

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 66 (1968)

Heft: 6

Artikel: Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Autor: Nádenik, Z.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-222304>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Z. Nádeník, Prag

Zusammenfassung

Kurze Herleitung der Konstruktion des hyperoskulierenden Kegelschnittes der Klothoide und Kriterium, wann dieser eine Ellipse beziehungsweise Parabel oder Hyperbel ist. Der hyperoskulierende Kegelschnitt läßt den Ansatz rasch konvergierender Näherungsformeln für Absteckungen von Sehnen und Tangenten der Klothoide zu.

Im folgenden werden für die Klothoide K mit dem Parameter A die Bezeichnungen nach Abbildung 1 verwendet. (Wenn B zwischen B_0 und dem Wendepunkt W liegt, so ist $\sigma < 0$.)

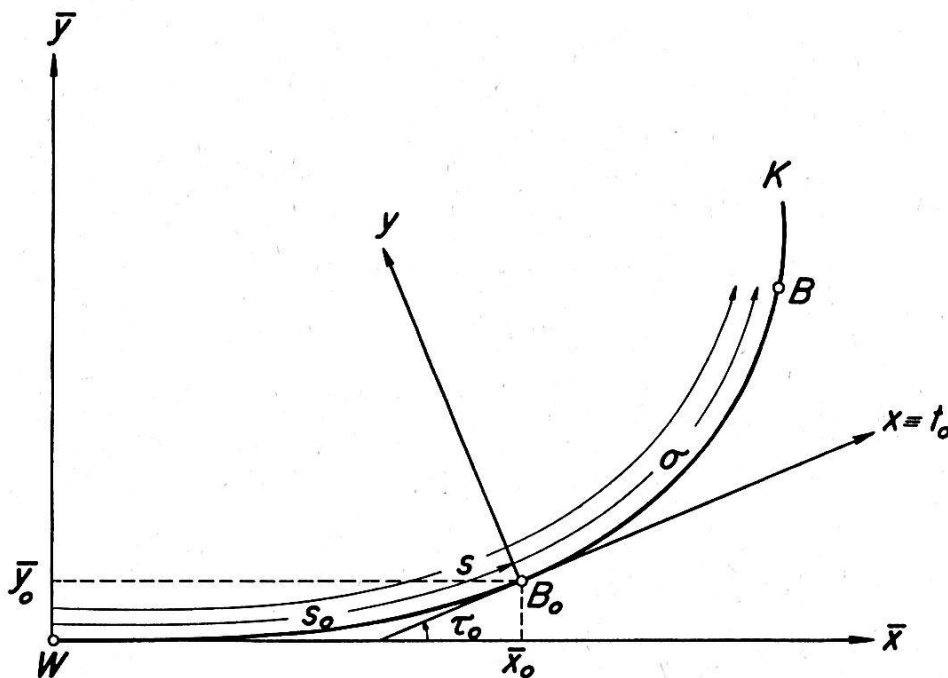


Abb. 1

Die Transformationsgleichungen für die Koordinaten x , y und \bar{x} , \bar{y} des Punktes B sind

$$\begin{aligned} x &= (\bar{x} - \bar{x}_0) \cos \tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \sin \tau_0 \\ y &= -(\bar{x} - \bar{x}_0) \sin \tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \cos \tau_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Die fundamentale Parameterdarstellung von K ist:

$$\bar{x} = \int_0^s \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl, \quad \bar{y} = \int_0^s \sin \frac{l^2}{A^2} dl \quad (2)$$

Folglich gilt

$$\bar{x}_0 = \int_0^{s_0} \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl, \quad \bar{y} = \int_0^{s_0} \sin \frac{l^2}{2 A^2} dl \quad (3)$$

mit τ_0 im Bogenmaß

$$\tau_0 = s_0^2 / 2 A^2 \quad (4)$$

Nach dem Einsetzen von (2) bis (4) in (1) erhält man

$$\begin{aligned} x &= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl \cdot \cos \frac{s_0^2}{2 A^2} + \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2}{2 A^2} dl \cdot \sin \frac{s_0^2}{2 A^2} \\ &= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2 - s_0^2}{2 A^2} dl \\ y &= \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2 - s_0^2}{2 A^2} dl. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch die Substitution $l = \lambda - s_0$ kann man die Integrale rechts in (5) wie folgt umformen:

$$x = \int_0^\sigma \cos \frac{\lambda s_0 + \frac{1}{2} \lambda^2}{A^2} d\lambda, \quad y = \int_0^\sigma \sin \frac{\lambda s_0 + \frac{1}{2} \lambda^2}{A^2} d\lambda; \quad (6)$$

denn bei $l = s_0$ beziehungsweise $l = s$ gilt offensichtlich $\lambda = 0$ beziehungsweise $\lambda = s - s_0 = \sigma$.

Entwickelt man die Integranden in (6) nach den bekannten Formeln in Potenzreihen und integriert dann, so ergibt sich

$$x = \sigma - \frac{s_0^2}{3! A^4} \sigma^3 + [4], \quad (7)$$

$$y = \frac{s_0}{2! A^2} \sigma^2 + \frac{1}{3! A^2} \sigma^3 - \frac{s_0^3}{4! A^6} \sigma^4 + [5]$$

Der nicht ausgeartete Kegelschnitt, welcher im Punkt B_0 mit der Klothoide K eine gemeinsame Tangente hat, besitzt die Gleichung

$$a x^2 + 2 b \times y + c y^2 + 2 y = 0 \quad (8)$$

wo $a, b, c = \text{konst.}, a = 0$.

Das formale Einsetzen aus (7) in (8) gibt nach ganz einfachen Umformungen:

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left\{ a + \frac{s_0}{A^2} \right\} + \sigma^3 \left\{ b \frac{s_0}{A^2} + \frac{1}{3 A^2} \right\} + \\ & + \sigma^4 \left\{ -a \frac{s_0^2}{3 A^4} + b \frac{1}{3 A^2} + c \frac{s_0^2}{4 A^4} - \frac{s_0^3}{12 A^6} \right\} + [4] \end{aligned} \quad (9)$$

Folglich hat der Kegelschnitt (8) mit der Klothoide K im Punkt B_0 eine Berührung 4. Ordnung (das heißt «fünfpunktige» Berührung) dann, und nur dann, wenn

$$a = -\frac{s_0}{A^2}, \quad b = -\frac{1}{3 s_0}, \quad c = \frac{4 A^4 - 9 s_0^4}{9 A^2 s_0^3} \quad (10)$$

Die eingehendere Untersuchung zeigt, daß eine höhere Berührung unmöglich ist. Der Kegelschnitt (8) mit den nach (10) bestimmten Koeffizienten – das heißt der sogenannte *hyperoskulierende Kegelschnitt* – ersetzt die Klothoide in einer Umgebung ihres vom Wendepunkt verschiedenen Punktes B_0 am besten*.

Der Kegelschnitt (8) ist eine Ellipse beziehungsweise eine Parabel beziehungsweise eine Hyperbel, je nachdem $b^2 - ac < 0$ beziehungsweise $= 0$ beziehungsweise > 0 . Dementsprechend ist nach (10) für

$$A \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{9}} < s_0 \text{ beziehungsweise } = s_0 \text{ beziehungsweise } > s_0$$

der hyperoskulierende Kegelschnitt κ_0 von K im Punkt B_0 eine Ellipse beziehungsweise Parabel beziehungsweise Hyperbel.

Nach dem Einsetzen aus (10) in (8) kann man die Gleichung des hyperoskulierenden Kegelschnittes κ_0 folgendermaßen umformen:

$$y (y - 3 \gamma_0 x) - 9 \tau_0^2 (x^2 + y^2 - 2 R_0 y) = 0 \quad (11)$$

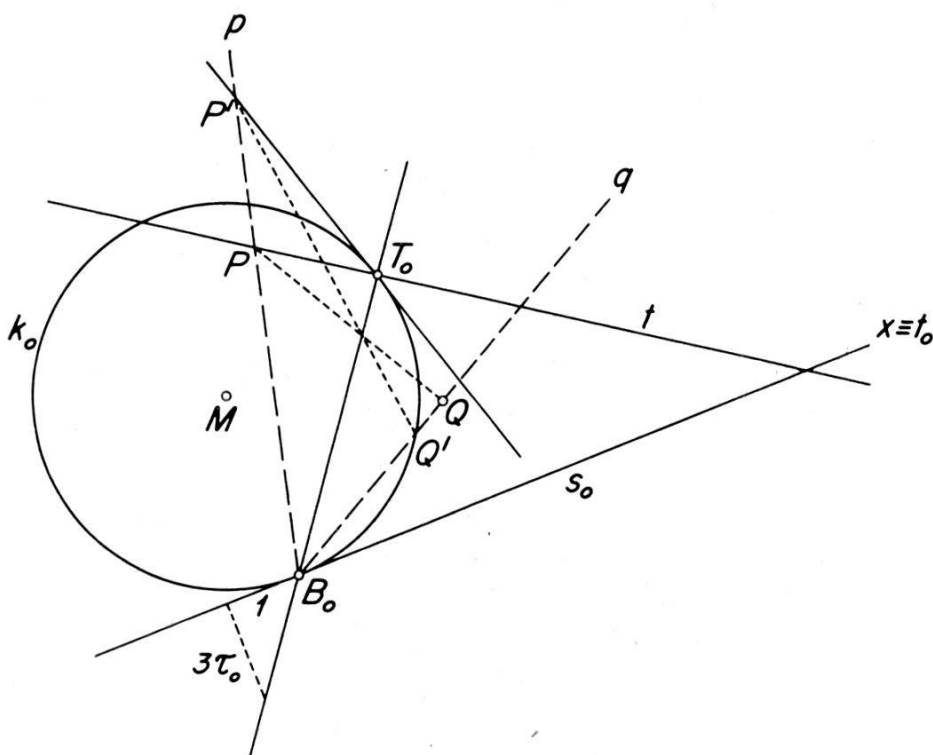
wo

$$R_0 = \frac{A^2}{s_0} \quad (12)$$

* Literaturhinweis: 4. Abschnitt des Aufsatzes «Über Formeln zur Absteckung von Klothoidenpunkten durch rechtwinkelige Koordinaten ...». Von Z. Nádeník in *Práce ČVUT, IV/2, Praha 1964*.

der Krümmungsradius von K im Punkt B_0 ist und τ_0 den durch (4) gegebenen Winkel der Wendetangente mit der Tangente t_0 von K im Punkt B_0 bezeichnet.

Die Gerade $y = 3 \tau_0 x$ schneidet den in B_0 konstruierten Krümmungskreis k_0 von K außer in B_0 noch im Punkt T_0 , welcher nach (11) ein Punkt des hyperoskulierenden Kegelschnittes κ_0 ist. Die Tangente t von κ_0 in T_0 hat nach (11) die Gleichung $x + (\cdot) y - 2 R_0 \tau_0 = 0$. Die Tangenten t und t_0 schneiden sich deshalb nach (12) und (4) im Punkt mit der Abszisse s_0 . Aus diesen Angaben kann man schon den Punkt T_0 und die Tangente t leicht konstruieren (s. Abb. 2).



Die projektive Geometrie der Kegelschnitte bietet nun für den durch den Punkt T_0 mit der Tangente t und durch den Punkt B_0 mit dem Krümmungskreis k_0 eindeutig bestimmten hyperoskulierenden Kegelschnitt κ_0 folgende einfache Konstruktion seiner weiteren Punkte (s. Abb. 2): Es sei p eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt B_0 geht und von der Verbindungslinie $B_0 T_0$ verschieden ist. Es seien P und P' die Schnittpunkte der Geraden p mit den Tangenten des Kegelschnittes κ_0 und des Kreises k_0 im Punkt T_0 . Es sei ferner q eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt B_0 geht und von den Geraden t_0 , p verschieden ist; ihre von B_0 verschiedenen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt κ_0 und dem Kreis k_0 bezeichnen wir mit Q und Q' . Den gesuchten Punkt Q von κ_0 konstruieren wir unmittelbar aus der Bedingung, daß der Schnittpunkt der Verbindungslinien $P'Q'$ und PQ auf der Verbindungslinie $B_0 T_0$ liegen muß.