

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 65 (1967)

**Heft:** 6

**Artikel:** Die Massefunktionen und das Niveauellipsoid

**Autor:** Ledersteger, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-221529>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 6 • LXV. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Juni 1967

## Die Massefunktionen und das Niveauellipsoid

von K. Ledersteger, Wien

Wir stellen der auf die zonalen Glieder beschränkten Potentialentwicklung des tatsächlichen Erdkörpers

$$V = \frac{k^2 E}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \vartheta) \right] \quad (1)$$

die analoge Entwicklung des Normalsphäroides gegenüber

$$U = \frac{k^2 E}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n^* \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos \vartheta) \right], \quad (2)$$

worin alle ungeraden Massefunktionen verschwinden, während die geraden Massefunktionen derart rapide abnehmen, daß wir die Entwicklung auf

$$U_4 = \frac{k^2 E}{r} \left[ 1 - J_2^* \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2 - J_4^* \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_4 \right] \quad (2a)$$

beschränken dürfen. Damit ergibt sich die Restfunktion  $T = (V - U)$  in der Gestalt

$$T = - \frac{k^2 E}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n - J_2^* \left( \frac{a}{r} \right)^2 P_2 - J_4^* \left( \frac{a}{r} \right)^4 P_4 \right]. \quad (3)$$

Hierin seien die Massefunktionen auf die Niveaufläche mit dem Äquatorradius  $a = 6378,16$  km bezogen. Ihr Einfluß nimmt nach oben ab; so ist in einer Höhe von 1000 km bereits  $(a/r)^2 \sim 0,7473$  und  $(a/r)^4 \sim 0,5585$ .

Vernachlässigt man ganz im Sinne der Stokesschen Näherung die Abplattung, ersetzt also  $a$  durch den mittleren Kugelradius  $R$ , so wird

$$V_r = \frac{k^2 E}{R} \left[ \left( \frac{R}{r} \right) - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta) \right] \quad (4)$$

und

$$T_r = - \frac{k^2 E}{R} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} (J_n - J_n^*) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta) \right]. \quad (5)$$

Ist beispielsweise  $h$  die Höhe eines künstlichen Satelliten ( $r = R + h$ ), so gehen die Fehler der abgeleiteten Massefunktionen im Verhältnis  $(1 + h/R)^{n+1}$  vergrößert in die Potentialfunktion  $V_R$  ein. Der Ausdruck (5) für die Restfunktion ist selbstverständlich noch um die in (1) vernachlässigten längenabhängigen Glieder zu erweitern. Hat das Normalsphäroid die beiden Trägheitsmomente  $C$  und  $A^* = (A + B)/2$  mit dem wirklichen Erdkörper gemeinsam, so verschwindet die Differenz  $(J_2 - J_2^*)$  exakt. Ferner verschwinden, wenn nur die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen des Erdkörpers zusammenfallen, mit den Deviationsmomenten

$$\int \xi \eta \, dm = \int \eta \zeta \, dm = \int \zeta \xi \, dm = 0 \quad (6)$$

auch drei zugeordnete Kugelfunktionen 2. Ordnung, so daß nur die sektorielle Funktion

$$C_{2,2} = - (B - A) : 4 E R^2 \quad (7)$$

übrigbleibt, welche bekanntlich die sogenannte Elliptizität des Erdäquators bewirkt.

Für das mit der wirklichen Erde volumgleiche Normalsphäroid, welches keine Gleichgewichtsfigur ist, wohl aber eine Gleichgewichtsanordnung repräsentiert, ergab sich in [1, S. 211] auf Grund der Ausgangsdaten

$$\begin{aligned} E &= 5976,106 \cdot 10^{24} \, g; \quad \omega^2 = 5,317496 \cdot 10^{-9} \, \text{sec}^{-2}; \\ a^* &= 6,378390 \cdot 10^8 \, \text{cm}; \quad J_2^* = 108271 \cdot 10^{-8}; \quad J_4^* = - 315,5 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \quad (8)$$

mittels des Helmertschen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \bar{e}^* &= 346175,4 \cdot 10^{-8}; \quad e^* = 335260,4 \cdot 10^{-8} = 1 : 298,28; \\ f_4^* &= - 347,8 \cdot 10^{-8}; \quad h_{\max}^* = \frac{a^*}{4} f_4^* = - 5,546 \, \text{m}; \quad \gamma_0^* = 977,9704 \, \text{gal}; \\ \beta^* &= 530460,7 \cdot 10^{-8}; \quad \beta_4^* = 3382,9 \cdot 10^{-8}; \quad W_0 = 62635,315 \cdot 10^7 \, \text{cm}^2 \, \text{sec}^{-2} \\ \varrho_m &= 5,5164. \end{aligned} \quad (8a)$$

Im angenommenen Achsenwert ist die mittlere Kontinentalhöhe von 225 m nach der Preyschen Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde berücksichtigt. Zwecks Übergangs auf das Geoid ( $a = 6378,165$  km) hat man also  $\gamma_0$  mit dem Preyschen Gradienten  $0,2224$  mgal/m, der einer Wasserplatte der Dichte  $1,028$  entspricht, zu reduzieren und findet so  $\gamma_0 = 978,0204$  gal, welcher Wert um ca.  $12$  mgal zu klein sein dürfte. Selbstverständlich ist dieser kleine Widerspruch in der empirischen Unsicherheit der wichtigen Größe  $k^2 E$  begründet.

Der folgenden Untersuchung legen wir die Werte Kozais [2] für die aus den künstlichen Satelliten abgeleiteten Massefunktionen  $J_3$  bis  $J_6$  zugrunde

$$\begin{aligned} J_3 &= -255 \cdot 10^{-8}; & J_5 &= -21 \cdot 10^{-8} \\ J_4 &= -165 \cdot 10^{-8}; & J_6 &= +65 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \quad (9)$$

Zunächst ergibt sich mit  $R = 6371,2$  km der Potentialwert  $k^2 E/R = 62563,8 \cdot 10^7$  cm<sup>2</sup> sec<sup>-2</sup>. Mit  $\gamma = k^2 E/r^2$  liefert sodann das Theorem von Bruns gemäß (5) für die einzelnen Glieder die Undulationsanteile

$$\Delta N_{r,n} = (\Delta T_n / \gamma)_r = -R (J_n - J_n^*) \left( \frac{R}{r} \right)^{n-1} P_n. \quad (10)$$

Für  $J_4$  resultiert die Differenz  $(J_4 - J_4^*) = (-165 + 316) = +151 \cdot 10^{-8}$ , also an der Oberfläche ( $r = R$ )  $\Delta T_4 = -0,0945 \cdot 10^7 P_4$  cm<sup>2</sup> sec<sup>-2</sup> und  $\Delta N_4 = -9,62 P_4$  m und in der Höhe  $h = 1000$  km analog  $\Delta T_4 = -0,0456 \cdot 10^7 P_4$  cm<sup>2</sup> sec<sup>-2</sup> und  $\Delta N_4 = -6,21 P_4$  m. Für eine exakte Näherung 4. Ordnung gehen wir vom Normalsphäroid (8) aus und finden aus den Daten ( $E, \omega, W, C-A, J_4$ ) in sukzessiver Annäherung

$$a = 6378' 6,41 \text{ m}; \quad e = 335354,7 \cdot 10^{-8} = 1:298,19. \quad (11)$$

Diese Niveaufläche desselben Potentialwertes weist trotz der Volumgleichheit mit dem Normalsphäroid im Pol und im Äquator Depressionen auf, die durch  $(c - c^*) = -9,59$  m und  $(a - a^*) = -3,59$  m bestimmt sind. Demgegenüber hat man jetzt aber  $f_4 = +312,0 \cdot 10^{-8}$  und somit  $h_{\max} = +4,975$  m. Gleichzeitig ist die Differenz der Radienvektoren der zugehörigen Ellipsoide in der Breite  $45^\circ$   $(s - s^*) = -6,58$  m, so daß das neue Sphäroid in dieser Breite um  $3,94$  m über dem Normalsphäroid liegt. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit der obigen Näherung  $\Delta N_4 = -9,62 P_4$  m, so erhalten wir im Pol, im Äquator und in  $\varphi = 45^\circ$  der Reihe nach:  $-9,62$  m,  $-3,61$  m und  $+3,91$  m, und man sieht, daß die Abweichungen bloß  $3$  cm betragen. Damit ist rein empirisch die Güte der Näherungslösung (10) erwiesen.

Für die Massefunktion  $J_3$  liefert (5)  $\Delta T_3 = +0,1595 \cdot 10^7 (R/r)^4 P_3$  cm<sup>2</sup> sec<sup>-2</sup> und (10):  $\Delta N_3 = +16,25 (R/r)^2 P_3$  m. Man erhält also für  $r = R$  in den beiden Polen der Oberfläche die Undulationsbeträge  $\pm 16,25$  m, welches Ergebnis unter dem sehr irreführenden Schlagwort von der «Birnenform» der Erde bekannt ist. Nunmehr erstrecken wir die Unter-

suchung auf alle vier obigen Massefunktionen, wobei bloß zu beachten ist, daß im Normalsphäroid  $J_3^*$  und  $J_5^*$  verschwinden, während  $J_6^* = + 1.10^{-8}$  ist. Damit wird an der Oberfläche in Metern:

$$\Delta N = + 16,25 P_3 - 9,62 P_4 + 1,34 P_5 - 4,08 P_6 \quad (12)$$

und analog für die Höhen  $h = 1000$  km und für  $r = 2R, 3R$  und  $4R$ :

$$\Delta N = + 12,140 P_3 - 6,212 P_4 + 0,748 P_5 - 1,968 P_6$$

$$\Delta N = + 4,062 P_3 - 1,202 P_4 + 0,084 P_5 - 0,128 P_6$$

$$\Delta N = + 1,806 P_3 - 0,356 P_4 + 0,017 P_5 - 0,017 P_6$$

$$\Delta N = + 1,015 P_3 - 0,150 P_4 + 0,005 P_5 - 0,004 P_6$$

und es ergibt sich folgende kleine Übersicht

Höhe, km	$\varphi = + 90^\circ$	$+ 45^\circ$	$0^\circ$	$- 45^\circ$	$- 90^\circ$
$r = R$	+ 3,89	+ 1,15	- 2,33	+ 7,89	- 31,29
$r = R + 1000$	+ 4,71	+ 0,39	- 1,71	+ 5,24	- 21,07
$r = 2R$	+ 2,82	- 0,24	- 0,41	+ 1,26	- 5,48
$r = 3R$	+ 1,45	- 0,18	- 0,13	+ 0,47	- 2,20
$r = 4R$	+ 0,87	- 0,12	- 0,06	+ 0,24	- 1,17

Unzweifelhaft müssen für jedes mögliche Störpotential die Undulationen nach oben stetig abnehmen und in einer gewissen Höhe hinreichend gegen Null konvergieren. Dies gilt für jeden der vier Terme gesondert. Wegen der Beschränkung auf die vier zonalen Kugelfunktionen  $J_3 - J_6$  gestatten die vorliegenden Ergebnisse noch keinen bündigen Schluß hinsichtlich der Größe der Undulationen und deren Abnahme mit der Höhe. Für die beiden Massefunktionen  $J_3$  und  $J_5$  allein würde man an den beiden Polen die Undulationsbeträge  $\pm 17,59$  finden, die für  $r = 4R$  auf  $\pm 1,02$  m absinken, während im Äquator stets  $\Delta N = 0$  wäre. Umgekehrt wäre bei Rotations- und Äquatorsymmetrie ( $J_3 = J_5 = 0$ ) an den beiden Polen  $\Delta N = - 13,70$  und im Äquator  $- 2,33$  m, welche Werte sich für  $r = 4R$  auf  $- 0,15$  m und  $- 0,06$  m verringern. Hingegen weist obige Tabelle auf einen Widerspruch hin, wie man aus der anfänglichen Zunahme der Undulation über dem Nordpol und aus dem unmöglichen Zeichenwechsel für  $\varphi = + 45^\circ$  eindeutig erkennt. Wie die Beschränkung auf die beiden ersten Glieder von (12) beweist, liegt dieser Widerspruch in der Unverträglichkeit der Massefunktionen  $J_3$  und  $(J_4 - J_4^*)$  begründet.

Um diese Frage näher zu studieren, überlegen wir folgendermaßen. Die Massefunktion  $J_3 = -255 \cdot 10^{-8}$  bietet keinerlei Anhaltspunkt. Eine Asymmetrie zwischen Nord- und Südhälfte, welche in den polaren Radien eine Abweichung von  $\pm 16$  m erzeugt, liegt anscheinend innerhalb der empirischen Größe der Undulationen. Hingegen erscheint es sehr bedenklich, wenn zwischen den Massefunktionen  $J_4 = -165 \cdot 10^{-8}$  und  $J_4^* = -315,5 \cdot 10^{-8}$  ein Verhältnis von nahezu 1:2 bestehen soll. Wir gehen auf das Normalsphäroid (8) zurück und finden hierfür das Massenmoment  $4.0. : K_4^* = J_4^* E a^4 = -31,2077 \cdot 10^{56} \text{ g cm}^4$ . Die homogene Wasserhülle habe die Dichte 1,028 und die Mächtigkeit 2601 m im Äquator. Ferner lehrt die Gleichgewichtsfigur der Erde, daß der Ozeanboden die etwas größere Abplattung von ungefähr  $e' = 1:297,3 = 336360 \cdot 10^{-8}$  hat. Damit findet man die Volumina der Gesamterde  $V$  und der Festerde  $V'$ , ferner die Masse  $Oz$  des Ozeans und die Masse  $E'$  der Festerde:

$$V = 1083,336 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3; V' = 1082,000 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3; Oz = 1,374 \cdot 10^{24} \text{ g}$$

$$E' = 5974,732 \cdot 10^{24} \text{ g} . \quad (13)$$

Der Anteil des Ozeans am Massenmoment  $K_4$  wird

$$\Delta K_4 = -\frac{12}{35} 1,028 [(e^2 - e^3) V a^4 - (e'^2 - e'^3) V' a'^4]$$

$$= + 0,0260 \cdot 10^{56} \text{ g cm}^4 , \quad (14)$$

so daß für die Festerde mit dem Äquatorradius  $a' = 6375,789 \text{ km}$  gilt:

$$K_4 = -31,2077 - 0,0260 = -31,2337 \cdot 10^{56} \text{ g cm}^4 . \quad (14a)$$

Ganz analog ergibt sich für eine homogene Kruste der Dichte 2,80, welche bis in die Tiefe von 33 km reicht ( $a'' = 6345,390 \text{ km}$ )

$$V'' = 1066,611 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3; Kr = 43,088 \cdot 10^{24} \text{ g}; E'' = 5931,644 \cdot 10^{24} \text{ g}$$

für die Resterde bis zur Manteloberfläche

$$K_4 = -31,2337 + 0,7862 = -30,4475 \cdot 10^{56} \text{ g cm}^4 = J_4'' E'' a''^4 ,$$

also:  $J_4'' = -316,6 \cdot 10^{-8} . \quad (15)$

Mithin bewirkt die Abhebung des Ozeans und der gesamten Kruste lediglich eine Änderung  $\Delta J_4 = -1,1 \cdot 10^{-8}$ . Es folgt, daß die Massenunregelmäßigkeiten in der Kruste nur einen fast verschwindenden Einfluß haben können.

Setzt man

$$\bar{e} = x e + \dots; f_4 = -\kappa e^2; J_4 = -\xi e^2 , \quad (16)$$



so folgt für das Normalsphäroid  $x = 1,03256$ ;  $\kappa = + 0,30943$ ;  $\xi = + 0,28070$ , während der Beobachtungswert  $J_4 = - 165 \cdot 10^{-8}$  auf  $\xi = + 0,14680$  führt, woraus mit der allgemein gültigen Gleichung

$$-\kappa + 4,374 \xi = 3,5 - 2,5 x \quad (17)$$

sofort  $\kappa = - 0,27635$  oder  $f_4 = + 310,6 \cdot 10^{-8}$  folgt. Im  $(x, \kappa)$ -Diagramm [1, S. 66] liegt also die neue Figur tief unter dem Normalsphäroid und auch noch tief unter der zu den gleichen Daten  $(E, \omega, a, J_2)$  gehörigen äußeren Niveaulfläche des entsprechenden MacLaurinschen Ellipsoides ( $J_4 = - 251,3 \cdot 10^{-8}$ ;  $f_4 = - 67,1 \cdot 10^{-8}$ ). Figurenreihen mit den Daten  $(E, \omega, a, J_2)$  sind übrigens nicht streng vertikal, da sich mit  $J_4$  auch geringfügig  $e$  und damit  $x$  ändern. Es sei an zwei markanten Beispielen demonstriert, daß das homogene Ellipsoid oder eine seiner Niveaulflächen niemals innerhalb einer physikalisch sinnvollen Reihe von Niveausphäroiden liegen kann. Bemerkt sei, daß dabei im allgemeinen nicht an Gleichgewichtsfiguren gedacht ist, selbst wenn diese Niveausphäroide mit der Oberfläche von Massenarrangierungen zusammenfallen.

Wir betrachten zuerst die Reihe äußerer Niveaulflächen sogenannter einparametrischer Massenarrangierungen, welche entweder durch das in sehr guter Annäherung gegebene stetige Dichtegesetz

$$\varrho = \varrho_z \left[ 1 - \nu \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (18)$$

oder besser durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß an ihrer Oberfläche die Änderung des Formparameters  $f_4$  im Außenraum:  $a df_4/da = A = 0$  ist. Die Kurve  $A = 0$  ist eine Parabel mit dem Scheitel im Punkte  $(x = 2/5, \kappa = - 1/4)$ ;  $\varrho_z$  bedeutet die Dichte im Schwerpunkt. Für  $\nu = 0$  resultiert das MacLaurinsche Ellipsoid, für  $0 \leq \nu < 1$  die Reihe der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren bis zum einparametrischen Sphäroid der größten Massenkonzentration, für welches  $\nu$  knapp unter 1 liegen muß. Unterhalb des Ellipsoides, also im Bereich positiver Formparameter, wird  $\nu$  negativ, d. h. die Dichte nimmt vom Schwerpunkt gegen die Oberfläche stetig zu, was natürlich physikalisch sinnlos ist. Die Konstanz von  $J_2$  und damit des Massenmomentes  $K_2$  bedingt, daß wir es mit äußeren Niveaulflächen von Figuren der Reihe  $(\omega, K_2) \equiv (\omega, C)$  mit konstantem Hauptträgheitsmoment  $C$  zu tun haben. Oberhalb des Ellipsoides wird also die Massenkonzentration durch eine Expansion der Figuren (zunehmender Äquatorradius der Oberfläche) wettgemacht, während unterhalb des Ellipsoides bei gleichzeitiger Verdichtung gegen die Oberfläche deren Äquatorradius  $a'$  immer kleiner wird. Unsere Reihe beginnt also mit einer einparametrischen Gleichgewichtsfigur ( $a' = a$ ,  $J_4 = - 332,4 \cdot 10^{-8}$ ). Nach abwärts folgen zunächst äußere Niveaulflächen einparametrischer Gleichgewichtsfiguren bis herab zum MacLaurinschen Ellipsoid ( $a' = 5811,99$  km,  $e' = 326539 \cdot 10^{-8}$ ) mit  $J_4 = - 251,2 \cdot 10^{-8}$ . Durch den Scheitel der Parabel  $A = 0$  geht die Parabel  $F = |J_4| : J_2^2 = 1,8080$ , woraus für die äußere Niveaulfläche  $J_4 =$

–  $212 \cdot 10^{-8}$  folgt. Die zugehörige Figur selbst ist durch die Daten:  $\alpha' = 4773,93$  km,  $e' = 362853 \cdot 10^{-8}$ ,  $J_2' = 193277 \cdot 10^{-8}$ ;  $J_4' = -677,1 \cdot 10^{-8}$  charakterisiert. Jenseits des Parabelscheitels, d. h. für  $x < 0,4$ , nimmt  $F$  nur ganz geringfügig ab ( $x = 1/5$ ,  $F = 1,7857$ ) und wächst sodann wieder auf 1,8 für  $x = 0$  an. Doch wächst für  $x < 0,05$  die Abplattung  $e'$  bereits so stark an, daß das Helmertsche Gleichungssystem bald unbrauchbar wird.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Zweischalenmodelle. Wegen

$$\left. \begin{aligned} 3 J_2 &= 2e - \bar{e} - 2e^2 + 2e\bar{e} - \frac{5}{4} J_4 \\ f_4 &= \frac{7}{2} e^2 - \frac{5}{2} e\bar{e} + \frac{35}{8} J_4 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

gehört zu jedem  $f_4$  ein bestimmtes Wertepaar  $e$  und  $J_4$ , zumal mit den gegebenen Daten ( $E, \omega, a, J_2$ ) auch  $\bar{e} = \omega^2 a^3/k^2 E$  bestimmt ist. Wegen der Konstanz von  $J_2$  kann sich übrigens  $e$  nur in sehr geringen Grenzen ändern. Mit  $x$  und  $\kappa$  liegt jedesmal ein bestimmter Punkt des  $(x, \kappa)$ -Diagramms fest, zu dem im allgemeinen innerhalb eines gewissen Bereiches je unendlich viele Zweischalenmodelle gehören, deren Oberflächen Niveaulächen sind, ohne daß daraus das Gleichgewicht folgt. Wählt man z. B. eine Teilmasse  $E_1 = E - E_2$  für eine «Mantelfigur», so liegen [1, S. 114/15] bis auf Größen 6. oder höchstens 5. Ordnung mit

$$J_2 = \frac{1}{5} (2e - e^2) (E_1 : E) + \frac{1}{5} (2e_k - e_k^2) (a_k : a)^2 (E_2 : E) \quad (20)$$

$$J_4 = -\frac{12}{35} (e^2 - e^3) (E_1 : E) - \frac{12}{35} (e_k^2 - e_k^3) (a_k : a)^4 (E_2 : E)$$

zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $a_k$  und  $e_k$ , d. h. für Achse und Abplattung des Kernes vor.

Unsere Reihe beginnt mit dem Modell  $a_k = 0$ , oder allgemeiner, mit  $e_k = 0$ , da ja eine homogene Kugel unabhängig von ihrem Radius nichts zu den Massefunktionen beiträgt. Zusammen mit (19) liefern die Gleichungen

$$5 J_2 = (2e - e^2) (E_1 : E); \quad -\frac{35}{12} J_4 = (e^2 - e^3) (E_1 : E) \quad (21)$$

eine streng eindeutige Lösung für die vier Unbekannten  $e, J_4, E_1$  und  $f_4$ , d. h. das Wiechert-Modell mit dem Kernradius Null, welches in der Geraden  $(\kappa + 35 \xi/8) = 1,5$  liegt:

$$\begin{aligned} e &= 335263,4 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -310,7 \cdot 10^{-8}; \quad E_1 : E = 0,8087; \\ f_4 &= -326,7 \cdot 10^{-8}; \quad \kappa = +0,2907. \end{aligned} \quad (21a)$$

Jeder unterhalb liegende Punkt  $(J_2, J_4)$  oder  $(x, \kappa)$  mit kleinerem  $|J_4|$  und  $\kappa$  repräsentiert unendlich viele Zweischalenmodelle, zu deren Be-



stimmung wir (20) transformieren. Wir setzen abkürzend  $(E_1 : E) = z$  und  $(a_k : a)^2 = y$  und finden:

$$[5 J_2 - (2 e - e^2) z] = (2 e_k - e_k^2) y (1 - z) \quad (20a)$$

$$- \left[ \frac{35}{12} J_4 + (e^2 - e^3) z \right] = (e_k^2 - e_k^3) y^2 (1 - z).$$

Nun ist  $(2 e_k - e_k^2)^2 \approx 4 (e_k^2 - e_k^3)$ . Quadriert man also die erste Gleichung und subtrahiert davon die mit  $4 (1 - z)$  multiplizierte zweite Gleichung, so resultiert

$$[5 J_2 - (2 e - e^2) z]^2 + \left[ \frac{35}{3} J_4 + 4 (e^2 - e^3) z \right] (1 - z) = 0$$

oder (22)

$$z \left[ 10 J_2 (2 e - e^2) - 4 (e^2 - e^3) + \frac{35}{3} J_4 \right] - \left[ (5 J_2)^2 + \frac{35}{3} J_4 \right] = 0.$$

Für alle diese Lösungen:

$$(2 e_k - e_k^2) (a_k : a)^2 = [5 J_2 - (2 e - e^2) z] : (1 - z) \quad (20b)$$

ist  $E_1$  oder die Manteldichte nahezu konstant. Man erkennt leicht, daß der Fall  $z = 1$  oder  $E_1 = E$ ,  $E_2 = 0$  bereits ausgeschlossen ist; denn sonst hätten wir es mit einem homogenen Körper zu tun, dessen Oberfläche Niveaufläche ist. Er müßte also selbst eine Gleichgewichtsfigur sein, während bekanntlich in der Umgebung der Kugel die MacLaurinschen Ellipsoide die einzig möglichen homogenen Gleichgewichtsfiguren sind. Tatsächlich nimmt auch  $z$ , ausgehend vom Wert (21a):  $z = 0,8087$ , nach unten ständig ab, bis in der Parabel  $F = 15/7$  oder für  $J_4 = -251,2 \cdot 10^{-8}$  der Wert  $z = 0$  erreicht wird. In dem ganzen Bereich  $-310,7 \cdot 10^{-8} \leq J_4 \leq -251,2 \cdot 10^{-8}$  gehört zu jedem Punkt auch ein Wiechert-Modell oder eine zweiparametrische Gleichgewichtsfigur, zu denen wir auch die bereits fiktive Grenzlösung der äußeren Niveaufläche eines MacLaurinschen Ellipsoides zählen dürfen:  $a_k = 5811,988$  km,  $e_k = 326538,5 \cdot 10^{-8}$ , die aus  $(z = 0)$

$$(2 e_k - e_k^2) (a_k : a)^2 = 5 J_2; \quad \omega^2 a_k^3 / k^2 E = \frac{4}{5} e_k + \frac{22}{35} e_k^2 \quad (23)$$

hervorgeht, wobei man die letzte Gleichung als Gleichgewichtsbedingung betrachten darf. Alle überhaupt möglichen Zweischalenmodelle liegen wie immer zwischen den Grenzen  $e_k = e$  oder  $a_{k, \min}$  und  $e_{k, \min}$  oder  $a_{k, \max}$ , welche zweite Grenzlösung durch gleiche Polarachsen ( $c_k = c$ ) definiert ist:  $a(1 - e) = a_k(1 - e_k)$ .

Setzt man die Reihe fiktiv nach unten weiter fort, so resultieren negative  $z$ -Werte, d. h. die Manteldichte wird negativ und die Kernmasse ist größer als  $E$ . Doch wird die absolute Grenze bald erreicht. Hierfür gilt:

$$z \rightarrow -\infty; (2e_k - e_k^2)(a_k : a)^2 \rightarrow (2e - e^2). \quad (20c)$$

Gleichzeitig verschwindet in (22) der Faktor von  $z$ :

$$-\frac{35}{3}J_4 = 10J_2(2e - e^2) - 4(e^2 - e^3), \quad (24)$$

was zusammen mit (19) auf  $e = 335309,6 \cdot 10^{-8}$ ;  $J_4 = -237,1 \cdot 10^{-8}$  und  $f_4 = -4,2 \cdot 10^{-8}$  führt. Die Lösung  $a_k \rightarrow a$  und  $e_k \rightarrow e$  stellt aber das zu den gegebenen Daten ( $E, \omega, a, J_2$ ) gehörige Niveauellipsoid dar, für welches die Gleichungen (19) mit  $f_4 = 0$  direkt  $e = 335310,2 \cdot 10^{-8}$  und  $J_4 = -236,2 \cdot 10^{-8}$  liefern, und wir erkennen besonders deutlich die physikalische Sinnlosigkeit des Niveauellipsoides. Übrigens ist dies gar kein strenges Ellipsoid, sondern hat sicherlich höhere Formparameter. In derselben Annäherung 4. Ordnung repräsentiert diese Figur auch die äußere Niveaufläche einer kleineren einparametrischen Massenordnung mit  $F = 2,01466$ , also gleichfalls im fiktiven Bereiche.

Unsere erste Lösung stellt mithin überhaupt kein Niveauellipsoid im engeren Sinne dar, bei welchem an eine Massenordnung gedacht ist, deren Oberfläche mit dem gewünschten Niveauellipsoid zusammenfällt. Dies ist aber leicht durch Massenverschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen zu erreichen, bei denen bekanntlich das Außenraumpotential unverändert bleibt. Die zweite Lösung steht in einer interessanten Analogie zum Niveauellipsoid von W. D. Lambert [3]; das homogene MacLaurinsche Ellipsoid ( $a, e, \omega$ ) hat eine zu große Masse ( $E_2 = 7732,4 \cdot 10^{24}$  g), welche durch eine fiktive Flächenbelegung von hoher negativer Dichte herabgedrückt wird. Eine vierte Lösung stellt die Theorie von Pizzetti und Somigliana dar. Sie beruht auf folgender, mathematisch einwandfrei bewiesenen Tatsache. Es sei eine physikalisch mögliche Massenordnung und eine dazu gehörige äußere Niveaufläche gegeben. Dann bleibt die gegebene Niveaufläche und das gesamte Außenraumpotential unverändert, wenn die gesamte Masse im Innern der Niveaufläche homogen verteilt wird, während alle Abweichungen von der Homogenität durch eine Flächenbelegung teils positiver, teils negativer Dichte mit der Massensumme Null erfaßt werden können. Wird aber umgekehrt die Fläche willkürlich vorgegeben, so resultiert im allgemeinen eine fiktive Lösung. In Näherung 4. Ordnung erhält man schließlich als fünfte Lösung die sogenannte dritte Normalform von Helmert, bei der per definitionem  $f_4 = 0$  gesetzt wird. Damit liefert die zweite Gleichung (19) aus ( $E, \omega, a, e$ ) oder ( $E, \omega, a, J_2$ ) wie oben direkt  $J_4$ . Will man in diesem Falle stets eine physikalisch einwandfreie Lösung erzielen, so muß man mit  $f_4$  auch alle übrigen Größen 4. Ordnung unterdrücken und sinkt damit auf die Näherung 2. Ordnung zurück, bei welcher alle Niveausphäroide Ellipsoide sind; doch reicht bekanntlich die Näherung 2. Ordnung für das Problem der Erdfigur nicht aus.

Somit sind alle diese Niveauellipsoide, gleichgültig, ob es sich um strenge Ellipsoide oder bloß um Näherungen 4. Ordnung handelt, fiktiver

Natur. Gänzlich unabhängig vom Charakter der Massenanordnungen konnte aber in [1, S. 163] gezeigt werden, daß für den  $x$ -Wert der Erde ( $x \sim 1,032$ ) zwar noch in Näherung 8. Ordnung ein Niveauellipsoid denkbar ist, dieses aber dennoch bereits in den Größen 4. Ordnung vom Normalsphäroid abweicht. Setzt man nämlich:

$$\bar{e} = x e; J_2 = \frac{1}{3} (2 - x); J_4 = - \xi e^2; J_6 = + \eta e^3; J_8 = - \zeta e^4; \dots$$

$$f_4 = - \kappa e^2; f_6 = - \lambda e^3; f_8 = - \mu e^4; \dots \quad (25)$$

so gilt ganz allgemein:

$$- \kappa + \frac{35}{8} \xi = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} x;$$

$$B = \left( - \lambda + \frac{231}{80} \eta \right) = (3,3 - 2,75 x) + \kappa (1,2 - 0,5 x); \quad (26)$$

$$C = \left( - \mu + \frac{1287}{896} \zeta \right) = \frac{1}{56} (143 - 130 x) + \frac{\kappa}{56} (64 - 40 x)$$

$$+ \frac{\lambda}{56} (64 - 20 x) + \frac{4}{35} \kappa^2.$$

Die Gerade  $\xi = 0 = F$  schneidet die  $x$ -Achse im Punkte  $x = 1,4$ , womit die absolute obere Grenze definiert ist. Die Kurven  $B = \text{const}$  sind die gleichseitigen Hyperbeln

$$(x - 2,4) (\kappa + 5,5) = - (2 B + 6,6), \quad (27)$$

woraus für die Kurve  $B = 0$  als Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse ( $\kappa = 0$ )  $x = 1,2$  folgt. Da sich die Kurven  $B < 0$  in Richtung wachsender  $x$ -Werte anschließen und für diese mit  $\eta$  auch  $\lambda > 231 \eta/80$  positiv sein muß, sind Niveauellipsoide in Näherung 6. Ordnung nur für  $x < 1,2$  möglich. Ganz analog können wir weiterschließen. Für  $\kappa = \lambda = 0$  erhalten wir für die Kurve  $C = 0$  den Schnittpunkt  $x = 1,1$ , und es sind Niveauellipsoide in Näherung 8. Ordnung nur im Bereiche  $x < 1,1$  möglich. In Fortsetzung dieser Schlußweise erkennt man leicht, daß das strenge Niveauellipsoid mit dem MacLaurinschen Ellipsoid zusammenfällt.

Damit sind wir zu dem Ergebnis gelangt, daß das zu den empirischen Daten ( $E, \omega, a, J_2$ ) der tatsächlichen Erde gehörige Niveauellipsoid nur als Näherung und nur für fiktive Massenanordnungen denkbar ist. Die willkürliche Annahme  $f_4 = 0$  führt auch auf eine andere Massefunktion  $J_4 = - 236,2 \cdot 10^{-8}$  und auf eine theoretische Schwereformel, die nicht als «normal» bezeichnet werden darf. Die damit gebildeten Schwerestörungen haben ebenso wenig einen klaren physikalischen Sinn wie die resultierenden Geoidundulationen. Selbstverständlich ist die Aufspaltung in ein theoretisches Feld und die zugehörige Korrektur innerhalb gewisser

Grenzen willkürlich. Doch ist es sicherlich wünschenswert, von einem physikalisch möglichen Modell auszugehen, welches mit der wirklichen Erde die beiden Hauptträgheitsmomente gemeinsam hat, so daß die Massefunktion  $J_2$  identisch ist, während die Massefunktion  $J_4$  nur geringfügig vom wahren Wert abweicht. Dann sind die Schwerestörungen und die Undulationen klarer Ausdruck der Massenstörungen.

Die durch die Daten  $(E, \omega, a, J_2)$  definierte Kurve des  $(x, \kappa)$ -Diagramms fällt fast mit einer Vertikalen  $x = \text{const}$  zusammen. Die beiden diskutierten Grenzfälle: stetiges Dichtegesetz und Zweischalenmodell haben gelehrt, daß unterhalb der Parabel  $F = 15/7$  nur fiktive Massen-anordnungen resultieren, die für stetiges Dichtegesetz bis auf  $J_4 = -209,5 \cdot 10^{-8}$  und für die Zweischalenmodelle bis zum Niveauellipsoid  $J_4 = -236,2 \cdot 10^{-8}$  herabreichen. Der «empirische» Wert  $J_4 = -165 \cdot 10^{-8}$  wird überhaupt nicht erreicht. Darüber hinaus ist es offensichtlich, daß sowohl das Normalsphäroid wie auch das entsprechende Niveausphäroid des tatsächlichen Erdkörpers zwischen den beiden Grenzfällen der einparametrischen Gleichgewichtsfigur mit stetigem Dichtegesetz und den Zweischalenmodellen mit der Kerntiefe 2900 km liegen muß. Erstere liefert  $J_4 = -332,4 \cdot 10^{-8}$ , während für die Zweischalenmodelle  $J_4$  zwischen den Grenzen  $-310,7 \cdot 10^{-8} \leq J_4 \leq -288,8 \cdot 10^{-8}$  liegt. Diese Werte erfahren allerdings eine geringfügige Änderung, weil sie in [1, S. 182] mit etwas anderen Ausgangsdaten berechnet wurden. Gegen die Festlegung der oberen Grenze durch die einparametrische Gleichgewichtsfigur könnte man einwenden, daß wir gänzlich vom Gleichgewicht zu abstrahieren haben. Tatsächlich kann man vom Zweischalenmodell zum  $N$ -Schalenmodell übergehen, womit bei dem Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  beliebige stetige Dichtegesetze approximiert werden können. Aber die Erde ist nun nahezu im Gleichgewicht, und das Normalsphäroid ist eine Gleichgewichtsanordnung, welche für eine geringfügig größere Rotationsgeschwindigkeit eine Gleichgewichtsfigur repräsentiert. Daher muß der obere Grenzwert von  $|J_4|$  nahe bei  $330 \cdot 10^{-8}$  liegen.

Mit all diesen Argumenten scheint der Wert  $J_4 = -165 \cdot 10^{-8}$  zumindest reichlich problematisch. Ebenso problematisch ist aber auch das empirische Ergebnis, daß die höheren geraden Massefunktionen annähernd von gleicher Größenordnung sind. Demgegenüber liefert die allgemeine Entwicklung der Niveausphäroide bis zur 8. Ordnung [1, S. 87–97]

$$\begin{aligned}
 J_4 &= -\frac{4}{5} e^2 + \frac{4}{7} e \bar{e} + \frac{8}{35} f_4 ; \\
 J_6 &= \frac{8}{7} e^3 - \frac{20}{21} e^2 \bar{e} - \frac{96}{231} e f_4 - \frac{80}{231} f_6 + \frac{40}{231} \bar{e} f_4 \\
 J_8 &= \frac{1}{1287} \left( -2288 e^4 + 1024 e^2 f_4 + 1024 e f_6 + 896 f_8 - \frac{512}{5} f_4^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2080 e^3 \bar{e} - 640 \bar{e} e f_4 - 320 \bar{e} f_6 \right).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Wohl können hierin die Massefunktionen und die Formparameter nicht eindeutig getrennt werden; sie sind durch die Gleichungen (26) miteinander verknüpft. Wir werten daher diese Formeln mit den Daten (8a) für  $e$  und  $\bar{e}$  für das fiktive Niveauellipsoid ( $f_4 = f_6 = f_8 = 0$ ) aus und finden:

$$J_4 = -236,0 \cdot 10^{-8}; \quad J_6 = +0,6 \cdot 10^{-8}; \quad J_8 = -0,002 \cdot 10^{-8}, \quad (29)$$

d. h. es ist  $J_4 = -393 J_6$  und  $J_6 = -286 J_8$ . Die Massefunktionen nehmen also in ihrem Absolutbetrag ungefähr mit den Potenzen der Abplattung ab. Für das Normalsphäroid (8) erhält man bei Vernachlässigung von  $f_6$ , das ohnedies nur mit einem Drittel seines Betrages eingeht,  $J_6 = +0,88 \cdot 10^{-8}$ , also  $J_4 = -396 J_6$ . Der empirische Wert (9) würde für  $f_6 = -185,2 \cdot 10^{-8}$  oder für  $\lambda = +49,1$  resultieren, was reichlich unwahrscheinlich ist.

Schließlich kombinieren wir noch die empirischen Werte  $J_4 = -165 \cdot 10^{-8}$  und  $J_6 = +65 \cdot 10^{-8}$ . Man findet aus (19) und (28)

$$e = 335354,8 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = +312,033 \cdot 10^{-8}; \quad f_6 = -186,664 \cdot 10^{-8}, \quad (30)$$

also  $\lambda = +49,5 (!)$ ,

mithin fast dasselbe unmögliche Resultat. Weder  $J_4$  noch  $J_6$  sind glaubwürdig:  $|J_4|$  ist nur etwa die Hälfte des plausiblen Wertes, und  $J_6$  übersteigt den richtigen Wert um rund den 70fachen Betrag.

Auf jeden Fall darf festgestellt werden, daß die Theorie der allgemeinen Niveausphäroide ein sehr wirksames Mittel für die kritische Überprüfung der aus den künstlichen Satelliten bisher abgeleiteten Massefunktionen darstellt. Wir haben oben für die fiktiven Lösungen unsere Grenzen gefunden, und zwar einerseits für das Niveauellipsoid ( $J_4 = -236,2 \cdot 10^{-8}$ ) und andererseits für das an die Bedingung  $A = 0$  geknüpfte stetige Dichtegesetz ( $J_4 = -209,5 \cdot 10^{-8}$ ). Hier erhebt sich aber die Frage, ob zu den Sphäroiden, die in der durch  $(E, \omega, a, J_2)$  definierten Kurve ( $x \sim 1,032$ ) unterhalb der letztgenannten Lösung liegen ( $-209,5 \cdot 10^{-8} \leq J_4 \leq 0$ ), überhaupt irgendwelche, wenn auch physikalisch unmögliche Massenarrangements gefunden werden können.

#### *Literatur*

- [1] *K. Ledersteger*: Multi-parametric Theory of Spheroidal Equilibrium Figures and the Normal-Spheroids of Earth and Moon. Wien 1966.
- [2] *J. Kozai*: Bericht auf dem Satelliten-Symposium Athen, 1965.
- [3] *W. D. Lambert*: The Gravity Field of an Ellipsoid of Revolution as a Level Surface. Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki 1961.