

$$\cdot A_{n0}\cdot P_n(\cos\psi_i)\cdot\sin\psi_i\cdot\Delta\psi_{\mathrm{I}}+\sum_{i=60}^{120}\left\{-\frac{n+1}{l^3(\psi_i)}\cdot\left[\left(1+\frac{H}{R}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\cos\psi_i\right]+\frac{R^2}{l^5(\psi_i)}\left[3\left(1+\frac{H}{R}\right)-2\left(1+\left(1+\frac{H}{R}\right)^2\cdot\cos\psi_i\right)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(1+\frac{H}{R}\right)\cdot\cos^2\psi_i\right]\right\}\cdot A_{n0}\cdot P_n(\cos\psi_i)\cdot\sin\psi_i\cdot\Delta\psi_{\mathrm{II}}\right] \qquad (8)$$

Die Berechnung von A_{n0} nach Gleichung (4) wird ebenfalls mit numerischer Quadratur durchgeführt:

$$A_{n0} = R \frac{2n+1}{4\pi} \cdot \left[\sum_{i=0}^{60} \left\{ \sum_{j=0}^{120} \delta g(\psi_i, A_j) \right\} P_n(\cos\psi_i) \cdot \sin\psi_i \cdot \Delta\psi_{\mathrm{I}} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=60}^{120} \left\{ \sum_{j=0}^{120} \delta g(\psi_i, A_j) \right\} \cdot P_n(\cos\psi_i) \cdot \sin\psi_i \cdot \Delta\psi_{\mathrm{II}} \right]$$

Um für die so ermittelten Werte für δg im Außenraum einen Sollwert zu erhalten, sei folgende Formel abgeleitet:

Für den Aufpunkt $\overline{P}$ gilt:

$$\overline{T}_P = \frac{f \cdot m}{\sqrt{(R+H)^2 + \overline{R}^2 - 2(R+H)\,\overline{R} \cdot \cos\vartheta_A}}$$

Damit findet man für $\delta\overline{g}_P$:

$$\delta\overline{g}_P = -\frac{\partial \overline{T}_P}{\partial R} = \frac{f \cdot m \cdot ((R+H) - \overline{R}\cos\vartheta_A)}{\sqrt{((R+H)^2 + \overline{R}^2 - 2(R+H) \cdot \overline{R} \cdot \cos\vartheta_A)^3}} \tag{9}$$

Für das vorher beschriebene Beispiel (Erdkugelradius $R = 6371$ km; sphärischer Abstand des Aufpunktes vom Pol $\vartheta_A = 30°$; vorgegebene Schwereverteilung) und einer Höhe des Aufpunktes von 1000 km über der Kugeloberfläche findet man nach Gleichung (9) einen Sollwert von

$$\delta\overline{g}_P = 13{,}86 \text{ mGal}$$

Die folgende Tabelle zeigt nun zum Vergleich die Ergebnisse, die aus den drei vorher beschriebenen Verfahren gewonnen werden, wenn die Anzahl der Glieder für die numerische Integration variiert wird, aber die Höhe des Aufpunktes mit 1000 km über der Kugeloberfläche konstant bleibt.

Anzahl der Integrationsschritte im 1. Bereich für ψ	Poisson		Stokes		Green	
	$\delta\overline{g}$ mGal	Fehler %	$\delta\overline{g}$ mGal	Fehler %	$\delta\overline{g}$ mGal	Fehler %
60	13,86	–	16,80	21,2	14,91	7,6
90	13,86	–	16,80	21,2	14,91	7,6
120	13,86	–	16,79	21,1	14,88	7,4
240	13,86	–	16,78	21,0	14,88	7,4

Aus der Tabelle läßt sich deutlich entnehmen, daß die mit Hilfe des Poissonschen Integrals gefundenen Ergebnisse sehr gut sind. Die Erhöhung der Anzahl der Integrationsschritte zeigt für die Stokessche

Funktion und für die aus dem Greenschen Satz abgeleitete Formel nur eine unwesentliche Verbesserung der Resultate. Um eine entscheidende Genauigkeitssteigerung zu erreichen, müßte die Zahl der Integrationsschritte verzehnfacht werden, um die Ergebnisse für die Stokessche beziehungsweise Greensche Funktion bei numerischer Quadratur zu verbessern. Eine Verzehnfachung der Integrationsschritte hätte allerdings dann auch zum mindesten eine Verzehnfachung der Rechenzeit zur Folge. Wahrscheinlich sind die Stokessche Funktion und die aus dem Greenschen Satz abgeleitete Formel für eine numerische Rechnung nicht so gut geeignet.

Die Variation der Höhe des Aufpunktes über der Kugeloberfläche zeigt die nachstehenden Ergebnisse, wenn die Anzahl der Integrationsschritte den in den Gleichungen (6) bis (8) angegebenen Werten (1. Bereich $\psi = 60$ Elemente; 2. Bereich $\psi = 60$ Elemente, Bereich für $A = 120$ Elemente) entspricht.

Höhe des Aufpunktes über der Kugeloberfläche km	Sollwert mGal	Poisson		Stokes		Green	
		$\delta\bar{g}$ mGal	Fehler %	$\delta\bar{g}$ mGal	Fehler %	$\delta\bar{g}$ mGal	Fehler %
500	16,58	16,58	–	21,12	27,4	19,86	19,8
1000	13,86	13,86	–	16,80	21,2	14,91	7,6
2000	9,89	9,89	–	10,31	4,3	10,80	9,2
3000	7,31	7,30	0,1	6,60	9,7	8,11	10,9
4000	5,57	5,57	–	4,39	20,8	6,67	19,7
5000	4,37	4,37	–	3,03	30,7	5,41	23,8

Auch diese Tabelle zeigt deutlich, wie gut sich das Poissonsche Integral für die Berechnung von Schwerestörungen im Außenraum eignet. Für bestimmte Höhen reichen auch die mit Hilfe der Stokesschen Funktion gewonnenen Ergebnisse aus.

Ferner muß bei den hier aufgeführten Resultaten berücksichtigt werden, daß die mit Hilfe der aus der Greenschen Funktion abgeleiteten Formel gewonnenen Ergebnisse wegen der Entwicklung in Kugelfunktionen erheblich mehr Rechenzeit beanspruchen.

Die Rechnungen wurden auf der IBM 7090 der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung an der Universität Bonn durchgeführt.

Literatur

[1] *Heiskanen, A.; Moritz, H.:* Physical Geodesy. San Francisco 1967.

[2] *Hirvonen, R.A.; Moritz, H.:* Practical Computation of Gravity at High Altitudes. Report No 27. The Ohio State University, Dep. of Geodetic Science, Columbus, Ohio, 1963.

[3] *Witte, B.:* Die Berechnung von Schwerestörungen im Außenraum mit Hilfe des Greenschen Satzes, Zeitschrift für Vermessungswesen 1969, Heft 4, S. 135–141.

[4] *Tallquist, H.J.:* Tables of Spherical Harmonics, Göteborg 1957.