

| | |
|---------------------|---|
| Zeitschrift: | Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie |
| Herausgeber: | Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural |
| Band: | 65 (1967) |
| Heft: | 5 |
| Artikel: | "Strenge" Ausgleichung von Polygonzügen und -netzen mit Fehlerellipsen, ohne Normalgleichungen |
| Autor: | Matthias, H. |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-221527 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

«Strenge» Ausgleichung von Polygonzügen und -netzen mit Fehlerellipsen, ohne Normalgleichungen

Von H. Matthias

1. Einleitung

Diesem Thema wurde in der Literatur schon viel Druckerschwärze geopfert. Dennoch riskiert der Autor einen weiteren Beitrag; dabei möchte er einige allgemeine Überlegungen zur Auswertung von Polygonzügen und -netzen äußern und sodann – nach einer kleinen Umschau in der Ausgleichungsrechnung – zum eigentlichen Thema einen einfachen Lösungsweg aufzeigen.

2. Allgemeines zur Auswertung von Polygonzügen und -netzen

2.1. Züge und Netze mit geringen und mittleren Genauigkeitsanforderungen

2.11. Darunter fallen Netze, bei denen die vorgeschriebenen Fehlergrenzen dank der angemessenen Genauigkeit der Koordinaten der gegebenen Fixpunkte und der zur Verwendung gelangenden Instrumente leicht eingehalten werden. Als Beispiel seien Polygonnetze der schweizerischen Grundbuchvermessung der Instruktionsgebiete III und II angeführt, deren Toleranzen relative Genauigkeiten von 1:1000 bis 1:2500 vorschreiben. Diese werden mühelos regelmäßig nur bis zu zirka 30% – wie es übrigens auch sein soll – ausgenutzt, wenn bei richtiger Gerätewahl mit Bezug auf die Richtungsübertragung und die Überwachung der Längeneichung sorgfältig gearbeitet wird.

2.12. Bei solchen Netzen ist die Art der Auswertung im Hinblick auf die Genauigkeit der Resultate belanglos. Verknotungen sollen allerdings zweckmäßig berücksichtigt werden, während es im übrigen aber gleichgültig ist, nach welchen Näherungsmethoden ausgeglichen und ob zugsweise oder in einem Guß und programmiert ausgewertet wird. Der Unternehmer hat die freie Wahl und richtet sie nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten und den ihm zur Verfügung stehenden Mitteln.

2.13. An dieser Stelle sei noch eine Bemerkung mit Bezug auf die elektronische Distanzmessung beim gegenwärtigen Stand der Technik beigefügt: Wie mancher schönen Gemeinde begegnet man – insbesondere im Frühjahr –, in der von zwei oder drei markanten Punkten aus fast der ganze Bann überblickt wird, teilweise sogar auch der überbaute Teil – und vergißt dabei, daß man als Geometer von diesen gleichen, ganz wenigen Standpunkten aus, durch Schnittpunkte mit elektronischer Distanzmessung, das ganze Festpunktnett für die Detailaufnahme mit sehr homogener Genauigkeit und wahrscheinlich recht wirtschaftlich bestimmen könnte; dasselbe gilt auch für die Bestimmung von Fixpunkten vom Gegenhang aus als Grundlage für Aufnahmen im steilen Laubwald.

2.2. Züge und Netze mit hohen Genauigkeitsanforderungen

2.21. Darunter fallen Netze, bei denen die vorgeschriebenen Fehlergrenzen klein sind; unter Berücksichtigung der Genauigkeit der Koordinaten der gegebenen Fixpunkte und der Eigenschaften der verwendeten Meßgeräte entspricht ihre Größenordnung im Sinne der Fehlertheorie und Fehlerfortpflanzung nicht den zu erwartenden Maximalfehlern, sondern vielmehr den zu erwartenden mittleren Fehlern. Als Beispiel seien Polygonnetze mit elektronisch gemessenen Distanzen erwähnt, mit denen das Netz der Punkte II. und III. Ordnung der Landestriangulation auf die IV. Ordnung verdichtet wird. Für die Auswertung der Beobachtungen und die Berechnung derartiger Netze gelten folgende grundsätzliche Bemerkungen:

2.22. An die Stelle von Näherungsverfahren, die ihre Begründung in stark idealisierten Zugsformen haben, soll hier bei der Ausgleichung die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer möglichst strengen Form treten. Dafür gibt es drei Hauptgründe:

- Das zuvor erwähnte Verhältnis zwischen der Größenordnung der Fehlergrenzen und den zu erwartenden mittleren Fehlern verlangt nach einem Auswerteverfahren, das tatsächlich zu den wahrscheinlichsten Werten der Beobachtungen und ihrer Funktionen führt.
- Oft weisen die Züge in den Netzen dieser Kategorie weder ähnliche Seitenlängen auf noch sind sie gestreckt. Die Fehlerfortpflanzung kommt deshalb sowohl infolge des Zusammenwirkens der verschiedenartigen Beobachtungsgrößen als auch infolge der Zugsgeometrie voll zur Wirkung und begründet die Anwendung einer Auswertung, die diesen Faktoren korrekt Rechnung trägt.
- Der dritte Grund schlußendlich ergibt sich als Folgerung aus den beiden vorgenannten und liegt darin, daß ein Auswerteverfahren erforderlich ist, das einen Ausweis über die mittleren Fehler der Beobachtungen und ihrer Funktionen nach der Ausgleichung liefert.

2.23. Ein einzelner Polygonzug weist eine schlechte Überbestimmung auf; Verknotungen versteifen das Netz wesentlich. Die mannigfachen Vorteile der Methode der Polygonnetze werden auch mit Bezug auf die Genauigkeit dann voll ausgenutzt, wenn in sich geschlossene Netzteile möglichst in einem Guß ausgeglichen werden.

2.24. Für die ausgleichungstechnische Behandlung von Netzen in einem Guß ist die Anwendung der allgemeinen Form der Ausgleichungsaufgabe von Bedingungsgleichungen mit Unbekannten am naheliegendsten; wahrscheinlich gibt es da und dort dafür Programme.

Sicher gibt es aber manchenorts Programme zur Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen, deren erster Programmteil so generell konzipiert ist, daß die Fehlergleichungen aus beliebigen Beobachtungen von Richtungen, Winkeln und Strecken zusammengestellt werden. Ein solches System bewältigt natürlich auch Polygonnetze; allerdings wird die Zahl der Normalgleichungen bereits bei kleinen Netzen rasch groß.

2.25. Die nachfolgende letzte Bemerkung hat allgemeine Bedeutung für Netzbearbeitungen in einem Guß; bei Polygonnetzen ist sie überdies von besonderer Bedeutung. Eine erste Durchrechnung, wenn auch nur mit provisorischen Resultaten, soll dem Bearbeiter einerseits die Möglichkeit geben, Unstimmigkeiten im gegebenen Festpunktfeld und grobe Fehler in den eingeführten Beobachtungen aufzudecken, deren Ursache abzuklären und sie auszumerzen, und ihm andererseits ein klares Bild darüber geben, ob die Gewichtswahl im allgemeinen, das Verhältnis der Gewichte von Strecken- und Winkelbeobachtungen zueinander im speziellen und der Ansatz des mittleren Fehlers an der Gewichtseinheit zu treffend waren oder noch zu revidieren sind.

3. Kleine Umschau in der Ausgleichungsrechnung

3.1. Der Titel dieses Abschnittes ist etwas weit gefaßt; das Gebäude der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ist groß und bereits so vielgestaltig und festgefügt durchkonstruiert, daß eine Umschau im herkömmlich verstandenen Sinn den Umfang eines Lehrbuches erfordert. Dieses Gebäude steht auf einer tragenden Säule. Der empfehlenswerte Zutritt zu dessen vielen Räumen ist vom Fundament her durch diese Säule möglich; leider wird dieser Weg nur selten benutzt. Viel häufiger erfolgt der Eintritt aus Gründen, denen in Ziff. 3.6, S. 191, noch etwas nachgegangen wird, seitlich durch Nebentüren auf verschiedenen Stockwerken, wodurch sich der Besucher selbst von vornherein den grundlegenden Überblick vorenthält. Oft und immer wieder sollte deshalb vom Fundament und der erwähnten Säule die Rede sein; im Dienste dieses Anliegens steht die nachfolgende kleine Umschau. Auf Literaturhinweise wird dabei verzichtet; sie sind in jedem einschlägigen Lehrbuch zu finden.

3.2. Das Ausgleichungsprinzip der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt die wahrscheinlichsten Werte der Beobachtungen derart, daß die gewogene Fehlerquadratsumme

$$v^* \cdot Q^{-1} \cdot v \quad (1)$$

zum Minimum wird. In dieser Matrizendarstellung ist v der Vektor der Verbesserungen an den gemäß Ziff. 3.46, S. 187, im weitesten Sinne verstandenen Beobachtungen; demnach können diese sowohl

- Verbesserungen an den ursprünglichen, unabhängigen oder «physikalisch» korrelierten Beobachtungen, als auch
- Verbesserungen an Funktionen der ursprünglichen Beobachtungen oder Funktionen von Funktionen der ursprünglichen Beobachtungen sein, die in der Regel «algebraisch», bisweilen auch «physikalisch» korreliert sind.

Q^{-1} ist die Inverse der Cofaktorenmatrix Q . Q und damit auch Q^{-1} sind im Fall von unabhängigen Beobachtungen Diagonalmatrizen, im Fall von korrelierten Beobachtungen, von Funktionen von Beobachtungen

oder von Funktionen von Funktionen von Beobachtungen hingegen vollständige Matrizen.

3.3. In den Lehrbüchern wird in der Regel von folgenden vier Ausgleichungsverfahren gesprochen: Ausgleichung direkter Beobachtungen – Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen – Ausgleichung bedingter Beobachtungen – Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen oder Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit Unbekannten.

Zu wenig kommt dabei zum Ausdruck oder die Tatsache wird vom Leser zu wenig realisiert, daß es sich bei diesen Verfahren lediglich um differenzierte Formelapparate handelt, mit denen bei verschiedenartiger Aufgabenstellung die mathematisch korrekte Anwendung des Ausgleichungsprinzips der Methode der kleinsten Quadrate am zweckmäßigsten erfolgt, die im übrigen aber grundsätzlich dasselbe darstellen und zu absolut denselben Resultaten führen.

3.4. Aus dieser Feststellung ergeben sich einige Folgerungen, die immer wieder Gegenstand von Diskussionen und sogar Abhandlungen sind:

3.41. Von den in Ziff. 3.3, S. 186, genannten Verfahren verbleiben – unter Vorbehalt der in Ziff. 3.43, S. 187, folgenden Ausführungen über den allgemeinsten Fall der Ausgleichungsrechnung – als grundlegend eigentlich nur die beiden klassischen Verfahren, deren Formelapparate in Matrzenschreibweise explizit wie folgt dargestellt werden können:
Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen

$$v = \{A(A^* \cdot Q^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^* \cdot Q^{-1} - E\} \cdot l \quad (2)$$

Ausgleichung von bedingten Beobachtungen

$$v = -Q \cdot A^* (A \cdot Q \cdot A^*)^{-1} \cdot w \quad (3)$$

Darin sind:

v der Vektor der Verbesserungen

A die Koeffizientenmatrix, und zwar

- bei der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen die Koeffizientenmatrix der Unbekannten X in den Fehlergleichungen $v = A \cdot x - l$
- bei der Ausgleichung von bedingten Beobachtungen die Koeffizientenmatrix der Verbesserungen in den Verbesserungsbedingungsgleichungen $A \cdot v + w = 0$

Q ist die Cofaktorenmatrix a priori der im weitesten Sinn gemäß Ziff. 3.46, S. 187, verstandenen Beobachtungen

l ist der Vektor der Absolutglieder in den Fehlergleichungen der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

w ist der Vektor der Widersprüche in den Verbesserungsbedingungsgleichungen der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen.

3.42. Die Ausgleichung von direkten Beobachtungen ist der einfachste Spezialfall der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen. Die geläufige Formel für das allgemeine arithmetische Mittel (4,5, S. 189) folgt direkt aus (2, S. 186), wenn nur eine Unbekannte gesucht wird, alle Beobachtungsgleichungen ferner die einfache Form $l_i + v_i = x$ haben und die Beobachtungen unabhängig sind. Unter Hinweis auf Ziff. 3.44, S. 187, kann die Ausgleichung direkter Beobachtungen auch als einfachster Spezialfall der Ausgleichung bedingter Beobachtungen behandelt werden; an die Stelle der Fehlergleichungen mit den die Verbesserungen vermittelnden Unbekannten x treten Bedingungsgleichungen von der Form

$$l_1 + v_1 = l_2 + v_2 = \dots l_i + v_i.$$

3.43. Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen oder bedingter Beobachtungen mit Unbekannten ist der allgemeinste Fall der Ausgleichungsrechnung und kann als eine Kombination der beiden klassischen Verfahren betrachtet werden. Die weiter unten erwähnte Ähnlichkeit der Formelsysteme (2, S. 186) und (3, S. 186) ermöglicht bei Kombination einerseits die direkte Lösung; eine Ausgleichung in Stufen ist andererseits gemäß den Ausführungen in Ziff. 3.2, S. 185, möglich, wobei wahlweise zuerst die Ausgleichung der vermittelnden und hernach der bedingten Beobachtungen oder umgekehrt erfolgt, unter korrekter Berücksichtigung der sich jeweils aus der vorherigen Stufe ergebenden Cofaktoren.

3.44. Die klassischen Verfahren der Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen sind formal sehr ähnlich; die Rolle der Unbekannten beim einen Verfahren übernehmen die Korrelaten beim anderen Verfahren. Die eigentlichen Resultate der Ausgleichung sind bei beiden Verfahren die Verbesserungen an den Beobachtungen. Deshalb sind in Ziff. 3.41, S. 186, die expliziten Lösungen (2, S. 186), (3, S. 186) für die Vektoren der Verbesserungen dargestellt; auch daraus ist die erwähnte Ähnlichkeit gut ersichtlich. Bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen wird der vorrangigen Bedeutung der ermittelten Verbesserungen als Schlußresultate neben den ermittelten Unbekannten als Zwischenresultate in der Regel zu wenig Beachtung geschenkt.

3.45. Bei direkten Beobachtungen oder solchen, die eine Summenungleichung erfüllen, wird die Lösung immer direkt mit dem allgemeinen arithmetischen Mittel angesetzt. Aber auch bei vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ist dieser direkte Weg bisweilen möglich; das allgemeine arithmetische Mittel der $\binom{n}{r}$ -Kombinationen von gesamthaft n Beobachtungen bei r notwendigen Beobachtungen ergibt bei korrekter Berücksichtigung der Cofaktoren das richtige Resultat.

3.46. Alle diese Folgerungen gelten analog den Ausführungen in Ziff. 3.2, S. 185, sowohl für unabhängige als auch für «physikalisch» oder «algebraisch» korrelierte Beobachtungen; demnach also sowohl für direkte als auch für äquivalente oder fingierte Beobachtungen und damit auch

für beliebige Funktionen der ursprünglichen, direkten Beobachtungen oder für Funktionen von Funktionen der ursprünglichen, direkten Beobachtungen.

3.47. Wirklich unabhängige, insbesondere «physikalisch» unabhängige Beobachtungen im strengsten Sinn gibt es wohl kaum. Dennoch werden diese Korrelationen mehrheitlich vernachlässigt. Mehr und mehr wird den sich durch den Gang der Auswertung ergebenden «algebraischen» Korrelationen Rechnung getragen. Immerhin ist es auch hier am Platz, den Einfluß derartiger Korrelationen im einzelnen Fall abzuschätzen und mit anderen, im früheren Verlauf der Messung und Auswertung allenfalls bereits vernachlässigten Korrelationen oder hypothetischen Ansätzen zu vergleichen. Bisweilen können dadurch weitere vernünftige Vernachlässigungen gerechtfertigt und damit der Fortgang der Arbeit wesentlich vereinfacht werden.

3.5. Kleine Anwendung

Die Ausführungen von Ziff. 3.41, S. 186, 3.42, S. 187, 3.45, S. 187, sollen auf die Lösung einer einfachen vermessungstechnischen Aufgabe angewendet werden:

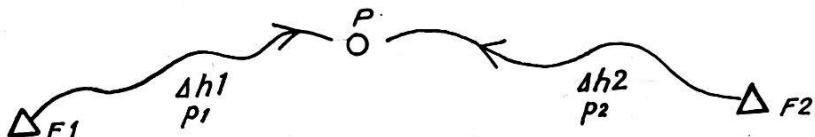


Fig. 1

Gegeben:

- Die Höhen HF₁, HF₂ der Fixpunkte F₁, F₂.
- Die beobachteten Höhendifferenzen Δh_1 bzw. Δh_2 mit den Gewichten p_1 bzw. p_2 (Vorzeichen von Δh_1 , Δh_2 gemäß Richtungspfeilen in Fig. 1; Annahme HF₁, HF₂ fehlerfrei).

Gesucht:

Die Verbesserung v_1 an der Beobachtung Δh_1 , wobei aus Übungsgründen vier Lösungswege darzustellen sind.

- 3.51. Ausgleichung direkter Beobachtungen, allgemeines arithmetisches Mittel
- 3.52. Ausgleichung direkter Beobachtungen, die eine Summengleichung erfüllen
- 3.53. Anwendung der expliziten Formel (2, S. 186) für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen
- 3.54. Anwendung der expliziten Formel (3, S. 186) für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Lösungsweg 3.51

Der Ansatz des allgemeinen arithmetischen Mittels für die Höhe des Punktes P ergibt

$$HP = \frac{p_1(HF_1 + \Delta h_1) + p_2(HF_2 + \Delta h_2)}{[p]} \quad (4)$$

Daraus folgt für die Verbesserung

$$\begin{aligned} v_1 &= (HP - HF_1) - \Delta h_1 \\ &= \frac{p_2}{[p]} [(HF_2 + \Delta h_2) - (HF_1 + \Delta h_1)] \end{aligned} \quad (5)$$

Lösungsweg 3.52

Der allgemeine Ansatz für die Ausgleichung des Widerspruches bei direkten Beobachtungen, die eine Summengleichung erfüllen, ergibt

$$v_1 = \frac{-\frac{1}{p_1} \cdot w}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{-p_2 \cdot w}{[p]} \quad (6)$$

wobei Widerspruch $w = [(\Delta h_1 - \Delta h_2) - (HF_2 - HF_1)]$

und daraus

$$v_1 = \frac{p_2}{[p]} [(HF_2 + \Delta h_2) - (HF_1 + \Delta h_1)] \quad (7) \equiv (5)$$

Lösungsweg 3.53

Aus Ziff. 3.41, S. 186, entnehmen wir Formel (2, S. 186)

$$v = \{A(A^* \cdot Q^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^* \cdot Q^{-1} - E\} \cdot l$$

Die Fehlergleichungen lauten:

$$v_1 = HP - (HF_1 + \Delta h_1); p_1$$

$$v_2 = HP - (HF_2 + \Delta h_2); p_2$$

Die gegebenen Matrizen lauten bei der zu lösenden Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} p_1, 0 \\ 0, p_2 \end{pmatrix} \quad l = \begin{pmatrix} HF_1 + \Delta h_1 \\ HF_2 + \Delta h_2 \end{pmatrix}$$

Die Durchrechnung erfolgt mit allen Zwischenresultaten

$$A^* = (1, 1) \quad A (A^* Q^{-1} A)^{-1} \cdot A^* \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{[p]}, \frac{p_2}{[p]} \\ \frac{p_1}{[p]}, \frac{p_2}{[p]} \end{pmatrix}$$

$$A^* \cdot Q^{-1} = (p_1, p_2)$$

$$A^* Q^{-1} \cdot A = [p] \quad (A^* Q^{-1} \cdot A)^{-1} = \frac{1}{[p]} \quad A (A^* Q^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^* \cdot Q^{-1} - E = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{[p]} - 1, \frac{p_2}{[p]} \\ \frac{p_1}{[p]}, \frac{p_2}{[p]} - 1 \end{pmatrix}$$

$$A (A^* \cdot Q^{-1} A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{[p]} \\ \frac{1}{[p]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_2}{[p]}, \frac{p_2}{[p]} \\ \frac{p_1}{[p]}, -\frac{p_1}{[p]} \end{pmatrix}$$

Vom gesuchten Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

ergibt sich die Verbesserung v_1 zu

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-p_2}{[p]} \cdot (HF_1 + \Delta h_1) + \frac{p_2}{[p]} \cdot (HF_2 + \Delta h_2) \\ &= \frac{p_2}{[p]} [(HF_2 + \Delta h_2) - (HF_1 + \Delta h_1)] \end{aligned} \quad (8) \equiv (5)$$

Lösungsweg 3.54

Aus Ziff. 3.41, S. 186, entnehmen wir Formel (3, S. 186)

$$v = -Q A^* (A Q A^*)^{-1} \cdot w$$

Die Verbesserungsbedingungsgleichung lautet

$$v_1 - v_2 + [(\Delta h_1 - \Delta h_2) - (HF_2 - HF_1)] = 0$$

Die gegebenen Matrizen lauten bei der zu lösenden Aufgabe daher

$$A = (1, -1) \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1}, 0 \\ 0, \frac{1}{p_2} \end{pmatrix} \quad w = (HF_1 - HF_2 + \Delta h_1 - \Delta h_2)$$

Die Durchrechnung erfolgt mit allen Zwischenresultaten

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-Q A^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{p_1} \\ +\frac{1}{p_2} \end{pmatrix}$$

$$A Q = \left(\frac{1}{p_1}, -\frac{1}{p_2} \right)$$

$$A Q A^* = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \left[\frac{1}{p} \right]$$

$$-Q A^* (A Q A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{p_2}{[p]} \\ +\frac{p_1}{[p]} \end{pmatrix}$$

$$(A Q A^*)^{-1} = \left[\frac{1}{p} \right]$$

Vom gesuchten Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

ergibt sich die Verbesserung v_1 zu

$$v_1 = + \frac{p_2}{[p]} [(HF_2 + \Delta h_2) - (HF_1 + \Delta h_1)] \quad (9) \equiv (5)$$

3.6. Zum Schluß dieser Umschau soll versucht werden, einen Grund aufzudecken, der mancherorts zu den in den Ziff. 3.1, S. 185, 3.3, S. 186, angedeuteten Fehlern führt. Die Lehre der Ausgleichungsrechnung zerfällt in drei Hauptthemen:

- «Grundlagen» (Fehlerlehre und Ausgleichungsprinzip im speziellen sowie im allgemeinen Rahmen von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ausgleichungsverfahren).
- «Ansätze» (mathematische Erfassung des Problems, auf das das Ausgleichungsprinzip angewendet werden soll; mit andern Worten Beobachtungsplan, Wahl des Ausgleichungsverfahrens, Aufstellen der Beobachtungs- oder/und Bedingungsgleichungen, Cofaktoren a priori, Beurteilung der Resultate).
- «Calcül» (rein mathematischer Teil, der von den Beobachtungsgleichungen oder/und Bedingungsgleichungen und Cofaktoren a priori zu den Verbesserungen und Cofaktoren a posteriori führt).

Die Vermittlung der Ausgleichungsrechnung, angewendet auf irgend eine Ingenieurwissenschaft, soll folgenden Forderungen genügen:

- Die drei Themen: Grundlagen, Ansätze, Calcül sind sauber getrennt darzustellen.
- Das Schwergewicht hat eindeutig auf den Grundlagen und den Ansätzen zu liegen.

- Der Calcül soll aus didaktischen Gründen besonders deutlich vom übrigen Stoff getrennt und nur im wirklich notwendigen Umfang behandelt werden. Dieses Thema hat rein mathematischen Inhalt und ist deshalb für die angewandten Ingenieurwissenschaften von sekundärer Bedeutung. Für die Ausbildung von Vermessungsfachleuten bietet es reichen Aufgabenstoff für die Schulung im disziplinierten, sicheren numerischen Rechnen.

Diesen Gedanken wird bisweilen vielleicht zu wenig Rechnung getragen. Die Themen Ansätze und Calcül kommen stark ineinander verflochten zur Darstellung. Schon bald steht man mitten im Dickicht des Calcüls, wendet damit unwillkürlich seine Aufmerksamkeit und seine Zeit insbesondere diesem Thema zu und übersieht die viel wesentlicheren Fragestellungen der Ansätze. Damit ist der in Ziff. 3.1, S. 185, erwähnte Eintritt in das Gebäude der Ausgleichungsrechnung durch eine Seitentüre bereits erfolgt und der grundlegende Überblick in Frage gestellt.

4. Ein einfacher Lösungsweg für die «strenge» Ausgleichung von Polygonzügen und -netzen mit Fehlerellipsen

4.1. Allgemeine Bemerkungen

Das im folgenden dargestellte Verfahren ist ein Beispiel für den in Ziff. 3.45, S. 187, angedeuteten direkten Lösungsweg bei bedingten Beobachtungen. Mit ihm wird ferner den in den Ziff. 2.22, S. 184, 2.23, S. 184, 2.25, S. 185, 3.47, S. 188, geäußerten Gedanken und den dort formulierten Forderungen Rechnung getragen. Da das Verfahren einfach ist, wird es im Interesse besserer Übersichtlichkeit mit Hilfe des beigelegten Ausdruckes (Tabellen 1, 2) nur stichwortartig beschrieben und bewußt auf eine ausführliche Behandlung verzichtet.

4.2. Erläuterung der Bezeichnungen auf dem Ausdruck (soweit erforderlich)

HZ, NZ Hauptzug, Nebenzug soweit Klassifikation überhaupt notwendig oder sinnvoll.

MEI Mittlerer Fehler an der Gewichtseinheit; im Kopf des Ausdruckes a priori, im Schlußresultat a posteriori. **MEI** ist dimensionslos.

Hin Indikationen für das Abrufen der einzelnen Programmschritte.
Rück
Mittel

QQB Cofaktoren der Brechungswinkel, Distanzen, Azimute, Y- und X-Koordinaten. (In der Literatur sind die Bezeichnungen **QQAZ**, **QBB**, **QDD**, **QYY** usw. üblich.)
QQY
QQX

- GRHA** Große und kleine Halbachse der mittleren Fehlerellipse.
KLHA
TETA Azimut der großen Halbachse der mittleren Fehlerellipse.
G Zentesimalgrad
M Meter
MM Millimeter
VB Verbesserungen an Brechungswinkeln und Distanzen.
VD
PVV Gewogene Fehlerquadratsumme.

4.3. Einzelne Polygonzüge

4.31. Schema des Rechenganges (Fig. 2)

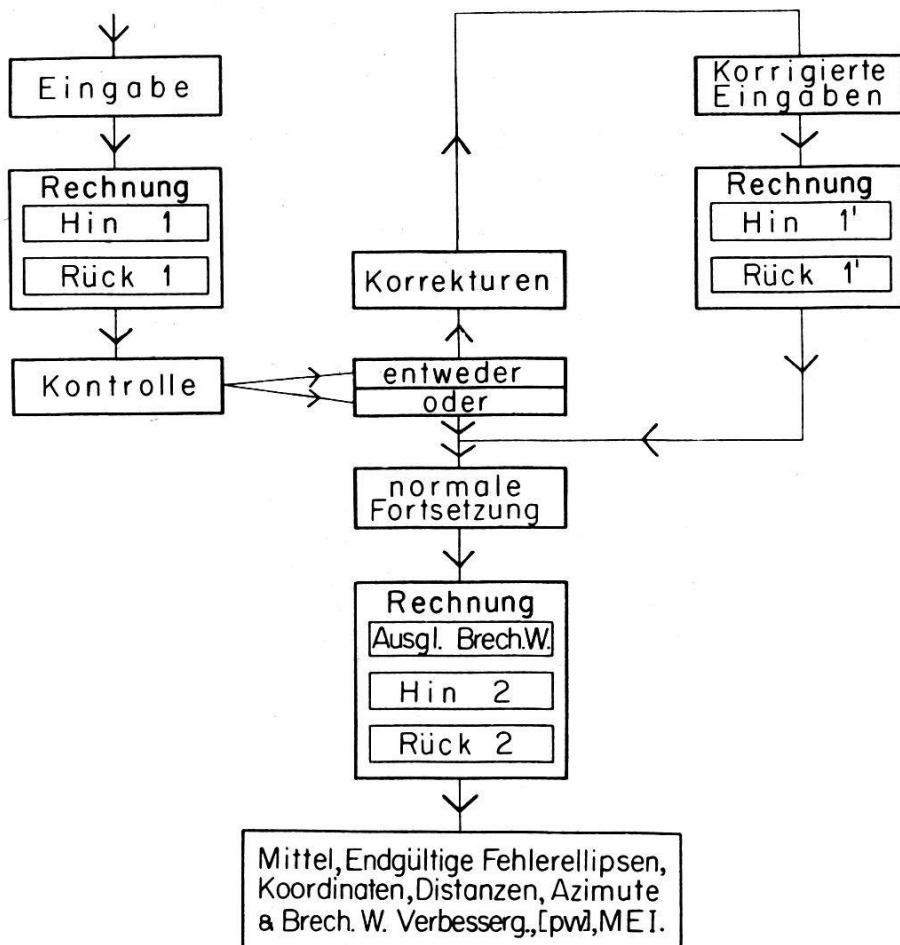


Fig. 2

4.32. Bemerkungen zum Rechengang

Eingabe. Alle gegebenen Daten: Koordinaten der Anschlußpunkte allenfalls mit Cofaktoren und Elementen der Fehlerellipsen, Orientierungen auf den Anschlußpunkten mit Cofaktoren, Beobachtungen mit Cofaktoren, *MEI a priori*.

Hin-1, Rück-1. Hin-1-Rechnung von A nach E und Rück-1-Rechnung von E nach A. Cofaktoren für alle berechneten Azimute und Koordinaten sowie Elemente der mittleren Fehlerellipsen. Widersprüche der Winkelsummenbedingung und der Koordinatenabschlußbedingungen.

Kontrolle. Gründliche Analyse der Ergebnisse der Hin-1-, Rück-1-Rechnung: Beurteilung der Orientierungen, Winkel- und Koordinatenwidersprüche mit Cofaktoren und Elementen der mittleren Fehlerellipsen vergleichen, allenfalls Untersuchung auf Kriterien für grobe Distanz- oder Winkelfehler, Beurteilung der Anschlußpunkte.

Korrekturen. Wenn durch die Kontrolle entsprechende Indikationen gegeben sind: Ausmerzen grober Unstimmigkeiten in den Anschlußpunkten, den Orientierungen, den Winkel- und Distanzmessungen. Wo erwiesen (womöglich auf Grund von Vergleichen mehrerer Züge), Korrektur von *MEI a priori*. Wiederholung Hin-1'- und Rück-1'-Rechnung.

Hin-2, Rück-2. Ausgleichung der Brechungswinkel – wenn noch erforderlich – proportional zu den Cofaktoren. Hernach analog Hin-1-, Rück-1-Rechnung.

Mittel. Berechnung der endgültigen Koordinaten als allgemeines arithmetisches Mittel aus den Werten der Hin-2-, Rück-2-Rechnung mit den entsprechenden Cofaktoren (Vernachlässigung der durch die allenfalls vorgängige Ausgleichung der Brechungswinkel entstandenen Korrelationen). Cofaktoren und Elemente der mittleren Fehlerellipsen der Mittelwerte. Endgültige Azimute und Distanzen, Brechungswinkel, Verbesserungen an den Beobachtungen [*pvv*], *MEI a posteriori*.

4.33. Bemerkungen zum Verfahren

- Wie bereits in Ziff. 4.32 erwähnt, wird hier nicht weiter auf das wichtige Problem der Wahl der Gewichtseinheit *MEI*, das Verhältnis der Gewichte von Distanz- und Winkelmessungen untereinander und auf die Dimensionen eingegangen.
- Die Cofaktoren der Azimute und Koordinaten der Hin- und Rück-Rechnung werden mit symbolischen Gewichtskoeffizienten ermittelt.
- Der Vergleich der Hin- und Rück-Rechnung mit allen Zwischenresultaten (Azimute, Widersprüche der Winkelsummen- und der Koordinatenabschlußbedingung, Cofaktoren, Elemente der mittleren Fehlerellipsen) gibt dem Bearbeiter die erwünschte, wertvolle Möglichkeit, den Polygonzug gründlich zu analysieren, alle groben Differenzen und Fehler aufzudecken und dann auszumerzen.

Dieser Vorzug des Verfahrens ist mit Bezug auf alle möglichen Fehlerquellen wichtig; insbesondere ist er aber zum Ersatz der sonst

P O L Y G O N Z U G 'STRENGE' AUSGLEICHUNG MIT FEHLERELLIPSEN
OPERAT PZ. NI LIMMATTAL BUERO H. MATTIAS LENZB. JAHR 1963

PZ:VON XII NACH SPREIT KLASSEFIKATION: HZ METR 6
ART DER EINZWAENGUNG: KOORD.RICHTG.BETOS. HIN X RUFCK X MITTEL X
BEMERKUNGEN: STG.SPREITENBACH 3. ORDNG.

HIN - 1 OHNE AUŠGL. DER BRECH.W.

| PKT.NR. | BRECH.W. DISTANZ (G / M) | QQB QQD | AZIMUTE (G) | QQAZ | SIN AZ COS AZ | Y DY (M) | X DX (M) | QQY | QQX | GRHA KLHA (MM) | TETA | |
|---------|--------------------------------|------------|----------------|-----------|------------------|----------------|----------------|-----------|------|----------------------|------|---|
| | | | 249.97850 | 0.50 | | | | | | | | |
| XII | 77.3854 | 0.25 | | | .9090361 | 69606.040 | 53781.960 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | |
| | 952.240 | 0.90 | 127.36390 | 0.75 | -.4167173 | 865.621 | -396.815 | | | 0 | | |
| XIII | 203.1716 | 0.25 | | | .8871563 | 70471.661 | 53385.145 | 1.0 | 1.5 | 8 | 27 | |
| | 978.805 | 1.0 | 130.53550 | 1.0 | -.4614691 | 868.353 | -451.688 | | | 6 | | |
| XIV | 217.2681 | 0.25 | | | .7310771 | 71340.014 | 52933.457 | 2.3 | 3.6 | 12 | 29 | |
| | 604.990 | 0.70 | 147.80360 | 1.3 | -.6822949 | 442.294 | -412.782 | | | 8 | | |
| XV | 304.3914 | 0.25 | | | -.7310620 | 71782.308 | 52520.675 | 3.2 | 4.5 | 14 | 32 | |
| | 1405.325 | 1.5 | 252.19500 | 1.5 | -.6823110 | -1027.380 | -958.869 | | | 10 | | |
| SPREIT | 332.2531 | 0.25 | | | | 70754.928 | 51561.807 | 7.4 | 9.2 | 19 | 164 | |
| | | | 384.44810 | 1.8 | | | | | | 15 | | |
| | | | SOLLWERTE | 384.44680 | 0.40 | | 70755.000 | 51561.840 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 |
| | | | WIDERSPRUECHE | 0.00130 | | | -0.072 | -0.034 | | | 0 | |
| | | | | | 0.079 | | | | | | | |

RUECK-1 OHNE AUŠGL. DER BRECH.W.

| PKT.NR. | BRECH.W. DISTANZ (G / M) | QQB QQD | AZIMUTE (G) | QQAZ | SIN AZ COS AZ | Y DY (M) | X DX (M) | QQY | QQX | GRHA KLHA (MM) | TETA | |
|---------|--------------------------------|------------|----------------|----------|------------------|----------------|----------------|-----------|------|----------------------|------|---|
| | | | 184.44680 | 0.40 | | | | | | | | |
| SPREIT | 67.7469 | 0.25 | | | .7310481 | 70755.000 | 51561.840 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | |
| | 1405.325 | 1.5 | 52.19370 | 0.65 | -.6823260 | 1027.360 | 958.890 | | | 0 | | |
| XV | 95.6086 | 0.25 | | | -.7310909 | 71782.360 | 52520.730 | 2.3 | 2.4 | 11 | 152 | |
| | 604.990 | 0.70 | 347.80230 | 0.90 | -.6822800 | -142.303 | 412.773 | | | 7 | | |
| XIV | 182.7319 | 0.25 | | | -.8871657 | 71340.057 | 52933.502 | 3.0 | 3.2 | 12 | 153 | |
| | 978.805 | 1.0 | 330.53420 | 1.2 | .4614511 | -868.362 | 451.671 | | | 9 | | |
| XIII | 196.8284 | 0.25 | | | -.9090446 | 70471.695 | 53385.173 | 4.4 | 5.5 | 14 | 196 | |
| | 952.240 | 0.90 | 327.36260 | 1.4 | .4166987 | -865.629 | 396.797 | | | 13 | | |
| XII | 322.6146 | 0.25 | | | | 69606.067 | 53781.970 | 5.7 | 8.3 | 17 | 17 | |
| | | | 49.97720 | 1.7 | | | | | | 14 | | |
| | | | SOLLWERTE | 49.97850 | 0.50 | | 69606.040 | 53781.940 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 |
| | | | WIDERSPRUECHE | -0.00130 | | | 0.027 | 0.010 | | | 0 | |
| | | | | | 0.028 | | | | | | | |

HIN - 2 MIT AUŠGL. DER BRECH.W.

| PKT.NR. | BRECH.W. DISTANZ (G / M) | QQB QQD | AZIMUTE (G) | QQAZ | SIN AZ COS AZ | Y DY (M) | X DX (M) | QQY | QQX | GRHA KLHA (MM) | TETA | |
|---------|--------------------------------|------------|----------------|-----------|------------------|----------------|----------------|-----------|------|----------------------|------|---|
| | | | 249.97850 | 0.50 | | | | | | | | |
| XII | 77.3851 | 0.25 | | | .9090378 | 69606.040 | 53781.960 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | |
| | 952.240 | 0.90 | 127.36364 | 0.75 | -.4167136 | 865.622 | -396.811 | | | 0 | | |
| XIII | 203.1713 | 0.25 | | | .8871600 | 70471.661 | 53385.149 | 1.0 | 1.5 | 8 | 27 | |
| | 978.805 | 1.0 | 130.53498 | 1.0 | -.4614619 | 868.357 | -451.681 | | | 6 | | |
| XIV | 217.2678 | 0.25 | | | .7310854 | 71340.019 | 52933.468 | 2.3 | 3.6 | 12 | 29 | |
| | 604.990 | 0.70 | 147.80282 | 1.3 | -.6822860 | 442.299 | -412.776 | | | 8 | | |
| XV | 304.3911 | 0.25 | | | -.7310509 | 71782.318 | 52520.691 | 3.2 | 4.5 | 14 | 32 | |
| | 1405.325 | 1.5 | 252.19396 | 1.5 | -.6823230 | -1027.364 | -958.866 | | | 10 | | |
| SPREIT | 332.2526 | 0.25 | | | | 70754.954 | 51561.806 | 7.4 | 9.2 | 19 | 164 | |
| | | | 384.44680 | 1.8 | | | | | | 15 | | |
| | | | SOLLWERTE | 384.44680 | 0.40 | | 70755.000 | 51561.840 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 |
| | | | WIDERSPRUECHE | 0.00000 | | | -0.046 | -0.034 | | | 0 | |
| | | | | | 0.057 | | | | | | | |

RUECK-2 MIT AUŠGL. DER BRECH.W.

| PKT.NR. | BRECH.W. DISTANZ (G / M) | QQB QQD | AZIMUTE (G) | QQAZ | SIN AZ COS AZ | Y DY (M) | X DX (M) | QQY | QQX | GRHA KLHA (MM) | TETA | |
|---------|--------------------------------|------------|----------------|----------|------------------|----------------|----------------|-----------|------|----------------------|------|---|
| | | | 184.44680 | 0.40 | | | | | | | | |
| SPREIT | 67.7472 | 0.25 | | | .7310509 | 70755.000 | 51561.840 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | |
| | 1405.325 | 1.5 | 52.19396 | 0.65 | -.6823230 | 1027.364 | 958.886 | | | 0 | | |
| XV | 95.6089 | 0.25 | | | -.7310854 | 71782.364 | 52520.726 | 2.3 | 2.4 | 11 | 152 | |
| | 604.990 | 0.70 | 347.80282 | 0.90 | -.6822860 | -142.299 | 412.776 | | | 7 | | |
| XIV | 182.7322 | 0.25 | | | -.8871600 | 71340.065 | 52933.502 | 3.0 | 3.2 | 12 | 153 | |
| | 978.805 | 1.0 | 330.53498 | 1.2 | .4514619 | -868.357 | 451.681 | | | 9 | | |
| XIII | 196.8287 | 0.25 | | | -.9090378 | 70471.708 | 53385.183 | 4.4 | 5.5 | 14 | 196 | |
| | 952.240 | 0.90 | 327.36364 | 1.4 | .4167136 | -865.622 | 396.811 | | | 13 | | |
| XII | 322.6149 | 0.25 | | | | 69606.086 | 53781.994 | 5.7 | 8.3 | 17 | 17 | |
| | | | 49.97850 | 1.7 | | | | | | 14 | | |
| | | | SOLLWERTE | 49.97850 | 0.50 | | 69606.040 | 53781.960 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 |
| | | | WIDERSPRUECHE | 0.00000 | | | 0.046 | 0.034 | | | 0 | |
| | | | | | 0.057 | | | | | | | |

Tabelle 1

P O L Y G O N Z U G 'STRENGE' AUSGLEICHUNG MIT FEHLERELLIPSEN
 OPERAT PZ N1 LIMMATTAL BUERO H. MATTHIAS LENZB. JAHR 1963

PZ:VON XII NACH SPREIT KLASSEFIKATION: HZ MEI: 6
 ART DER EINZWAENGUNG: KOORD.RICHTG.BEIDS. HIN X RUECK X MITTEL X
 BEMERKUNGEN: SIG.SPREITENBACH 3. ORDNG.

MITTEL

| PKT.NR. | BRECH.W. | VB | AZIMUTE (G) | SIN AZ (G) | COS AZ | Y | X | QQY | QQX | GRHA TETA |
|-----------|--------------------|---------|----------------|---------------|-----------|-----------|-----------|------|------|--------------|
| | DISTANZ (G / M) | VD | | | | DY (M) | DX (M) | | | KLHA (MM) |
| 249.97850 | | | | | | | | | | |
| XII | 77.3844 | -0.0010 | | | | 69606.040 | 53781.960 | 0.00 | 0.00 | 0 0 |
| | 952.245 | 0.005 | 127.36294 | .9090424 | -.4167036 | 865.631 | -396.804 | | | 0 |
| XIII | 203.1711 | -0.0005 | | | | 70471.671 | 53385.156 | 0.84 | 1.2 | 7 25 |
| | 978.810 | 0.005 | 130.53402 | .8871670 | -.4614485 | 868.368 | -451.670 | | | 5 |
| XIV | 217.2680 | -0.0001 | | | | 71340.039 | 52933.486 | 1.3 | 1.7 | 8 8 |
| | 604.992 | 0.002 | 147.80201 | .7310940 | -.6822767 | 442.306 | -412.772 | | | 7 |
| XV | 304.3918 | 0.0004 | | | | 71782.345 | 52520.714 | 1.3 | 1.6 | 8 169 |
| | 1405.303 | -0.022 | 252.19376 | -.7310487 | -.6823252 | -1027.345 | -958.874 | | | 7 |
| SPREIT | 332.2530 | -0.0001 | | | | 70755.000 | 51561.840 | 0.00 | 0.00 | 0 0 |
| | | | 384.44680 | | | | | | | 0 |
| | | | | | | | | | | |
| PVV | | 911.574 | | | | | | | | |
| MEI | | 17.432 | | | | | | | | |

Tabelle 2

recht fragwürdigen Art der Ausgleichung von Widersprüchen der Winkelsummenbedingung von Bedeutung, deren Größe nicht erklärllich sind.

- Die Berechnung der endgültigen Koordinaten als allgemeines arithmetisches Mittel aus der Hin-2-, Rück-2-Rechnung entspricht dem in Ziff. 3.45, S. 187, angedeuteten direkten Lösungsweg bei bedingten Beobachtungen.

Zwischen den Koordinaten desselben Punktes der Hin-1-, Rück-1-Rechnung besteht keine Korrelation; die Beobachtung des Brechungswinkels im betrachteten Punkt wird dabei gar nicht verwendet.

Wird der Winkelwiderspruch durch die Korrekturstufe als grober Fehler beseitigt, so gilt diese Bemerkung auch für die Koordinaten der Hin-2-, Rück-2-Rechnung.

Wurde jedoch der Widerspruch der Winkelsummenbedingung proportional zu den Cofaktoren ausgeglichen (analog einer Ausgleichung in Stufen), so sind die Koordinaten der Hin-2-, Rück-2-Rechnung korreliert. Dieser Korrelation könnte bei der Mittelbildung Rechnung getragen werden; sie wird aber aus den in Ziff. 3.47, S. 188, genannten Gründen vernachlässigt.

Dazu noch eine weitere Erwägung: Wenn der Widerspruch der Winkelsummenbedingung im fehlertheoretisch zu erwartenden Rahmen liegt, könnte aus den nachfolgend genannten Gründen ohnehin auf die fragwürdige Ausgleichung der Brechungswinkel verzichtet werden. Einerseits ist die Winkelsummenbedingung nach der Mittelbildung auf jeden Fall erfüllt und andererseits ergibt die vorgängige Ausgleichung der Brechungswinkel bei beidseitigem Azimutanschluß nur eine ganz unbedeutende Gewichtserhöhung der Koordinaten in Zugsmitte; ihre Vernachlässigung entspricht fehlertheoretisch etwa der gänzlichen Vernachlässigung des Brechungswinkels in Zugsmitte.

- Mit dem vorgeschlagenen Verfahren können alle Arten von Polygonzügen befriedigend bearbeitet werden, nämlich sowohl freie Züge als auch gezwängte Züge mit allen denkbaren Kombinationen von einseitigen oder beidseitigen Koordinaten- und Azimutanschlüssen sowie Zwischenorientierungen.
- Wie im Ausdruck deutlich erkennbar, können auch bekannte oder geschätzte Cofaktoren der Koordinaten der Anschlußpunkte eingeführt und damit kann bei der Ausgleichung der unterschiedlichen Zuverlässigkeit der Fixpunkte Rechnung getragen werden. Dabei bleiben die Koordinaten der Anschlußpunkte natürlich unverändert; deren Cofaktoren werden jedoch bei der Berechnung der endgültigen Koordinaten der Neupunkte und deren Cofaktoren und Fehlerellipsen berücksichtigt.
- (Im Beispiel ist MEI a priori ± 6 ; MEI a posteriori ergibt sich zu ± 17 . Die Gewichtswahl ist in Ordnung. Der größere Wert für MEI a posteriori hat seine Ursache in der Unsicherheit der Anschlußkoordinaten. Es wurden hier keine Cofaktoren QQY und QQX für die

Koordinaten der Anschlußpunkte eingeführt. $MEI \pm 6$ ist dimensionslos; ein $Q\bar{Q}D$ oder $Q\bar{Q}Y$ oder $Q\bar{Q}X$ von $1[\text{mm}^2]$ ist einer Längenmessung oder einer Koordinate zugeordnet, deren mittlerer Fehler $\pm 6 \text{ mm}$ beträgt; ein $Q\bar{Q}B$ oder $Q\bar{Q}AZ$ von $1[\text{cc}^2]$ ist einem Winkel oder einer Richtung zugeordnet, deren Genauigkeit durch einen mittleren Richtungsfehler von $\pm 4^\circ$ gekennzeichnet ist. Im Beispiel ist der mittlere Fehler der Längenmessung bei D zirka $1000 \text{ m} \pm 6 \text{ mm}$ und entspricht der durch einen mittleren Richtungsfehler von $\pm 4^\circ$ verursachten Querabweichung bei derselben Distanz. D zirka 1000 m ist die mittlere Länge der Polygonseiten.)

- Die Formeln für die Berechnung der Cofaktoren ($Q\bar{Q}Y$, $Q\bar{Q}X$, $Q\bar{Y}X$) der gewogen gemittelten Koordinaten aus denjenigen der Hin-Rechnung ($Q\vec{Q}Y$, $Q\vec{Q}X$, $Q\vec{Y}X$) bzw. Rück-Rechnung ($\vec{Q}\bar{Q}Y$, $\vec{Q}\bar{Q}X$, $\vec{Q}\bar{Y}X$) lauten:

$$Q\bar{Q}Y = \frac{\vec{Q}\bar{Q}Y \cdot \vec{Q}\bar{Q}Y}{\vec{Q}\bar{Q}Y + \vec{Q}\bar{Q}Y}; \quad Q\bar{Q}X = \frac{\vec{Q}\bar{Q}X \cdot \vec{Q}\bar{Q}X}{\vec{Q}\bar{Q}X + \vec{Q}\bar{Q}X} \\ Q\bar{Y}X = Q\bar{Q}Y \cdot Q\bar{Q}X \cdot \left(\frac{\vec{Q}\bar{Y}X}{\vec{Q}\bar{Q}Y \cdot \vec{Q}\bar{Q}X} + \frac{\vec{Q}\bar{Y}X}{\vec{Q}\bar{Q}Y \cdot \vec{Q}\bar{Q}X} \right) \quad (10)$$

4.4. Polygonnetze

Wenn immer es sinnvoll und möglich ist, soll der in Ziff. 2.23, S. 184, formulierten Forderung auf Bearbeitung einzelner, in sich geschlossener Netzteile in einem Guß Rechnung getragen werden. Beim vorgelegten Verfahren wird deshalb bewußt auf die gänzliche Vorprogrammierung verzichtet. Hingegen wird der in Ziff. 2.25, S. 185, formulierten Forderung Rechnung getragen und dem Bearbeiter einerseits die Routinearbeit abgenommen, ihm andererseits aber der Einblick in die Zwischenresultate und die sinngvolle Einflußnahme ermöglicht.

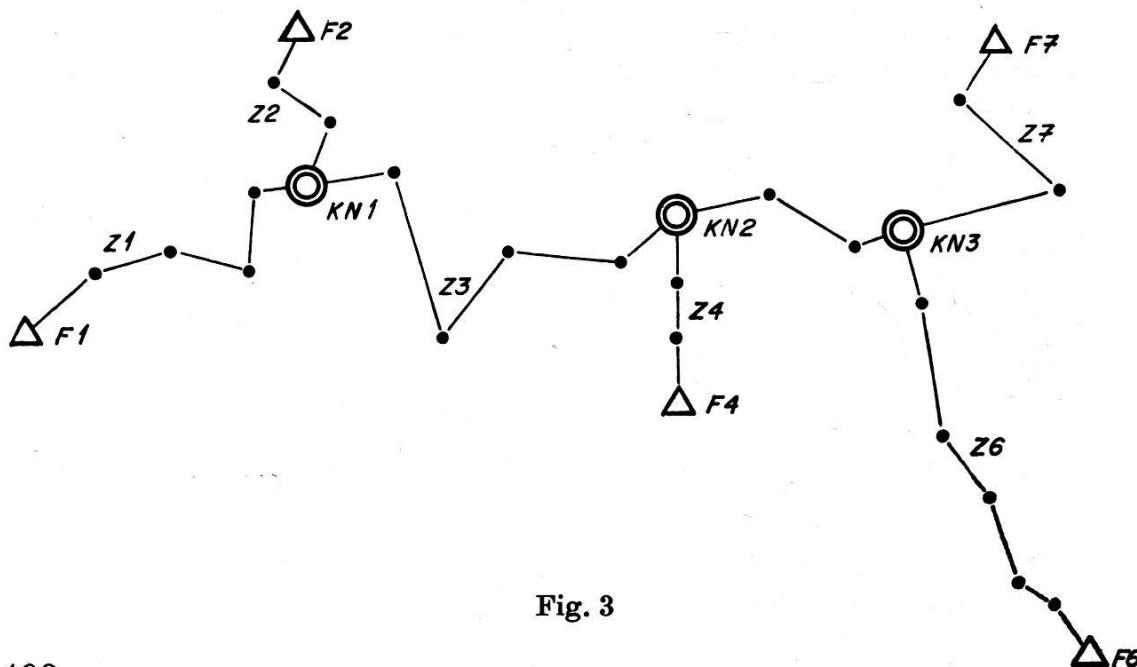


Fig. 3

Der Ablauf wird an einem schematischen Beispiel stichwortartig erläutert:

- Hin-1, Rück-1, Kontrolle, evtl. Hin-1', Rück-1', Hin-2, Rück-2, Mittel
 - für (Z1, Z2) ergibt KN1 prov.
 - für (Z6, Z7) ergibt KN3 prov.
- Hin-1, Kontrolle, evtl. Hin-1'
 - von KN1 prov. über Z3 nach KN2
 - von F4 über Z4 nach KN2
 - von KN3 prov. über Z5 nach KN2
- Mittelbildung für KN2
 - [Koordinaten, Orientierung, Cofaktoren in Erweiterung von Formel (10, S. 198), Elemente der mittleren Fehlerellipse.]
- Hin-1
 - von KN2 über Z3 nach KN1
 - von KN2 über Z5 nach KN3
- Mittelbildung (Koordinaten, Orientierung, Cofaktoren)
 - für KN1 aus Hin-1 von F1 über Z1 nach KN1
 - Rück-1 von F2 über Z2 nach KN1
 - Hin-1 von KN2 über Z3 nach KN1
 - für KN3 aus Hin-1 von F6 über Z6 nach KN3
 - Rück-1 von F7 über Z7 nach KN3
 - Hin-1 von KN2 über Z5 nach KN3
- Hin-1, Rück-1, Hin-2, Rück-2, Mittel
 - für Z1 zwischen F1 und KN1
 - für Z2 zwischen F2 und KN1
 - für Z3 zwischen KN1 und KN2
 - für Z4 zwischen F4 und KN2
 - für Z5 zwischen KN2 und KN3
 - für Z6 zwischen F6 und KN3
 - für Z7 zwischen F7 und KN3

Mitteilung der Redaktion

Damit die Zeitschrift in Zukunft wieder pünktlich am 15. jeden Monats erscheinen kann, sieht sich die Redaktion gezwungen, den folgenden Terminplan einzuführen:

| | | |
|--|--------------------------|----------------------|
| Größere Manuskripte (Formelartikel, Artikel mit vielen Abbildungen, umfangreiche Protokolle): | <i>beim Fachredaktor</i> | am 5. des Vormonats |
| Kleinere Manuskripte (Einladungen, Nekrologie, Buchbesprechungen, kleinere Protokolle): | <i>beim Chefredaktor</i> | am 17. des Vormonats |

Rücktritt von Prof. Dr. Karl Hofacker

Auf Ende Wintersemester 1967 ist Prof. Hofacker von seinem Amte zurückgetreten. Er war seit Abschluß seiner Studien 40 Jahre am Poly tätig: zuerst als Assistent bei Prof. Rohn, nach mehrjähriger praktischer Arbeit in einem Ingenieurbüro dann wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Ritter, bei welchem er auch doktorierte. 1941 wurden ihm Lehr-aufträge an den Abteilungen I und VIII übertragen. 1942 zum Ordinarius gewählt, hat Prof. Hofacker seither die Baustatik, den Massiv- und den Brückenbau für beide Abteilungen betreut; von 1948 bis 1952 war er Vorstand der Abteilung I. Es verdient festgehalten zu werden, daß zeitweise die Lehrverpflichtung bis zu 28 Wochenstunden Vorlesungen und Übungen umfaßte. 1961 ermöglichte Präsident Pallmann die erbetene Entlastung von den Pflichten an der Abteilung I.

Für unsere Abteilung VIII erwies sich das in der Folge geradezu als ein Glücksfall, ergab sich doch daraus eine eigene Professur für Statik und die Baufächer und für Prof. Hofacker die Möglichkeit, nun in seinen Vorlesungen und Übungen ganz auf die Bedürfnisse der Kulturtechnik eingehen zu können. Der Erfolg dieser Lösung und seiner Bemühungen war eindeutig. Für die Jahre 1964–1966 wurde Prof. Hofacker zum Abteilungsvorstand gewählt.

Am 22. Februar 1967 hielt der Genannte seine Abschiedsvorlesung über «Massive Brücken, ihre Geschichte und Entwicklung», zu welcher sich zahlreiche Kollegen aus der Dozentenschaft, viele Studenten und Ehemalige eingefunden hatten. Kräftig und langanhaltend akklamiert, beendete der Jubilar seine Vorlesung und seine Verpflichtung als akademischer Lehrer.

Das anschließende Abschiedssessen im Kreise einer zahlreichen Kollegenschar brachte die Würdigung des Geleisteten, den verdienten Dank für die Kollegialität Karl Hofackers und mit frohen und guten Wünschen den Übergang in den Ruhestand. *Ad multos annos!* *H. Grubinger*