

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 66 (1968)

Heft: 12

Artikel: Nochmals zur Problematik des Niveauellipsoides

Autor: Ledersteger, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-222322>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nochmals zur Problematik des Niveauellipsoids

von K. Ledersteger

Im Juniheft 1967 dieser Zeitschrift habe ich mich ziemlich eingehend mit der Frage des Niveauellipsoids befaßt [1]. Neben den bekannten Lösungen von Pizzetti und Somigliana einerseits [2] und von W. D. Lambert [3] andererseits konnte eine Reihe weiterer Massenanordnungen angegeben werden, die aber durchwegs ebenso wie die früheren physikalisch sinnlos sind. Man muß entweder mit Flächenbelegungen oder mit unendlicher Dichte operieren oder eine Zunahme der Abplattung der Niveauflächen oder eine Abnahme der Dichte nach innen in Kauf nehmen. Nun ist es zwar richtig, daß die Wahl des Bezugskörpers der Geodäsie innerhalb gewisser enger Grenzen mehr oder minder willkürlich ist, insofern die Zerlegung der Radienvektoren der Geoidpunkte oder der Punkte der physischen Erdoberfläche in einen normalen Hauptteil und eine Undulation oder Höhenanomalie in rein geometrischer Hinsicht auf verschiedene Weise durchführbar ist. Bedenkt man demgegenüber, daß bei Verwendung des Normalsphäroides der Erde, das sich vom volumgleichen Niveauellipsoid nur um wenige Meter unterscheidet, sowohl die Undulationen wie auch die Schwerestörungen und Lotabweichungen als reiner Ausdruck der Massenstörungen in der Erdkruste physikalischen Sinn gewinnen, so scheint das starre Festhalten am Niveauellipsoid, dessen fiktiver Charakter gar nicht bestritten wird, einigermaßen befremdend.

Auf der XIV. Generalversammlung der UGGI wurde im Herbst vorigen Jahres in Luzern und Zürich ein neues geodätisches Bezugssystem beschlossen, und zwar wieder ein Niveauellipsoid, das wie alle Rotations-Niveausphäroide durch fünf Bestimmungsstücke in Näherung 4.O. eindeutig festliegt:

$$\begin{aligned} k^2 E &= 398603 \cdot 10^{15} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}; \quad a = 6,378160 \cdot 10^8 \text{ cm}; \\ \omega^2 &= 5,317496 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-2}; \quad J_2 = 108270 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Mit $k^2 = 66,7 \cdot 10^{-9} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$ folgt sofort $E = 5976,0570 \cdot 10^{24} \text{ g}$. Ferner ist $\bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3 / k^2 E = 346140,8 \cdot 10^{-8}$. Sodann liefern die beiden Gleichungen des Helmert-Systems

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (3 J_2 + \bar{\varepsilon}) &= e - e^2 + e \bar{\varepsilon} - \frac{5}{8} J_4 \\ f_4 &= 3,5 e^2 - 2,5 e \bar{\varepsilon} + 4,375 J_4 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

die Abplattung e und die Massefunktion J_4 :

$$e = 335291,4 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = - 236,2 \cdot 10^{-8}. \quad (2a)$$

Schließlich sei der Vollständigkeit halber auch die Schwereformel angeführt:

$$\gamma = 978,0318 (1 + 0,005 3024 \sin^2 \varphi - 0,000 0059 \sin^4 \varphi) \text{ Gal.} \quad (3)$$

In [1] konnte an Hand der theoretischen Beziehungen zwischen den Massefunktionen und den Formparametern gezeigt werden, daß für die Daten der Erde ($\bar{\epsilon} = xe; x \sim 1,032$) ein strenges Niveaumodell überhaupt unmöglich ist. Für $x = 0,8$ resultieren die einzigen bekannten möglichen Niveaumodelle, nämlich die homogenen, MacLaurinschen Ellipsoide. Tatsächlich schließt auch die berühmte Theorie Pizzettis und Somiglianas keinen Beweis für die physikalische Möglichkeit des heterogenen Niveaumodells in sich. Sie geht vielmehr von der Voraussetzung aus, daß es für die mit vorgegebener Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotierende Erdmasse eine heterogene Anordnung gibt, bei der die freie Oberfläche von rotationsellipsoidischer Gestalt ist. Ebenso willkürlich erscheint bei der Entwicklung der Kräftefunktion W in rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten die für die Gewinnung des Niveaumodells unerlässliche Forderung, daß die Konstante $w_{40}^{(c)}$, eine bestimmte Massefunktion 4. O., verschwindet, oder wie oben die Forderung $f_4 = 0$.

Auch die Zweischalenmodelle, der Grundtyp der heterogenen Massenanordnungen, wurden bereits in [1] diskutiert. Doch sollen diese Betrachtungen noch entsprechend erweitert und vertieft werden. Unter einem Zweischalenmodell verstehen wir eine aus zwei homogenen Teilen bestehende Massenanordnung, deren Oberfläche, die Manteloberfläche, ein Sphäroid sein soll, während wir für die Kernoberfläche ein exaktes Ellipsoid voraussetzen. Ein Teil E_1 der Gesamtmasse E bildet also ein homogenes Sphäroid, während die Restmasse $E_2 = E - E_1$ zusätzlich im Kern homogen verteilt wird. Für das homogene Ellipsoid ist bekanntlich:

$$J_2 = \frac{1}{5} (2e - e^2); J_4 = -\frac{3}{35} (2e - e^2)^2, \quad (4)$$

zu welchen Werten beim homogenen Sphäroid nach Darwin [4] noch hinzutritt:

$$\Delta J_2 = -\frac{2}{35} f_4; \quad \Delta J_4 = +\frac{8}{105} f_4. \quad (4a)$$

Damit ergibt sich gemäß:

$$(C - A) = (C - A)_1 + (C - A)_2$$

oder

$$J_2 E a^2 = J_{2,1} E_1 a^2 + J_{2,2} E_2 a_k^2$$

für die statische Abplattung des Zweischalenmodells, wenn a_k und e_k Achse und Abplattung der Kernoberfläche bezeichnen,

$$5 J_2 = (2e - e^2 - \frac{2}{7} f_4) (E_1 : E) + (2e_k - e_k^2) (a_k : a)^2 (E_2 : E) \quad (5)$$

und analog für die Massefunktion J_4 :

$$-\frac{35}{3} J_4 = \left[(2e - e^2)^2 - \frac{8}{9} f_4 \right] (E_1 : E) + (2e_k - e_k^2)^2 (a_k : a)^4 (E_2 : E). \quad (5a)$$

Setzt man in Näherung 2. O. $\bar{\varepsilon} = xe$ und $3J_2 = (2-x)e$ und in Näherung 4. O. : $f_4 = -\kappa e^2$ und $J_4 = -\xi e^2$, so kann die zweite Gleichung (2) geschrieben werden

$$-\kappa + 4,375 \xi = 3,5 - 2,5x. \quad (2b)$$

Mit den zu $\kappa = 0$ gehörigen Werten (2a) ergibt sich zum Beispiel $\xi = 0,2101$ und $x = 1,0324$. Nunmehr halten wir die vier ersten Daten (1) fest und wählen als 5. Bestimmungsstück $J_4 = -308.10^{-8}$, was annähernd dem Normalsphäroid der Erde entspricht. Man findet $e = 335246,4.10^{-8}$; $\kappa = 0,2802$; $\xi = 0,2740$ und schließlich $x = 1,0325$. Im (x, κ) -Diagramm fällt also die Kurve $J_2 = \text{const}$ äußerst nahe mit einer Vertikalen $x = \text{const}$ zusammen. In aller Strenge jedoch nimmt in dieser Kurve mit wachsendem κ die Abplattung e geringfügig ab und x geringfügig zu. Für jeden Punkt (x, κ) unserer Kurve liefern dann die beiden Gleichungen (5) eindeutige Werte für $(E_1 : E) = y$ und $(2e_k - e_k^2)(a_k : a)^2 = z$. Man erhält also ein homogenes Sphäroid (a, e, f_4) einer bestimmten Teilmasse E_1 , dem die Restmasse E_2 in unendlich vielen konfokalen Ellipsoiden überlagert sein kann, so daß der Punkt unendlich viele Zweischalenmodelle mit untereinander konfokalen Kernoberflächen repräsentiert. Damit haben wir eine lineare Reihe unwesentlicher Massenkonfigurationen gefunden, aus denen wir selbstverständlich jene als «wesentlich» herausheben können, für welche auch die streng ellipsoidische Kernoberfläche zur Niveaufläche wird, das heißt die jeweils einzige mögliche zweiparametrische Gleichgewichtsfigur (Wiechert-Modell).

Wir beginnen mit dem Fall $E_1 = 0$, also mit dem Schnittpunkt der Kurve $J_2 = 108270.10^{-8}$ mit der Parabel der äußeren Niveauflächen der MacLaurinschen Ellipsoide $F = |J_4| : J_2^2 = 15/7$. Hierfür gilt $J_4 = -251,2.10^{-8}$, $e = 335282,0.10^{-8}$ und $f_4 = -65,9.10^{-8}$. Der zweite Grenzfall ist durch $z = 0$, also durch kugelige Kerne oder speziell durch das natürlich bereits fiktive Wiechert-Modell $a_k = 0$ gegeben. Man findet $y = 0,80864$, $e = 335227,6.10^{-8}$, $J_4 = -338,0.10^{-8}$, $f_4 = -446,6.10^{-8}$. Die reellen Lösungen liegen also in den Grenzen $0 \leq y \leq 0,80864$.

Unterhalb der Kurve $F = 15/7$ wird E_1 immer stärker negativ, das heißt alle diese Lösungen sind bereits fiktiver Natur. Speziell für das genäherte Niveauellipsoid ($f_4 = 0$) lauten die Gleichungen (5) mit den Werten (2a):

$$\begin{aligned} 541350,0 &= 669458,7y + z(1-y) \\ 2755,4 &= 4481,7y + z^2(1-y) \\ (541350,0 - z) &= (669458,7 - z)y \\ (2755,4 - z^2) &= (4481,7 - z^2)y \end{aligned} \quad (6)$$

oder

Diese Gleichungen sind nur für $y = -\infty$ und für $(669458,7 - z) = (4481,7 - z^2) = 0$ miteinander verträglich. E_2 wird positiv unendlich und die freie Oberfläche gehört der Schar der konfokalen Kernellipsoide an. Es kann also der Mantel auf eine unendlich dünne, homogene Oberflächenschicht mit einer unendlich großen negativen räumlichen Dichte zusammenschrumpfen. Doch sind all diese Lösungen physikalisch völlig sinnlos. Man erkennt dies deutlich, wenn man mit endlichen Massen operieren wollte. Sind nämlich Oberfläche und Kernoberfläche konfokale

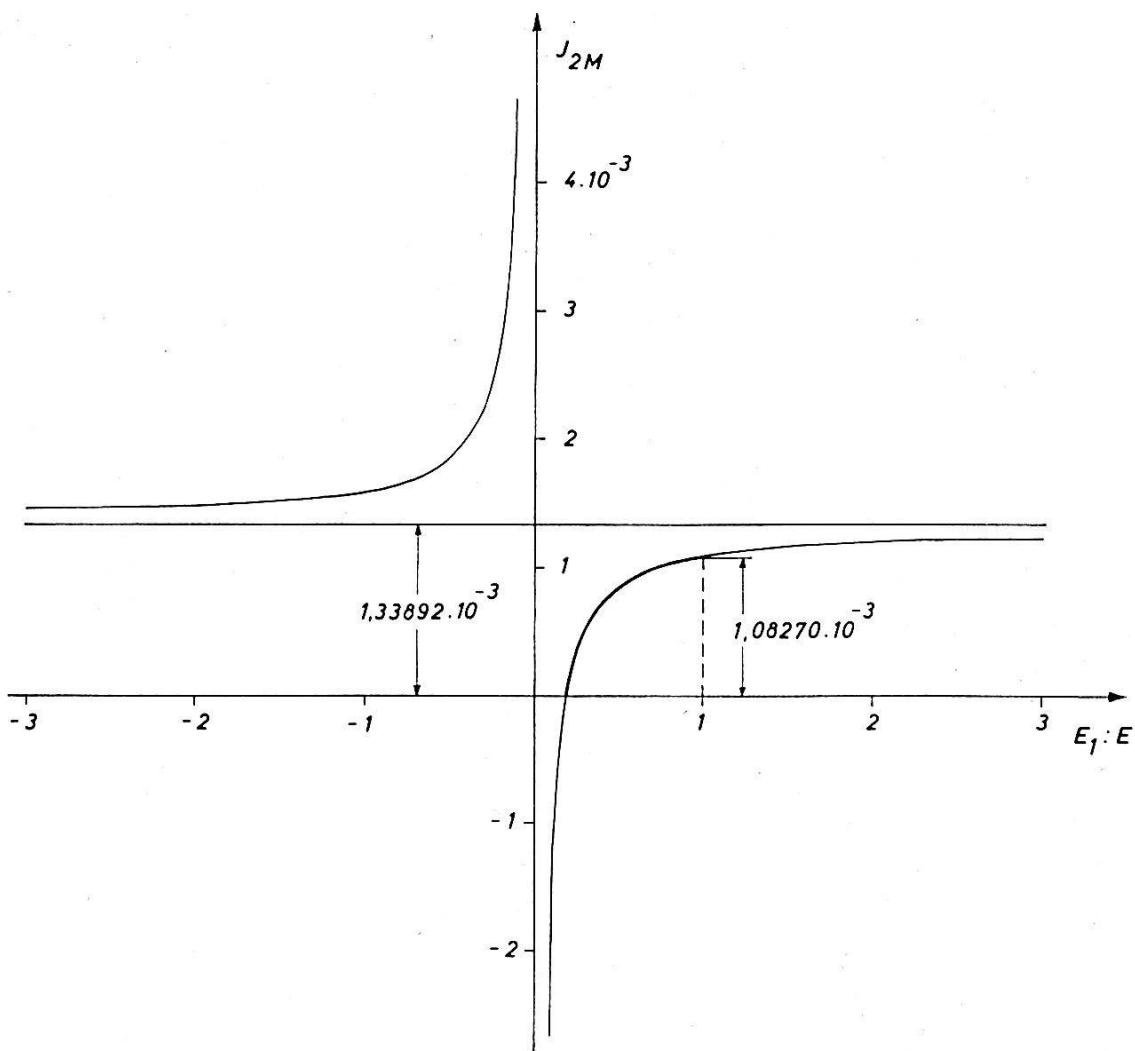


Fig. 1

Ellipsoide, so könnte jedes derartige Zweischalenmodell durch unwesentliche Verschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen in ein homogenes Ellipsoid verwandelt werden, dessen Oberfläche bei der vorgegebenen Rotationsgeschwindigkeit nur für eine größere Masse ($E = 7691,4828 \cdot 10^{24}$ g) zur Niveauplätze wird.

Nunmehr wählen wir ein etwas allgemeineres Modell, indem wir die Forderung der Homogenität des Mantels fallen lassen. Der Kern sei also

ein homogenes Ellipsoid, der Mantel heterogen, die Oberfläche des Gesamtmodells jedoch ein zur Kernoberfläche konfokales, exaktes Ellipsoid:

$$(2 e_k - e_k^2) a_k^2 = (2 e - e^2) a^2, \quad (7)$$

das aber nur genähert gleichzeitig Niveaumenge ist. Dann ist für die freie Oberfläche der Anteil des Kernes an der statischen Abplattung $(2 e - e^2)/5 = 133891,7 \cdot 10^{-8}$ und es gilt in Einheiten 10^{-8} :

$$108270 = J_{2,M} (E_M : E) + 133891,7 (E_K : E). \quad (8a)$$

Analog ist an der Oberfläche

$$-\frac{35}{3} J_{4,K} = (2 e_k - e_k^2)^2 (a_k : a)^4 = (2 e - e^2)^2,$$

also

$$-236,17 = J_{4,M} (E_M : E) - 384,15 (E_K : E). \quad (8b)$$

Die Gleichungen (8) können für $E_M = 0$, $E_K = E$ nur zurecht bestehen, wenn die Massefunktionen $J_{2,M}$ und $J_{4,M}$ unendlich groß werden. Wir schreiben sie:

$$-25621,7 = (J_{2,M} - 133891,7) (E_M : E) \quad (8a')$$

$$+147,98 = (J_{4,M} + 384,15) (E_M : E). \quad (8b')$$

Bei der an sich physikalisch sinnlosen Annahme $E_M < 0$ sinkt das stets positive $J_{2,M}$ zuerst rapide ab, erreicht für $E_M = -E$ bereits den Wert $+159513,5 \cdot 10^{-8}$ und konvergiert für $E_M \rightarrow -\infty$ gegen $+133891,7 \cdot 10^{-8}$. Für positives E_M ist $J_{2,M}$ zuerst negativ, geht für $E_M = +0,191362 E$ durch Null und nimmt für $E_M = E$ den Wert $+108270 \cdot 10^{-8}$ an. Schließlich konvergiert es für $E_M \rightarrow +\infty$ abermals gegen $+133891,7 \cdot 10^{-8}$. Doch ist jede Lösung für $E_M > 1$ wegen der damit verbundenen negativen Kerndichte physikalisch sinnlos. Somit stehen allein die Lösungen für

$$+0,191362 E \leq E_M \leq E \quad (8a'')$$

zur Diskussion (Figur 1).

Die Massefunktion $J_{4,M}$ ist für $E_M < 0$ zuerst stark negativ, wird für $E_1 = -E$ bereits $-532,13 \cdot 10^{-8}$ und konvergiert für $E_M \rightarrow -\infty$ gegen $-384,15 \cdot 10^{-8}$. Für positives E_M ist $J_{4,M}$ zuerst stark positiv, geht für $E_M = +0,385204 E$ durch Null und nimmt für $E_M = E$ den Wert $-236,2 \cdot 10^{-8}$ an. Für $E_M \rightarrow +\infty$ konvergiert $J_{4,M}$ abermals gegen $-384,15 \cdot 10^{-8}$. Mithin stehen bloß die Lösungen für

$$+0,385204 E \leq E_M \leq E \quad (8b'')$$

zur Diskussion, was übrigens bei gleichzeitiger Berücksichtigung von $J_{2,M}$ und $J_{4,M}$ gültig bleibt (Figur 2).

Hieraus geht bereits klar hervor, daß für unser Modell ein strenges Niveauellipsoid undenkbar ist. Denn mit jeder weiteren Massefunktion rückt die untere Grenze immer näher an E heran, während sich die An-

nahme $E_M = E$ für einen endlichen Kern bereits als unmöglich erwiesen hat. Wir begnügen uns hier mit der Näherung 4. O., obwohl für die Daten der Erde sogar noch in Näherung 8. O. Niveaumellipsoide denkbar sind, wobei freilich die Frage offen bleibt, ob man hierfür physikalisch sinnvolle Massenanordnungen finden kann. Gemäß (7) ist die Abplattung der Kernoberfläche größer als die der ellipsoidischen Oberfläche, welche voraussetzungsgemäß in Näherung 4. O. gleichzeitig Niveaumenge ist. Da aber

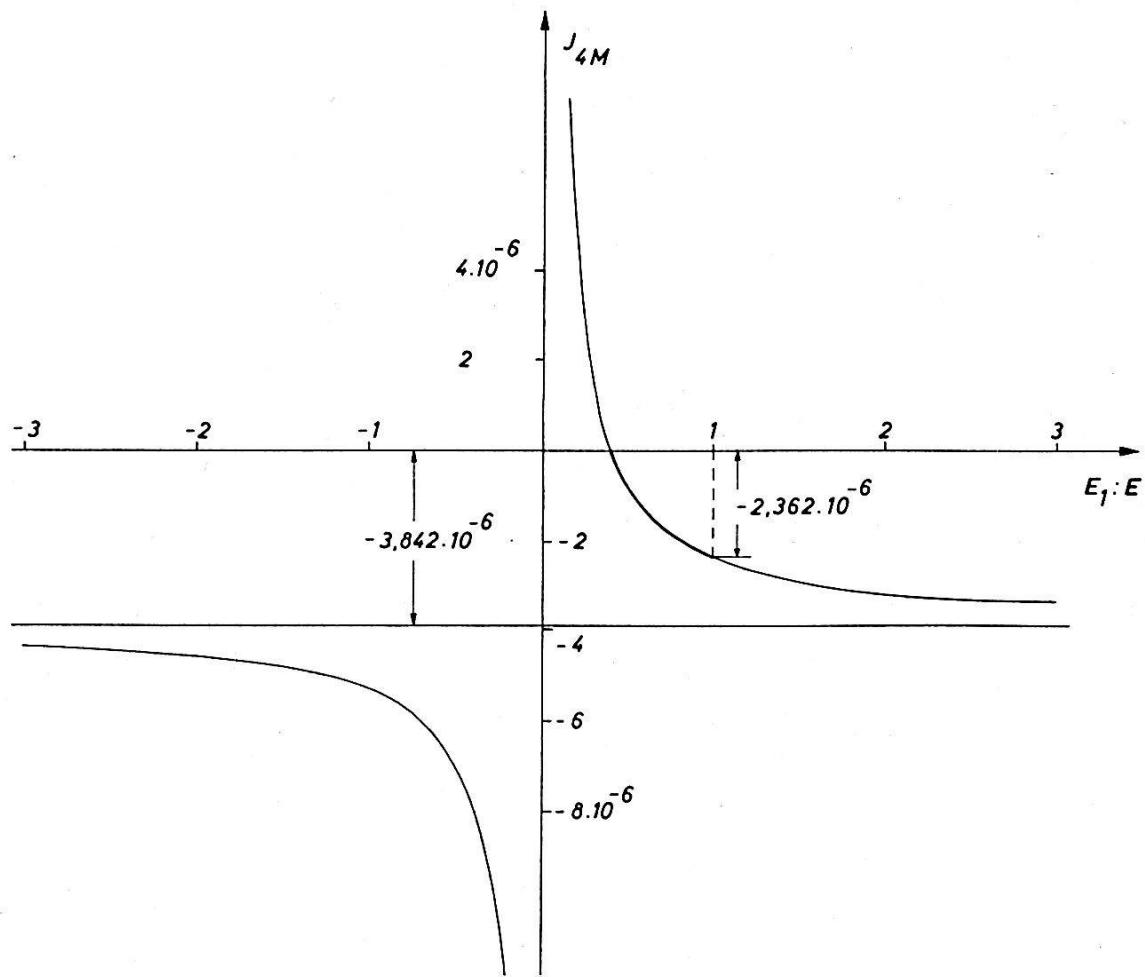


Fig. 2

die Abplattung der inneren Niveaumassen mit abnehmendem Äquatorradius niemals zunehmen kann, folgt, daß die Kernoberfläche niemals gleichzeitig Niveaumenge sein kann. Unser Modell kann also weder Gleichgewichtsfigur noch Gleichgewichtsanordnung sein, darf also bloß als allgemeine rotations- und äquatorsymmetrische Massenanordnung gewertet werden. Schon dies lehrt, daß eine derartige Massenanordnung in der Natur, das heißt für einen Himmelskörper kaum realisierbar ist. Zufolge (8b") muß die Kernmasse zwischen den Grenzen

$$0 < E_K \leq + 0,614796 E \quad (9)$$

liegen und im Grenzfall $e_k = 1$, das heißt für die Fokalscheibe mit dem Radius $a_k = 0,08182045 a = 521,864$ km wäre die Kerndichte bereits unendlich groß.

Der weiteren Analyse legen wir den annähernd in der Mitte des Gültigkeitsbereiches liegenden Wert $E_M = 0,7 E$ zugrunde, für welchen die Gleichungen (8)

$$J_{2,M} = + 97289,26 \cdot 10^{-8}; J_{4,M} = - 172,76 \cdot 10^{-8} \quad (10)$$

liefern. Diese Massefunktionen sind wesentlich kleiner als die eines homogenen oder in konfokalen ellipsoidischen Schalen geschichteten Mantels: $J_{2,M} = + 133891,7 \cdot 10^{-8}$, $J_{4,M} = - 384,15 \cdot 10^{-8}$, so daß im Mantel in irgend einer anderen Schichtung bereits eine kräftige Massenkonzentration vorliegen muß. Demnach muß die Kerndichte jedenfalls größer sein als die mittlere Manteldichte. Es ist:

$$\begin{aligned} \varrho_M &= E_M : \frac{4}{3} \pi [a^3(1-e) - a_k^3(1-e_k)], \\ \varrho_K &= E_K : \frac{4}{3} \pi a_k^3(1-e_k), \end{aligned}$$

also

$$0,7 a_k^3(1-e_k) < 0,3 [a^3(1-e) - a_k^3(1-e_k)]$$

oder

$$a_k^3(1-e_k) < 0,3 a^3(1-e). \quad (11)$$

Zusammen mit (7) liefert dies den maximalen Kernradius

$$a_k = 0,6703589 a = 4275,656 \text{ km}; e_k = 747662,5 \cdot 10^{-8}. \quad (12)$$

Wegen der Massenkonzentration im Mantel muß der maximale Kernradius aber beträchtlich kleiner sein, damit an der Kernoberfläche nicht ein negativer Dichtesprung entsteht. Unabhängig vom möglichen Kernradius, der innerhalb der Schranken $4275,656 < a_k < 521,864$ km liegen muß, hat der homogene Kern an der konfokalen Manteloberfläche stets dieselben Massefunktionen $J_{2i,K}$. Soll dies auch für den Mantel gelten, so müßte er konfokal geschichtet sein und man könnte durch unwesentliche Verschiebungen die Gesamtfigur zu einem homogenen Ellipsoid machen, was aber für die Massefunktionen (10) unmöglich ist. Man erkennt dies auch daran, daß dieses homogene Ellipsoid nur für eine kleinere Rotationsgeschwindigkeit oder eine größere Masse ein MacLaurinsches Ellipsoid sein kann. Es folgt, daß für jede Wahl des Kernradius eine andere wesentlich verschiedene Massenkonfiguration resultiert. Alle diese Anordnungen unterscheiden sich bei in Näherung 4. O. gleichbleibenden Werten (10) in den höheren Massefunktionen, und jedesmal resultiert ein an-

deres genähertes Niveauellipsoid S' mit anderen höheren Formparametern, wobei sich überdies auch die Abplattung geringfügig ändert und f_4 gar nicht exakt verschwindet.

Legen wir der Dichtefunktion keinerlei Beschränkung auf, so kann der homogene Kern auch bis zur Oberfläche ausgedehnt werden, und wir erhalten folgende Lösung: der homogene Kern mit der Masse $0,3 E$ erfüllt die ganze Figur, während der heterogene Mantel als Flächenbelegung mit variabler Dichte erscheint. Die streng ellipsoidische Oberfläche $S(a, e)$ ist keine exakte Niveaufläche; letztere ist vielmehr ein genähertes Niveauellipsoid, für welches abermals der Formparameter f_4 gar nicht exakt verschwindet. Modifizieren wir unser Modell noch dahingehend, daß seine Oberfläche mit dieser nahezu ellipsoidischen Niveaufläche zusammenfällt, so liegt eine Verallgemeinerung der Lösung Somiglianas vor. Bei dieser hat man ja von einer rellen Massenanordnung auszugehen, deren Oberfläche für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit eine Niveaufläche ist. Dann darf die gesamte Masse im Innern dieser Fläche homogen verteilt werden, während die Abweichungen von der Homogenität als Flächenbelegung teils positiver, teils negativer Dichte mit der Massensumme Null erfaßbar sind. Beim vorliegenden Modell kann jetzt allgemeiner eine Teilmasse homogen verteilt sein und die Restmasse als Flächenbelegung aufscheinen. Aber diese Teilmasse kann gemäß (9) gar nicht größer als $0,614796 E$ sein, um ein genähertes Niveauellipsoid mit den Massefunktionen (10) zu erzielen. Hieraus erkennt man klar, daß die Lösung des Stokesschen Problems nach Somigliana keinen Beweis für die physikalische Möglichkeit des inhomogenen Niveaueillipsoide in sich schließt.

Wir kehren unser Modell um. Wieder seien Mantel- und Kernoberfläche konfokale Ellipsoide, doch sei jetzt der Mantel homogen und der Kern heterogen. In den Gleichungen (8) sind bloß die Indizes M und K zu vertauschen und (8b") geht über in

$$+ 0,385204 E \leq E_K \leq E . \quad (13)$$

Während beim vorhergehenden Modell der Fall $E_M = E$ nur bei völligem Verschwinden des Kernes physikalisch möglich erscheint, besagt die Annahme $E_K = E$ bloß, daß der Mantel die Dichte Null hat oder daß die gegebene «Oberfläche» $S(a, e, f_4 = 0)$ in Näherung 4. O. äußere Niveaufläche für unendlich viele Kernellipsoide ist, wobei aber für jeden Radius a_k eine andere, wesentlich verschiedene Massenanordnung vorliegt. Analog dem früheren Ergebnis haben alle diese Konfigurationen zum Beispiel für $E_k = 0.7 E$ in Näherung 4. O. dieselben Massefunktionen

$$J_{2,K} = + 97289,26 \cdot 10^{-8}; J_{4,K} = - 172,76 \cdot 10^{-8}, \quad (14)$$

unterscheiden sich aber in den Gliedern höherer Ordnung. Der physikalisch bereits unmögliche minimale Kernradius ist wieder durch die Fokalscheibe begrenzt, während der maximale Kernradius begreiflicherweise

andere Werte annimmt als beim vorhergehenden Modell. An Stelle von (11) tritt die Beziehung

$$a_k^3 (1 - e_k) \leq 0,7 a^3 (1 - e_k). \quad (15)$$

Speziell für $E_K = E$ ist also $a_k = a$ möglich, das heißt der Mantel verschwindet vollständig, genau so wie beim vorhergehenden Modell für $E_M = E$ der Kern verschwindet; beidemale resultiert dieselbe inhomogene Massenkonfiguration mit derselben ellipsoidischen Oberfläche, welche nur in Näherung 4. O. mit einer Niveaumenge zusammenfällt. Nach wie vor bleibt aber die Frage nach der Schichtung und dem Dichtegesetz dieser Massenkonfiguration und damit die Frage nach ihrer physikalischen Möglichkeit offen. Eindeutig ausgeschlossen sind bloß negative Dichten. Ferner wissen wir, daß relativ zur Homogenität bereits eine stärkere Massenkonzentration vorliegt.

Unschwer lassen sich weitere Verallgemeinerungen konstruieren. Ausgehend von den Gleichungen (5) können wir zum Beispiel postulieren, daß die Oberfläche ein genähertes Niveaumodell ist, wobei das strenge Ellipsoid (a, e) nicht der Schar der konfokalen Kernellipsoide angehört. Wieder sei der Mantel heterogen und der Kern homogen oder vice versa. Wieder scheidet die weitaus größte Zahl der mathematischen Lösungen aus, weil sie mit negativen Massen und Dichten oder mit einer Dichteabnahme nach innen verknüpft sind. Dennoch aber bleiben noch unendlich viele Lösungen, bei denen negative Dichten ausgeschlossen sind und an der Kernoberfläche ein positiver Dichtesprung vorliegt; ob sie aber physikalisch sinnvoll sein können, hängt vom Dichtegesetz des inhomogenen Teiles ab.

Alle zu den Daten (1) gehörigen genäherten Niveaumodelle liegen gemäß (2a) in der Parabel $F = |J_4| : J_2^2 = 2,01473$ oder in deren unmittelbaren Umgebung. Denkt man die, übrigens noch gar nicht exakt bekannte Kurve der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren über das MacLaurinsche Ellipsoid hinaus in den Bereich der positiven Formparameter f_4 bis zum Schnittpunkt mit dieser F -Parabel fortgesetzt, so liegt dort eine Massenanordnung vor, bei welcher das stetige Dichtegesetz der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren eine Dichteabnahme von der Oberfläche bis zum Schwerpunkt liefert. Unser «Niveaumodell» ist dann näherungsweise eine äußere Niveaumenge dieser physikalisch völlig sinnlosen Massenanordnung. Ähnliches gilt für die Wiechert-Modelle. Jede Reihe von Wiechert-Modellen (E, ω, a, a_k) mit konstantem Kernradius beginnt fiktiv mit einem MacLaurinschen Ellipsoid (E, ω, a) und endet, ebenfalls bereits fiktiv, in der Parabel $F = 15/7$ mit einer äußeren Niveaumenge ($\varrho_M = 0$) des MacLaurinschen Ellipsoides (E, ω, a_k) . Setzt man jede dieser Reihen $a_k = \text{const}$ über das MacLaurinsche Ellipsoid hinaus bis zum Schnittpunkt mit der Parabel $F = 2,01473$ fort, so wird das Niveaumodell in Näherung 4. O. gemeinsame äußere Niveaumenge von zahllosen Modellen mit homogenem Mantel und homogenem Kern, für welche jedoch stets physikalisch sinnlos die Manteldichte größer ist als die Kerndichte.

Oben wurde bereits betont, daß mit den Daten (1) sogar noch in Näherung 8. O. ein Niveauellipsoid möglich ist. Tatsächlich liefern für $f_4 = f_6 = f_8 = 0$ die Gleichungen des allgemeinen Niveausphäroides die Massefunktionen:

$$\begin{aligned} 3 J_2 &= \left(2e - \bar{\varepsilon} - e^2 + \frac{9}{7}e\bar{\varepsilon} \right) - \frac{25}{49}e^2\bar{\varepsilon} + \frac{593}{11319}e^3\bar{\varepsilon} \\ J_4 &= \left(-\frac{4}{5}e^2 + \frac{4}{7}e\bar{\varepsilon} \right) + \frac{4}{5}e^3 - \frac{50}{49}e^2\bar{\varepsilon} - \frac{1}{5}e^4 + \frac{226}{343}e^3\bar{\varepsilon} \\ J_6 &= \frac{8}{7}e^3 - \frac{20}{21}e^2\bar{\varepsilon} - \frac{12}{7}e^4 + \frac{320}{147}e^3\bar{\varepsilon} \\ J_8 &= \frac{1}{1287}(-2288e^4 + 2080e^3\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (16)$$

und mit $J_2 = 108270,000 \cdot 10^{-8}$; $\bar{\varepsilon} = 346140,835 \cdot 10^{-8}$ numerisch

$$\begin{aligned} e &= 335292,425 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -237,126 \cdot 10^{-8}; \quad J_6 = +0,608 \cdot 10^{-8}; \\ J_8 &= -0,002 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \quad (17)$$

Es ist also $J_2 = 456,6 \cdot |J_4|$; $|J_4| = 390,0 \cdot J_6$; $J_6 = 304,0 \cdot |J_8|$, (18)

was wie bei den Gleichgewichtsfiguren die rapide Abnahme der Massefunktionen bestätigt.

Mit den vorstehenden Betrachtungen ist somit die Möglichkeit einer physikalisch sinnvollen Massenanordnung für das *genäherte* Niveauellipsoid nicht völlig ausgeschlossen. Aber schon die einwandfrei bewiesene Tatsache, daß zumindest für die Daten der Erde oder exakter für alle $x > 0,8$ ein strenges Niveauellipsoid gar nicht existieren kann, sollte für den Geodäten genügen, diese Fiktion endlich fallen zu lassen, noch dazu, wo die Abweichungen des Normalspäroides der Erde von einem exakten Ellipsoid weit innerhalb der Unsicherheit in der Bestimmung der Geoidundulationen liegen.

Literatur

- [1] K. Ledersteiger: Die Massefunktionen und das Niveauellipsoid. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, Winterthur 1967, Seiten 205–216.
- [2] C. Somigliana: Teoria del campo gravitazionale dell' ellissoide di rotazione, Mem. della Soc. Astr. Ital., Vol. IV, Milano 1929.
- [3] W. D. Lambert: The Gravity Field of an Ellipsoid of Revolution as a Level Surface. Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki 1961.
- [4] G. H. Darwin: Theory of the figure of the earth carried to the second order of small quantities, Monthly Not. of R. A. S., London 1900.